Étude homologique de certains schémas de Hilbert

Introduction au domaine de recherche

Tristan Bozec
Encadré par Olivier Schiffmann

Octobre 2009

Introduction

Ce mémoire donne un bref historique de l'étude des schémas de Hilbert de points (introduits par [Gro60]) à travers des considérations cohomologiques. Si les premières avancées dans le domaine reposent sur des techniques de géométrie algébrique pure (bien exposées dans [FGI$^+$05]), la théorie des représentations est beaucoup utilisée par la suite pour comprendre les groupes de cohomologie : c'est l'idée de Nakajima dans [Nak99] qui utilise les représentations d'algèbres de Heisenberg ou de Clifford.

On peut alors chercher à généraliser cette méthode : à un objet issu de la géométrie algébrique, on essaye de donner une strucure de module sur un certain type d'algèbre dont il est possible d'étudier les représentations séparément. Ainsi dans [SV09] on étudie la K-théorie du schéma de Hilbert du plan à l'aide des algèbres de Hall elliptiques ou encore d'algèbres de Hecke.

Table des matières

1 Schémas de Hilbert à n points

On va exposer quelques résultats sur une certaine classe de schémas. Le vocabulaire utilisé est donc celui de la géométrie algébrique. On parlera notamment de schémas projectifs que l'on peut voir (ensemblistement) comme l'ensemble des zéros dans un certain $\mathbb{P}^d_{\mathbb{C}}$ d'une famille finie de polynômes homogènes à $d+1$ variables.

On utilisera aussi très souvent le plan affine $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ qui servira de référence dans l'exposé. Il est défini comme étant le spectre de $\mathbb{C}[x,y]$. Muni de la topologie de Zariski, ses points fermés correspondent aux idéaux maximaux, et donc aux points de $\mathbb{C}^2$. À un sous-schéma fermé Z de $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ est associé un idéal I de $\mathbb{C}[x,y]$: l'idéal des fonctions qui s'annulent sur Z. Ainsi l'immersion $Z \subset \mathbb{A}^2$ n'est autre que $\mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x,y]/I) \subset \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x,y])$.

On commence par définir les schémas qui vont nous intéresser : les schémas de Hilbert de points. L'idée est de partir d'un schéma projectif X et d'utiliser le fait que pour un faisceau $\mathcal{F}$ cohérent sur X, il existe un polynôme à coefficients rationnels qui coïncide sur les entiers avec la *caractéristique d'Euler* de $\mathcal{F}(n)$:

$$\chi(\mathcal{F}(n)) = \sum (-1)^i \dim_{\mathbb{C}} H^i(X, \mathcal{F}(n)).$$

Pour un polynôme donné à coefficients dans $\mathbb{Q}$, le pull-back nous permet alors d'introduire le foncteur suivant, défini sur les schémas localement noethériens :

$$\mathfrak{hilb}^{\phi}_X(T) = \left\{ \begin{array}{c} Z \text{ sous-schéma fermé de } X \times T \text{ plat sur } T \\ \text{avec } \forall\ t \in T,\ \phi \text{ polynôme de Hilbert de } \mathcal{O}_{Z_t} \end{array} \right\}.$$

Ici Z_t désigne la fibre de la composée $Z \hookrightarrow X \times T \xrightarrow{pr_2} T$ au-dessus de t. Le cas qui nous concerne est celui des polynômes de Hilbert constants, et on peut alors reformuler la définition. Pour n entier naturel on note :

$$\mathfrak{hilb}^{n}_X(T) = \left\{ \begin{array}{c} Z \text{ sous-schéma fermé de } X \times T \text{ plat et propre sur } T \\ \text{avec } \forall\ t \in T,\ \dim Z_t = 0 \text{ et } h^0(Z_t, \mathcal{O}_{Z_t}) = n \end{array} \right\}.$$

En fait on pourra voir un élément de $\mathfrak{hilb}^n_X(T)$ comme une famille (Z_t) de sous-schémas fermés de X indexée par T. Le théorème suivant est connu depuis Grothendieck (voir [Gro60]) :

Théorème 1.1. *Sous nos hypothèses, $\mathfrak{hilb}^n_X$ est représentable par un $\mathbb{C}$-schéma quasi-projectif. Cela signifie qu'il existe un $\mathbb{C}$-schéma quasi-projectif, noté* $\mathrm{Hilb}^n X$ *ou $X^{[n]}$, tel que*

$$\mathrm{Mor}_{\mathbb{C}}(\ \bullet\ , X^{[n]}) \simeq \mathfrak{hilb}^n_X.$$

Ainsi $Z \in \mathfrak{hilb}^n_X(\mathrm{Spec}\,\mathbb{C})$ s'identifie à un unique point, encore noté Z, de $X^{[n]}$.

