

Le théorème de Gabriel
Mémoire de maîtrise

Tristan BOZEC Victoria LEBED

Sujet proposé par Bernhard KELLER

FIMFA, ENS
Juin 2007

L'exposé qui suit repose sur une méthode très intéressante mise en place initialement par Bernstein, Gel'fand et Ponomarev dans l'article [1]. Cet article se donne pour objectif d'éclaircir certains liens apparus entre divers domaines d'algèbre linéaire. S'ensuit une méthode qui se veut unificatrice et générale en ce qui concerne la classification des objets en algèbre linéaire, et qui repose sur la théorie des carquois et la démonstration d'un théorème de Gabriel. Les conséquences directes d'une telle démarche sont d'une part l'accessibilité de l'article qui ne suppose presque aucun prérequis, si ce n'est les connaissances de base d'algèbre linéaire, d'autre part la clarté quant aux résultats obtenus qui pourraient pourtant paraître étonnants sous une différente approche. Si la trame de l'exposé est basée sur cet article, nous nous sommes aussi appuyés sur un article de Gabriel (voir [2]) justement pour rajouter des remarques, des exemples ou même certaines notions fondamentales dans l'étude des carquois. Bien sûr, nous renvoyons à la bibliographie pour la démonstration des quelques résultats utiles cités sans preuve dans notre présentation.

Nous remercions Bernhard Keller pour l'intérêt et la portée de ce sujet d'algèbre, la diversité des articles proposés, et pour son aide dans la rédaction du mémoire.

Table des matières

1	L'énoncé et illustrations	4
1.1	Le carquois et ses représentations	4
1.2	Théorème principal	7
1.3	L'algèbre du carquois	8
1.4	Exemples	10
2	Carquois et foncteurs	14
2.1	Foncteurs basculants	14
2.2	Foncteurs de Coxeter	17
3	La forme de Tits et le groupe de Weyl	20
3.1	La forme quadratique de Tits	20
3.2	Le groupe de Weyl et le système de racines	24
3.3	Les transformations de Coxeter	26
4	Démonstrations dans le cas défini positif	28
4.1	La preuve due à Tits de la première implication	28
4.2	La seconde implication suivant la méthode de Bernstein, Gel'fand et Ponomarev	28
5	Remarques	31
5.1	Une autre preuve	31
5.2	Qu'est-ce qui se passe quand la forme de Tits n'est pas positive ?	31
5.3	Systèmes de racines et diagrammes de Dynkin	34
6	Conclusion	38

1 L'énoncé et illustrations

1.1 Le carquois et ses représentations

On se donne un graphe G fini et connexe constitué d'un ensemble de sommets G_0 et d'un ensemble d'arêtes G_1 . La distinction d'un départ $d(l) \in G_0$ et d'un but $b(l) \in G_0$ pour l'arête l en fait une flèche et définit une orientation Λ de notre graphe et ainsi un *carquois* (G, Λ) . Si l'on veut, on peut voir un carquois comme une "catégorie sans composition des flèches".

Définition 1.1. Une *représentation du carquois* est la donnée d'un espace vectoriel V_p de dimension finie sur un corps fixé k pour chaque sommet p de G_0 , ainsi que d'une application linéaire $V_l : V_{d(l)} \rightarrow V_{b(l)}$ pour chaque flèche l de G_1 . On notera V une telle donnée.

Définition 1.2. 1. Soit (G, Λ) un carquois. Soient ensuite V et W deux représentations de (G, Λ) . Un *morphisme* $\phi : V \rightarrow W$ est la donnée d'une famille d'applications linéaires

$$\phi_p : V_p \rightarrow W_p, \quad p \in G_0$$

telle que, pour toute flèche l , le carré

$$\begin{array}{ccc} & V_l & \\ V_{d(l)} & \longrightarrow & V_{b(l)} \\ \phi_{d(l)} \downarrow & & \downarrow \phi_{b(l)} \\ W_{d(l)} & \xrightarrow{W_l} & W_{b(l)} \end{array}$$

commute. On note $\mathcal{L}(G, \Lambda)$ la *catégorie des représentations* de (G, Λ) ainsi définie.

2. On définit dans $\mathcal{L}(G, \Lambda)$ la somme directe de deux éléments V et W par $V \oplus W = (V_p \oplus W_p, V_l \oplus W_l)_{p \in G_0, l \in G_1}$ et on dit qu'un objet non nul de $\mathcal{L}(G, \Lambda)$ est *indécomposable* s'il ne peut s'écrire comme somme directe de deux objets non nuls.
3. Pour chaque sommet p de G_0 , on définit la *représentation simple* L_p associée à p par

$$(L_p)_e = \begin{cases} k & \text{si } e = p, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

pour tout sommet e de G_0 et par

$$(L_p)_l = 0$$

pour toute flèche l de G_1 .