Définition 1.2. Le schéma $X^{[n]}$ est appelé *schéma de Hilbert à n points* sur X.

L'existence (pas triviale du tout) du morphisme de *Hilbert-Chow* qui part du schéma de Hilbert à n points et prend valeur dans le produit symétrique $X^{(n)} := X^n/\mathfrak{S}_n$ permettra de mesurer la différence qu'il y'a entre se donner un élément de $X^{[n]}$ et n points de X, éventuellement avec multiplicités :

Théorème 1.3. *Soit X projectif et lisse sur $\mathbb{C}$. Il existe un morphisme surjectif $\rho : X^{[n]}_{red} \to X^{(n)}$, appelé morphisme de Hilbert-Chow, et donné sur les points par $Z \mapsto \sum_{P \in supp(Z)} \dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_{Z,P})P$.*

2 Le cas du plan

On peut montrer que les théorèmes de la section précédente peuvent s'étendre aux schémas quasi-projectifs (les ouverts des schémas projectifs). Ceci nous permet de nous placer dans un cas particulier, celui du plan et donc de poser dans la suite $X = \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$. On remarque alors qu'ensemblistement

$$X^{[n]} = \{I \text{ idéal de } \mathbb{C}[x,y] \text{ tel que } \dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[x,y]/I) = n\}.$$

Le résultat fondamental suivant montre l'importance du schéma $X^{[n]}$:

Théorème 2.1. *$X^{[n]}$ est un schéma régulier irréductible de dimension $2n$ et le morphisme de Hilbert-Chow $\rho : X^{[n]} \to X^{(n)}$ est une résolution des singularités.*

On entend notamment par "résolution des singularités" que ρ réalise un isomorphisme au-dessus du lieu régulier. Celui-ci correspond aux n-uplets de points tous distincts (on notera $X_0^{(n)}$ l'ouvert associé), en effet :

- au-dessus d'un tel point, $\mathfrak{S}_n$ agit librement sur les antécédents par le morphisme quotient $X^n \to X^{(n)}$;
- si l'on considère les points ou deux coordonnées exactement sont égales, l'étude de l'extension $\mathbb{C}[X_1, Y_1, X_2, Y_2]^{\mathfrak{S}_2} \hookrightarrow \mathbb{C}[X_1, Y_1, X_2, Y_2]$ nous montre que l'on perd la lissité du morphisme quotient.

On se servira dans toute la suite du mémoire du *schéma d'incidence* :

$$X^{[n,n+1]} = \{(Z, Z') \in X^{[n]} \times X^{[n+1]},\ Z \subset Z'\}.$$

On a besoin pour le définir du schéma $H = \coprod_n X^{[n]}$ représentant

$$\mathfrak{h}_X(T) = \left\{ \begin{array}{c} Z \text{ sous-schéma fermé de } X \times T \text{ plat et propre sur } T \\ \text{avec } \forall\ t \in T,\, \dim Z_t = 0 \end{array} \right\}.$$

Le lemme de Yoneda permet alors de définir un morphisme d'intersection $\kappa : X^{[n]} \times X^{[n+1]} \to H$ donné sur les points par $(Z, Z') \mapsto Z \cap Z'$. Associé à la composée π_1 de la première projection $X^{[n]} \times X^{[n+1]} \to X^{[n]}$ et de l'immersion $X^{[n]} \hookrightarrow H$, on obtient le diagramme cartésien suivant, qui définit proprement $X^{[n,n+1]}$:

$$\begin{array}{ccc} X^{[n,n+1]} & \to & X^{[n]} \times X^{[n+1]} \\ \downarrow & \square & \downarrow \pi_1 \\ X^{[n]} \times X^{[n+1]} & \underset{\kappa}{\to} & H \end{array}.$$

La preuve du lemme suivant est un bon exemple de la manipulation spécifique des schémas de Hilbert en géométrie algébrique :

Lemme 2.2. *$X^{[n]}$ est connexe.*

Démonstration. On va procéder par récurrence sur n, l'initialisation ne posant pas problème. En utilisant à nouveau la propriété universelle du schéma de Hilbert (et $X = X^{[1]}$), on obtient un morphisme $q : X^{[n,n+1]} \to X$ qui associe à (Z, Z') le point en lequel Z et Z' diffèrent, que l'on notera $Z' \backslash Z$. On notera $p_1 : X^{[n,n+1]} \to X^{[n]}$ la première projection, $p_2 : X^{[n,n+1]} \to X^{[n+1]}$ la deuxième, et enfin

$$\begin{array}{cccc} \phi : & X^{[n,n+1]} & \xrightarrow{q\times p_1} & X \times X^{[n]} \\ & (Z, Z') & \longmapsto & (Z'\backslash Z, Z) \ . \end{array}$$