Remarque 1.3. La bijection réciproque d'une application linéaire étant toujours linéaire, les isomorphismes de la catégorie $\mathcal{L}(G, \Lambda)$ sont les morphismes ϕ tels que pour tout p on ait ϕ_p bijective.

Remarque 1.4. Notons que si l'on considère la simplicité au sens des modules, les L_p ne sont pas les seules à être simples comme en témoigne la représentation de



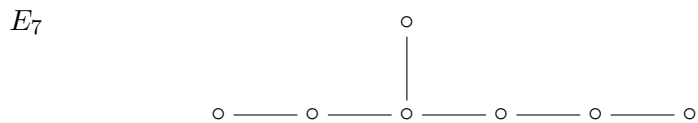
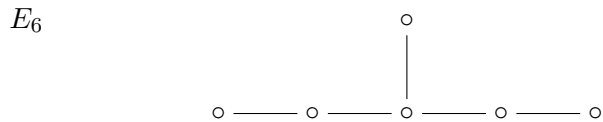
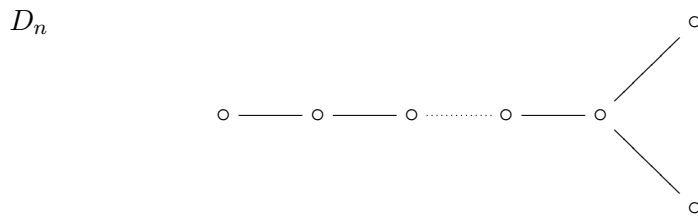
qui associe k au seul sommet et la multiplication par n'importe quel scalaire non nul λ à la seule flèche.

On montre par ailleurs facilement par récurrence sur $\dim(\oplus_{p \in G_0} V_p)$ le théorème suivant, l'unicité pouvant être obtenue à partir du théorème de Krull-Schmidt (en voir une démonstration par exemple dans [3]) :

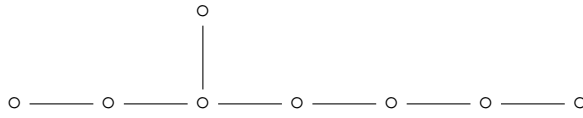
Théorème 1.5. *Tout objet de $\mathcal{L}(G, \Lambda)$ peut être décomposé en somme directe finie de sous-représentations indécomposables, et la décomposition est unique à isomorphisme près.*

La classification à isomorphisme près de toutes les représentations se ramène ainsi à celle des indécomposables. Le théorème de Gabriel donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'un carquois n'admette qu'un nombre fini de classes d'isomorphisme de représentations indécomposables.

Le fait étonnant est que cette classification va faire intervenir dans une large mesure les *diagrammes de Dynkin* ci-dessous (plus précisément, les diagrammes de Dynkin sans arêtes multiples), dans lesquels on ne tient pas compte de l'orientation des flèches (n désigne le nombre de sommets, avec $n \geq 1$ pour A_n et $n \geq 4$ pour D_n) :

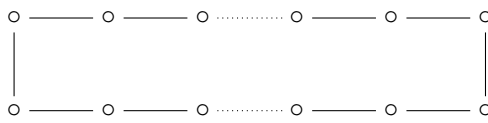


E_8

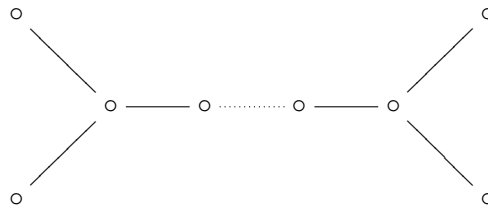


L'étude complète du théorème de Gabriel fait intervenir d'autres diagrammes, extensions des diagrammes précédents, que nous évoquerons aussi par la suite (les graphes \tilde{A}_n et \tilde{D}_n ont $n + 1$ sommets, avec $n \geq 0$ pour \tilde{A}_n et $n \geq 4$ pour \tilde{D}_n) :

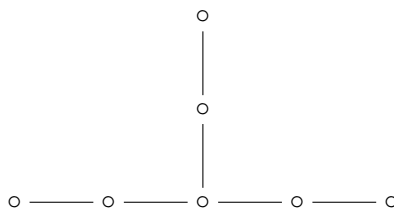
\tilde{A}_n



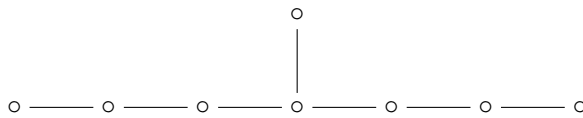
\tilde{D}_n



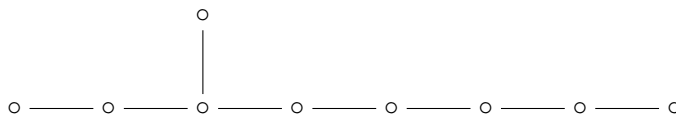
\tilde{E}_6



\tilde{E}_7



\tilde{E}_8



Plus généralement, de nombreux problèmes d'algèbre linéaire peuvent être formulés en termes de carquois. Voilà quelques exemples :