Par hypothèse de récurrence, $X \times X^{[n]}$ est connexe. Un élément d'une fibre $\phi^{-1}(P, Z)$ correspond à la donnée d'un hyperplan de l'espace vectoriel $I_Z \otimes k(P)$ donc $\phi^{-1}(P, Z) \simeq \mathbb{P}(I_Z \otimes k(P))$ est connexe, et donc $X^{[n,n+1]}$ est connexe. Mais p_2 est surjective, donc on obtient bien $X^{[n+1]}$ connexe, ce qui achève la récurrence. $\square$

La théorie des déformations permet par ailleurs de décrire les espaces tangents de $X^{[n]}$:

Lemme 2.3. *En un point fermé $Z \in X^{[n]}$ correspondant à un idéal I, on a :*

$$T_Z X^{[n]} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[x,y]}(I, \mathbb{C}[x, y]/I).$$

Ce dernier lemme rend possible l'utilisation du foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\ \bullet\ , \mathcal{O}_Z)$ et de la dualité de Serre : on montre alors qu'en notant $X_0^{[n]}$ la préimage de $X_0^{(n)}$ dans $X^{[n]}$, le fermé irreductible $Y = \overline{X_0^{[n]}}$ est régulier de dimension $2n$. On peut alors conclure car $Y = X^{[n]}$ par connexité.

On a aussi un premier résultat de cohomologie propre au cas du plan, démontré dans [ES87]. On note Π_n l'ensemble des partitions de l'entier n, et $l(\lambda)$ la longueur d'une partition λ :

Théorème 2.4. *Pour $0 \le i \le n$, on a*

$$\dim H^{2i}(X^{[n]}, \mathbb{Q}) = \#\{\lambda \in \Pi_n,\ l(\lambda) = n - i\} \ ,$$
$$\dim H^{2i+1}(X^{[n]}, \mathbb{Q}) = 0 \ .$$

La démonstration utilise une "décomposition cellulaire", issue de l'action canonique du tore $(\mathbb{C}^*)^2$ sur $\mathbb{C}^2$. Elle ne peut donc pas se généraliser aux surfaces quasi-projectives quelconques. On va donc introduire dans la prochaine section une autre décomposition de notre schéma de Hilbert qui puisse servir dans une plus grande généralité pour du calcul de cohomologie.

3 Stratification

Encore une fois, le théorème 2.1 se généralise. Plaçons-nous désormais dans le cas d'une surface quasi-projective lisse S.

Définition 3.1. Pour toute partition $\lambda = (n_1, \ldots, n_r)$ de n (avec $0 < n_1 \leq \ldots \leq n_r$), on définit le sous-ensemble localement fermé

$$S_\lambda^{(n)} = \{\sum n_i P_i,\ P_i \in S \text{ tous distincts}\}$$

de $S^{(n)}$. En posant $S_\lambda^{[n]} = \rho^{-1}(S_\lambda^{(n)})$, on obtient une stratification

$$S^{[n]} = \coprod_\lambda S_\lambda^{[n]}$$

de $S^{[n]}$ en strates localement fermées.

Étudions la dimension d'une strate $S_\lambda^{(n)}$. Commençons par poser $\lambda = (1^{\alpha_1}, 2^{\alpha_2}, \ldots, n^{\alpha_n})$, où α_i désigne le nombre de fois que i apparaît dans $(n_1, \ldots, n_r)$, et i^{α_i} désigne la famille de α_i éléments tous égaux à i. Soit aussi $(S^{\alpha_1} \times \ldots \times S^{\alpha_n})_0$ l'ouvert de $S^{\alpha_1} \times \ldots \times S^{\alpha_n}$ correspondant aux n-uplets de points tous distincts. Alors, $S_\lambda^{(n)}$ est le quotient de $(S^{\alpha_1} \times \ldots \times S^{\alpha_n})_0$ par l'action de $\mathfrak{S}_{\alpha_1} \times \ldots \times \mathfrak{S}_{\alpha_n}$ (permutation des facteurs S_{α_i}). Comme cette action est à nouveau bien libre, on en conclut que $S_\lambda^{(n)}$ est régulière de dimension $2\sum \alpha_i = 2r$.

On introduit un nouveau schéma de Hilbert, qui nous sera utile dans la suite :

Définition 3.2. Soit $H_n = \mathrm{Hilb}^n \operatorname{Spec}(\mathbb{C}[[x,y]]/(x,y)^n)$, qui paramètre les idéaux de codimension n dans $\mathbb{C}[[x,y]]$ (en fait tout idéal de $\mathbb{C}[[x,y]]$ de codimension n contient $(x,y)^n$). Les H_n sont appelés schémas de Hilbert *ponctuels.*

Proposition 3.3. *Pour une partition $\lambda = (n_1, \ldots, n_r)$, le morphisme de Hilbert-Chow fait de $S_\lambda^{[n]}$ un fibré localement trivial (pour la topologie analytique mais c'est aussi vrai pour la topologie étale) sur $S_\lambda^{(n)}$ de fibres $H_{n_1} \times \ldots \times H_{n_r}$.*

Cette proposition découle essentiellement des deux points suivants :

- la cas de la strate $\rho : S_{(n)}^{[n]} \to S_{(n)}^{(n)} \simeq S$. Pour $P \in S$, la fibre $\rho^{-1}(nP)$ consiste en l'ensemble des sous schémas $Z \in S^{[n]}$ concentré en P. Les idéaux associés contiennent tous $\mathfrak{m}_P^n$ et donc $\rho^{-1}(nP) \simeq H_n$ (cf. définition 3.2) ;
- pour $\lambda = (n_1, \ldots, n_r)$ quelconque, on a des fibres $\rho^{-1}(\sum n_i P_i)$ toutes isomorphes à $H_{n_1} \times \ldots \times H_{n_r}$, et les P_i étant deux à deux distincts, on peut trouver des ouverts deux à deux disjoints (pour la topologie analytique) contenant chacun un P_i.

Cette proposition permet la définition suivante :

Définition 3.4. Soit un morphisme projectif $f : X \to Y$ vers un schéma stratifié $Y = \coprod_\lambda Y_\lambda$ en strates localement fermées. On suppose que $f : f^{-1}(Y_\lambda) \to Y_\lambda$ est un fibré localement trivial de fibres F_λ pour la topologie analytique.

On dit que f est *semismall* si pour tout λ on a

$$2\dim F_\lambda \leq \operatorname{codim} Y_\lambda,$$

et que la strate Y_λ est *pertinente* s'il y a égalité.

Ce que l'on a fait précédemment permet de dire que le morphisme de Hilbert-Chow est semismall pour la stratification de $S^{(n)}$ par les partitions, et même que les strates sont toutes pertinentes. En effet la projectivité de ρ vient du fait que S est quasi-projective et que le schéma de Hilbert d'un ouvert d'un schéma X est un ouvert du schéma de Hilbert de X.

Vérifions aussi l'égalité sur les dimensions : $S^{(n)}$ est de dimension $2n$ et on a vu plus haut qu'une strate $S_\lambda^{(n)}$ est de dimension $2r$ si $\lambda = (n_1, \ldots, n_r)$, donc de codimension $\sum 2(n_i - 1)$. Par ailleurs, on sait d'après [Bri77] (voir aussi [Iar72]) que les H_{n_i} sont irreductibles de dimension $n_i - 1$. On conclut donc grâce à 3.3.

Remarque 3.5. Le résultat d'irreductibilité de Briançon n'est pas nécessaire ici, seul le résultat sur la dimension suffit, comme expliqué dans [ES87] et [Nak99].

Sous ces conditions, on trouve dans [GS93] le théorème suivant, où l'on note $b_i(Y) = \dim H^i(Y, \mathbb{Q})$ le i-ième nombre de Betti d'un schéma Y, et $p(Y) = \sum_i b_i(Y) z^i$ son polynôme de Poincaré :

Théorème 3.6. *Pour S surface lisse quasi-projective sur $\mathbb{C}$ on a*

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(S^{[n]}) t^n = \prod_{k>0} \frac{(1 + z^{2k-1} t^k)^{b_1(S)} (1 + z^{2k+1} t^k)^{b_3(S)}}{(1 - z^{2k-2} t^k)^{b_0(S)} (1 - z^{2k} t^k)^{b_2(S)} (1 - z^{2k+2} t^k)^{b_4(S)}}.$$

Sa démonstration nécessite des outils avancés de géométrie algébrique, notamment de cohomologie d'intersection.

4 L'algèbre de Heisenberg

La formule obtenue ci-dessus montre l'intérêt qu'il y a à considérer dans leur ensemble les cohomologies de tous les $S^{[n]}$, pour $n \geq 1$. On va donc essayer de mieux comprendre les groupes de cohomologie en étudiant l'espace

$$\mathbf{V} = \bigoplus_{n \geq 0} H^*(S^{[n]}, \mathbb{Q}),$$

notamment en essayant de lui associer une action compatible avec sa graduation.

Définition 4.1. Soit V un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel muni d'une forme bilinéaire non dégénérée $< . , . >$.