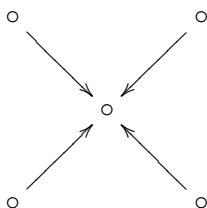
1. La classification des morphismes $V_1 \rightarrow V_2$ entre deux espaces vectoriels (à changement de base dans V_1 et V_2 près) est équivalente à celle des représentations de A_2 muni de n'importe quelle orientation.
2. La classification des endomorphismes d'un espace vectoriel est équivalente à celle des représentations du carquois à un sommet et une boucle

(le carquois de graphe sous-jacent \tilde{A}_0).

3. La classification des couples de morphismes entre deux espaces vectoriels est équivalente à la celle des représentations du carquois de Kronecker (de graphe sous-jacent \tilde{A}_1) :



4. Un autre problème très pratique repose sur ce carquois (de graphe sous-jacent \tilde{D}_4) :



qui permet à nouveau une classification intéressante des endomorphismes f d'un espace vectoriel V si l'on considère $V \oplus V$ pour le point central et ses sous-espaces $V \oplus 0$, $0 \oplus V$, $\text{Im} \begin{bmatrix} 1_V \\ 1_V \end{bmatrix}$ (la diagonale) et $\text{Im} \begin{bmatrix} 1_V \\ f \end{bmatrix}$ (le graphe de f) pour les points périphériques. Il permet aussi de classer les quadruplets de sous-espaces d'un espace donné : par exemple les classes d'isomorphisme des représentations indécomposables de \tilde{D}_4 de vecteur dimension $1_1^2 1_1$ (les quadruplets de droites de k^2) sont en bijection avec $\mathbb{P}^1(k)$. En effet on peut toujours, pour trois droites distinctes, trouver une base de k^2 telle que dans cette base les vecteurs $(1, 0)$, $(0, 1)$ et $(1, 1)$ soient directeurs des droites considérées.

1.2 Théorème principal

On considère un carquois $C = (G, \Lambda)$.

Pour une représentation V de C , on note $\overline{\dim} V = (\dim V_p)_{p \in G_0}$.

Définition 1.6. On introduit la forme quadratique de Tits \mathcal{B} du carquois C sur l'espace des vecteurs rationnels $\bar{x} = (x_p)_{p \in G_0}$ définie par

$$\mathcal{B}(\bar{x}) = \sum_{p \in G_0} x_p^2 - \sum_{l \in G_1} x_{d(l)} x_{b(l)}. \quad (1)$$

Théorème 1.7 (Gabriel, 1972, [4]). *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. le carquois C n'admet qu'un nombre fini de classes d'isomorphisme de représentations indécomposables ;

2. sa forme quadratique de Tits est définie positive ;

3. son graphe sous-jacent G est isomorphe à A_n, D_n, E_6, E_7 ou E_8 .

De plus, si c'est le cas, alors la fonction $\overline{\dim}$ induit une bijection de l'ensemble des classes de représentations indécomposables sur l'ensemble des solutions entières positives de l'équation $\mathcal{B}(\overline{x}) = 1$.

Il faut remarquer que l'on caractérise les représentations indécomposables d'un carquois en fonction de son graphe sous-jacent G tout en "oubliant" son orientation Λ .

On peut aussi obtenir des informations sur les représentations indécomposables de C dans le cas où \mathcal{B} est positive non définie.

Théorème 1.8. *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. la forme quadratique de Tits de C est positive non définie ;

2. le graphe sous-jacent G est isomorphe à $\tilde{A}_n, \tilde{D}_n, \tilde{E}_6, \tilde{E}_7$ ou \tilde{E}_8 .

De plus, si c'est le cas, alors $\mathcal{B}(\overline{\dim} V) \in \{0, 1\}$ pour toute représentation indécomposable, et

- si $\mathcal{B}(\overline{x}) = 1, \overline{x} \in \mathbb{N}^{|G_0|}$, alors il y a une et une seule représentation indécomposable V (à isomorphisme près) avec $\overline{\dim} V = \overline{x}$;
- si $\mathcal{B}(\overline{x}) = 0, \overline{x} \in \mathbb{N}^{|G_0|} \setminus \{0\}$, alors il y a une infinité de classes de représentations indécomposables V avec $\overline{\dim} V = \overline{x}$, du moins sur un corps k infini.