- Soit T l'algèbre tensorielle sur $V[t, t^{-1}]$ graduée selon le degré i de t^i : $T = \oplus_{i \in \mathbb{Z}} T^i$. L'*algèbre de Heisenberg* $H(V)$ sur V est celle obtenue à partir de T en rajoutant les relations
$$[ut^i, vt^j] = i\delta_{i,-j} < u, v > \mathbf{e}$$

où **e** désigne l'élément neutre de l'algèbre tensorielle correspondant au produit tensoriel vide.

– Si l'on considère $tV[t]$ à la place de $V[t, t^{-1}]$ ci-dessus, on obtient l'*espace de Fock* $F(V)$ comme sous-algèbre de $H(V)$. On en fait un $H(V)$-module en posant $ut^0.w = 0$ pour tout $w \in F(V)$, et $ut^{-i}.\mathbf{e} = 0$ pour tout $i > 0$.

Proposition 4.2. *L'espace de Fock $F(V)$ est un $H(V)$-module irréductible et si $F(V)^d$ désigne son sous-espace de degré d (t toujours de degré 1), on a*

$$\sum_{d \geq 0} \dim(F(V)^d) t^d = \prod_{k \geq 1} \frac{1}{(1 - t^k)^{\dim V}}.$$

L'intérêt pour ces algèbres vient du fait que pour une surface quasi-projective S telle que $V = H^*(S, \mathbb{Q}) = H^0(S, \mathbb{Q}) \oplus H^2(S, \mathbb{Q}) \oplus H^4(S, \mathbb{Q})$, la formule de la proposition coïncide avec celle du théorème 3.6 avec $z = 1$. En fait on peut obtenir le résultat suivant, démontré dans [Nak99] et [Gro96] :

Théorème 4.3. *Soit S une surface quasi-projective lisse et $V = H^*(S, \mathbb{Q})$. Si on suppose que $H^1 = H^3 = 0$, on a un isomorphisme de $H(V)$-module entre $F(V)$ et* $\mathbf{V}$.

Remarque 4.4. Dans ce cas $< \alpha, \beta >= p_*(\alpha \cap \beta)$ où p désigne l'unique morphisme $S \to \{pt\}$. Pour une surface vérifiant $H^1 = H^3 = 0$ (comme ce sera le cas dans la suite avec $S = \mathbb{A}^2$), cette forme est symétrique. Dans le cas contraire (cohomologie impaire non triviale), il aurait aussi fallu introduire les algèbres de Clifford.

Pour simplifier, on va donc expliquer la construction de la strucutre de $H(V)$-module sur $\mathbf{V}$ dans le cas de $S = \mathbb{A}^2$ et donc de $V = \mathbb{Q}$. Notre but est de voir $\mathbf{V}$ comme une représentation de $H(V)$. Pour $m \geq 1$, il faut donc pouvoir représenter la multiplication par t^m et créer une application de $H^*(S^{[n]})$ dans $H^*(S^{[n+m]})$ (on cesse de noter les $\mathbb{Q}$ dans la suite). On va essayer de généraliser l'utilisation de la variété d'incidence $X^{[n,n+1]}$ en posant :

$$Z_{n,m} = \{(Z, P, W) \in S^{[n]} \times S \times S^{[n+m]} \mid \rho(W) - \rho(Z) = mP\}.$$

On impose donc que la différence entre Z et W soit concentrée en un point. En notant pr et pr' les projection vers $S^{[n]}$ et $S^{[n+m]}$, on note alors

$$p_m : H^*(S^{[n]}) \to H^*(S^{[n+m]}),\ y \mapsto DP(pr'_*(pr^*(y) \cap Z_{n,m}))$$

où DP désigne la dualité de Poincaré. Intuitivement, si on voit y comme la classe duale de la classe de $Y \subset S^{[n]}$, $p_m(y)$ correspondra à la classe de la fermeture de $\{Z \sqcup P \mid Z \in Y,\ P \in S^{[m]}_{(m)}\}$.

On note encore p_m l'application $\mathbf{V} \to \mathbf{V}$ obtenue par somme directe et on obtient :

Proposition 4.5. *Soit* $\mathbf{e}$ *l'unité de* $\mathbb{Q} = H^*(S^{[0]})$*. Alors l'ensemble des*

$$p_{n_1} \circ \ldots \circ p_{n_r}(\mathbf{e}),\ \sum n_j = n$$

constitue une base de $\mathbf{V}_n = H^*(S^{[n]})$ *pour tout* $n \geq 0$*.*

L'utilisation de l'accouplement relatif aux cohomologies de $S^{[n]}$ et $S^{[n+m]}$ permet de définir p_{-m}. Intuitivement on a cette fois $p_{-m}(y)$ qui correspond à la classe de la fermeture de $\{Z \in S^{[n]} \mid Z \sqcup P \in Y$ pour un certain $P \in S^{[m]}_{(m)}\}$, si y est la classe de $Y \subset S^{[n+m]}$. Alors :

Proposition 4.6. *Pour tout* n, m *on a* $[p_n, p_m] = n\delta_{n,-m} id_{\mathbf{V}}$*.*

On dispose donc d'une application de $H(V)$-modules définie par

$$F(V) \to \mathbf{V},\ t^i \mapsto p_i(\mathbf{e}).$$

Comme $F(V)$ et $\mathbf{V}$ ont la même série de Poincaré et que $F(V)$ est irréductible, c'est un isomorphisme (cf. 4.2) : en effet la série de Poincaré de $\mathbf{V}$ est obtenue en prenant $z = 1$ dans la formule de 3.6, et pour $S = \mathbb{A}^2$ on a $b_i = \delta_{i,0}$.

5 K-théorie

Dans [Nak99], la question est posée de savoir si l'on peut aussi définir une structure intéressante sur l'espace $\oplus_n K(S^{[n]})$ modelé sur les groupes de Grothendieck des $S^{[n]}$. Pour un schéma X, $K(X)$ est défini comme le groupe libre engendré par les classes d'isomorphisme $[\mathcal{F}]$ des faisceaux cohérents sur X, quotienté par les relations $[\mathcal{A}] + [\mathcal{C}] = [\mathcal{B}]$ pour chaque suite exacte

$$0 \to \mathcal{A} \to \mathcal{B} \to \mathcal{C} \to 0.$$

Les outils qui sont utilisés dans la suite, et qui permettent de généraliser ceux des précédents paragraphes, sont exposés dans [CG97] qui traite de K-théorie équivariante : pour un groupe linéaire algébrique G agissant sur X, on s'intéressera au groupe de Grothendieck $K^G(X)$ de la catégorie des faisceaux cohérents G-équivariants sur X. On va notamment se servir de *convolution.* Pour un groupe algébrique G, on appelle G-variété un $\mathbb{C}$-schéma quasi-projectif muni d'une action de G :

Proposition 5.1. *Soient* X_1*,* X_2 *et* X_3 *des* G*-variétés lisses munies de morphismes propres vers une* G*-variété* Y*. On dispose d'une application associative*

$$\star : K^G(X_1 \times_Y X_2) \otimes K^G(X_2 \times_Y X_3) \to K^G(X_1 \times_Y X_3).$$

On note R_G l'anneau (complexifié) des représentations d'un groupe G. La proposition permet :

– dans le cas de $X_1 = X_2 = X_3 = X$, de munir $K^G(X\times_Y X)$ d'une structure de R_G-algèbre associative d'unité $[\Delta_X]$, Δ_X désignant la diagonale de $X \times_Y X$;
– dans le cas de $X_1 = X_2 = X$ et $X_3 = Y = \{pt\}$, de munir $K^G(X)$ d'une structure de $K^G(X \times_Y X)$-module.

On considère dans la suite $S = \mathbb{A}^2$. Les schémas $S^{[n]}$ n'étant pas propres, on considère plutôt les points fixes $S^{[n],T}$ sous l'action du tore $T = (\mathbb{C}^*)^2$. En effet celui-ci agit sur chaque $S^{[n]}$ par

$$(z_1, z_2).I = \{P(z_1^{-1}x, z_2^{-1}y),\ P(x, y) \in I\}$$

pour I de codimension n dans $\mathbb{C}[x, y]$. On montre que les points fixes sont en bijection avec les partitions λ de n (on notera $\lambda \vdash n$) via

$$\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r) \mapsto I_\lambda] =< y^{\lambda_1}, xy^{\lambda_2}, \dots, x^{r-1}y^{\lambda_r}, x^r >.$$

En particulier les $(S^{[n]})^T$ sont finis. Par ailleurs, avec

$$q : T \to \mathbb{C}^*,\ (z_1, z_2) \mapsto z_1^{-1}, \quad t : T \to \mathbb{C}^*,\ (z_1, z_2) \mapsto z_2^{-1},$$

on a $R_T = \mathbb{C}[q^{\pm1}, t^{\pm1}]$ et on note alors $\mathbf{K} = \mathbb{C}(q^{1/2}, t^{1/2})$. Un théorème de Thomason (voir [CG97]) nous donne alors l'isomorphisme suivant, où ι est le plongement $S^{[n],T} \hookrightarrow S^{[n]}$ et où l'on note $M_\mathbf{K}$ pour $M \otimes_{R_T} \mathbf{K}$ si M est un R_T-module :

$$\iota_* : K^T(S^{[n],T})_\mathbf{K} = \underset{\lambda\vdash n}{\oplus} \mathbf{K}[I_\lambda] \xrightarrow{\sim} K^T(S^{[n]})_\mathbf{K}.$$

Comme on a aussi (on note $I_{\mu,\lambda} = (I_\mu, I_\lambda)$)

$$K^T(S^{[n]} \times S^{[m]})_\mathbf{K} = \underset{\lambda\vdash n,\ \mu\vdash m}{\oplus} \mathbf{K}[I_{\mu,\lambda}],$$

on voit que $K^T(S^{[n]})_\mathbf{K}$ et $K^T(S^{[n]} \times S^{[m]})_\mathbf{K}$ sont combinaisons linéaires de classes de faisceaux cohérents à support propres, et on dispose donc des convolutions suivantes :

$$\star : K^T(S^{[n]} \times S^{[m]})_\mathbf{K} \otimes K^T(S^{[m]} \times S^{[k]})_\mathbf{K} \to K^T(S^{[n]} \times S^{[k]})_\mathbf{K},$$
$$\star : K^T(S^{[n]} \times S^{[m]})_\mathbf{K} \otimes K^T(S^{[m]})_\mathbf{K} \to K^T(S^{[n]})_\mathbf{K}.$$

On dispose ainsi d'une $\mathbf{K}$-algèbre associative

$$\mathbf{E_K} = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} \prod_n K^T(S^{[n+k]} \times S^{[n]})_\mathbf{K},$$

le produit étant pris sur les $n \geq \max(0, -k)$, qui agit sur le $\mathbf{K}$-espace vectoriel

$$\mathbf{L_K} = \bigoplus_{n\geq0} K^T(S^{[n]})_\mathbf{K}.$$

Pour définir la sous-algèbre de $\mathbf{E_K}$ qui va nous servir, on va encore une fois utiliser $S^{[n,n+1]}$. D'abord, soit $Z_n = \{(x, Z) \mid x \in Z\}$ le sous-schéma fermé de $S \times S^{[n]}$ (appelé *famille universelle*) associé au morphisme identité de $S^{[n]}$, puis $\boldsymbol{\tau}_n = p_* \mathcal{O}_{Z_n}$ où p désigne la projection de $S \times S^{[n]}$ sur $S^{[n]}$. Avec p_1 et p_2 les projections de $S^{[n]} \times S^{[n+1]}$ vers $S^{[n]}$ et $S^{[n+1]}$, on note enfin $\boldsymbol{\tau}_{n,n+1}$ le fibré en droite sur $S^{[n,n+1]}$ (le *fibré tautologique de* $S^{[n,n+1]}$) égal au noyau de $p_2^* \boldsymbol{\tau}_{n+1} \to p_1^* \boldsymbol{\tau}_n$ (qui correspond à $\mathbb{C}[x,y]/J \to \mathbb{C}[x,y]/I$ au-dessus d'un point (I, J) de $S^{[n,n+1]}$).

Symétriquement on peut construire $\tau_{n+1,n} \in K^T(S^{[n+1]} \times S^{[n]})_{\mathbf{K}}$, et on pose enfin $\boldsymbol{\tau}_{n,n} = \pi^* \boldsymbol{\tau}_n$ pour π l'une des projections de $S^{[n]} \times S^{[n]}$ sur ses facteurs.

Le résultat suivant, obtenu dans [SV09], donne alors une réponse à la question de Nakajima, dans le cas du plan (on prend la convention $\tau_{i,j}^{-1} = \tau_{i,j}^*$) :

Théorème 5.2. *Soit $\mathbf{H_K}$ la sous-algèbre de $\mathbf{E_K}$ engendrée par*

$$\begin{array}{ll} \prod_n [\boldsymbol{\tau}_{n,n+1}^{\otimes l}], \quad \prod_n [\boldsymbol{\tau}_{n+1,n}^{\otimes l}], & l \in \mathbb{Z}, \\ \prod_n [\wedge^l \boldsymbol{\tau}_{n,n}], \quad \prod_n [\wedge^l \boldsymbol{\tau}_{n,n}^*], & l \in \mathbb{Z}_{>0}. \end{array}$$

Alors :

1. *$\mathbf{H_K}$ est isomorphe à une extension centrale de dimension un $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ de l'algèbre de Hecke double affine sphérique $\mathbf{S\ddot{H}}_\infty$.*
2. *En tant que $\boldsymbol{\mathcal{E}}$-module, $\mathbf{L_K}$ est isomorphe à $\mathbf{K}[x_1, x_2, \ldots]^{\mathfrak{S}_\infty}$.*

La définition de $\mathbf{H_K}$ vient du fait que les schémas $S^{[n,n+k]} = \{(Z, Z') \in S^{[n]} \times S^{[k]} \mid Z \subset Z'\}$ sont lisses seulement pour $k = 0, 1$.

Il serait malheureusement trop long de définir $\mathbf{S\ddot{H}}_\infty$ ici. Cependant cette algèbre est isomorphe à l'anneau $\mathbf{K}[x_1^{\pm 1}, x_2^{\pm 1}, \ldots, y_1^{\pm 1}, y_2^{\pm 1}, \ldots]^{\mathfrak{S}_\infty}$ en tant que $\mathbf{K}$-espace vectoriel. Donnons quelques informations sur l'action de $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ sur $\mathbf{L_K}$:

- déjà l'espace de Fock peut être identifié à $\mathbb{C}[p_1, p_2, \ldots]$, t^m agissant par

$$\begin{cases} m \dfrac{\partial}{\partial p_m} & (m > 0) \\ p_{-m} & (m < 0) \end{cases} ;$$

- ensuite on a une $\mathbb{Z}^2$-graduation sur $\boldsymbol{\mathcal{E}}$, et l'un des axes agit, de manière analogue à l'algèbre de Heisenberg, par

$$\begin{cases} -m \dfrac{q^{m/2}}{1 - t^m} \dfrac{\partial}{\partial p_m} & (m > 0) \\ \dfrac{t^{-m/2}}{1 - q^{-m}}\, p_{-m} & (m < 0) \end{cases} ,$$

  les p_m représentant ici les polynômes symétriques $(\sum_{i=0}^n x_i^m)_n$ (cette notation vient du fait que $\mathbf{K}[x_1, x_2, \ldots]^{\mathfrak{S}_\infty}$ est définie comme la limite projective des $\mathbf{K}[x_1, \ldots, x_n]^{\mathfrak{S}_n}$). L'autre axe agit par

$$\begin{cases} \Delta_m^\infty + \dfrac{1}{(1-q^m)(1-t^m)} & (m>0) \\ \Delta_{-m}^\infty - \dfrac{1}{(1-q^{-m})(1-t^{-m})} & (m<0) \end{cases},$$

où les opérateurs sont reliés aux *polynômes de Macdonald*. Par exemple Δ_1^∞ correspond à la famille des

$$\Delta_1^n = \sum_{i=1}^{n} \left(\prod_{j \neq i} \frac{t^{-1/2} p_i - t^{1/2} p_j}{p_i - p_j} \right) \partial_i \ .$$

Il serait intéressant de tenter de généraliser le théorème 5.2 aux surfaces lisses quasi-projectives quelconques, même si l'approche présentée ici impose une restriction aux surfaces munies d'une action du tore, dites *toriques*, comme par exemple $\mathbb{P}^2$ tout entier.

Références

[Bri77] J. Briançon. Description de $Hilb^n C\{x,y\}$. *Inventiones Mathematicae*, 41(1) :45–89, 1977.

[CG97] N. Chriss and V. Ginzburg. *Representation theory and complex geometry*. Birkhauser, 1997.

[ES87] G. Ellingsrud and S.A. Strømme. On the homology of the Hilbert scheme of points in the plane. *Invent. Math.*, 87 :343–352, 1987.

[FGI+05] B. Fantechi, L. Göttsche, L. Illusie, S.L. Kleiman, N. Nitsure, and A. Vistoli. *Fundamental algebraic geometry : Grothendieck's FGA explained*. American Mathematical Society, 2005.

[Gro60] A. Grothendieck. Techniques de construction et théorèmes d'existence en géométrie algébrique IV : Les schémas de Hilbert. *Séminaire Bourbaki*, 221 :61, 1960.

[Gro96] I. Grojnowski. Instantons and affine algebras I : the Hilbert scheme and vertex operators. *Mathematical Research Letters*, 3 :275–292, 1996.

[GS93] L. Göttsche and W. Soergel. Perverse Sheaves and the Cohomology of Hillbert Schemes of Smooth Algebraic Surfaces. *Mathematische Annalen*, 296(2) :235–245, 1993.

[Iar72] A. Iarrobino. Punctual Hilbert Schemes. *American Mathematical Society*, 78(5), 1972.

[Nak99] H. Nakajima. *Lectures on Hilbert schemes of points on surfaces*. Amer Mathematical Society, 1999.

[SV09] O. Schiffmann and E. Vasserot. The elliptic Hall algebra and the equivariant K-theory of the Hilbert scheme of $\mathbb{A}^2$. *Arxiv preprint arXiv :0905.2555*, 2009.