Ici nous ne démontrons que la première assertion du théorème. Pour le reste on renvoie le lecteur aux articles de Nazarova [5] et Donovan-Freislich [6]. Par contre on propose l'étude détaillée d'un exemple (le carquois cyclique \tilde{A}_n du graphe sous-jacent \tilde{A}_n).

1.3 L'algèbre du carquois

Montrons maintenant comment interpréter les représentations d'un carquois en termes de modules sur une certaine algèbre.

On pose $P = k^{G_0}$ l'algèbre des fonctions $G_0 \rightarrow k$, et on munit $F = k^{G_1}$ d'une structure de (P, P) -bimodule en posant

$$(\lambda f)(l) = \lambda(d)f(l),$$

$$(f\lambda)(l) = \lambda(b)f(l)$$

pour tous $f \in F, \lambda \in P$ et toute flèche $l : d \rightarrow b$.

Définition 1.9. *L'algèbre du carquois C est l'algèbre tensorielle*

$$k[C] = \bigoplus_{n=0}^{\infty} F^{\otimes_P n} = P \oplus F \oplus (F \otimes_P F) \oplus \dots$$

de (P, P) -bimodule F .

À toute représentation V de C , nous associons le module $\Pi(V) = \prod_{p \in G_0} V(p)$ sur $k[C]$ tel que

$$\begin{aligned} v\lambda &= (\lambda(p)v(p))_{p \in G_0}, \\ vf &= \left(\sum_{l: d \rightarrow p} f(l)V_l(v(d)) \right)_{p \in G_0} \end{aligned}$$

pour tous $v \in \Pi(V)$, $f \in F$ et $\lambda \in P$.

Un petit calcul montre que $v(f\lambda \otimes g) = v(f \otimes \lambda g)$ pour tous $v \in \Pi(V)$, $f, g \in F$ et $\lambda \in P$, ce qui justifie la définition de ce module.

Dans l'autre sens, prenons un module M sur $k[C]$ de dimension finie sur k . Pour chaque $p \in G_0$ introduisons la "fonction caractéristique" $\lambda_p \in P$ de p telle que $\lambda_p(p) = 1$ et $\lambda_p(q) = 0$ si $q \neq p$. De la même façon, introduisons la "fonction caractéristique" $f_l \in F$ de $l \in G_1$ telle que $f_l(l) = 1$ et $f_l(m) = 0$ si $m \neq l$.

Pour $p \in G_0$ posons

$$V(p) = \{v\lambda_p : v \in M\}.$$

Manifestement c'est un k -espace vectoriel de dimension finie.

Puis, pour toute flèche $l : d \rightarrow b$ et tout élément $v\lambda_d$ de $V(d)$ posons

$$V_l(v\lambda_d) = vf_l.$$

On a $vf_l = v(f_l\lambda_b) = (vf_l)\lambda_b \in V(b)$, donc on dispose effectivement d'une application $V_l : V(d) \rightarrow V(b)$, qui est de plus k -linéaire.

Vérifions que l'on a

$$M = \bigoplus_{p \in G_0} V(p). \quad (2)$$

1. Soient $p, q \in G_0$ deux sommets distincts. Pour un $v \in V(p) \cap V(q)$ on a $v = u\lambda_p = w\lambda_q$, $u, w \in M$, donc

$$\begin{aligned} v &= u\lambda_p = u(\lambda_p\lambda_p) = (u\lambda_p)\lambda_p \\ &= (w\lambda_q)\lambda_p = w(\lambda_q\lambda_p) = 0. \end{aligned}$$

Ainsi $V(p) \cap V(q) = 0$.

2. On observe que $\sum_{p \in G_0} \lambda_p = 1_{k[C]}$, donc chaque $v \in M$ s'écrit sous la forme

$$v = v \sum_{p \in G_0} \lambda_p = \sum_{p \in G_0} (v\lambda_p) \in \bigoplus_{p \in G_0} V(p),$$

d'où (2).

En regardant la multiplication de M par les éléments de $k[C]$, on voit que l'on a obtenu une représentation V de C avec $\Pi(V) = M$. Puis on vérifie que l'on a construit en fait l'application inverse de Π , et que Π s'étend d'une façon naturelle en un foncteur de la catégorie des représentations k -linéaires

finies de C sur celle des modules sur $k[C]$ de k -dimension finie. En plus, ce foncteur est un isomorphisme.

On résume :

Proposition 1.10. *La catégorie des représentations k -linéaires finies de C et celle des modules sur $k[C]$ de k -dimension finie sont équivalentes.*

Remarque 1.11. L'algèbre du carquois introduite ci-dessus coïncide en fait avec l'algèbre des chemins étudiée souvent dans ce contexte là.

1.4 Exemples

1. Étudions le graphe A_n muni de l'orientation suivante :

$$\begin{array}{ccccccc} n & & n-1 & & 2 & & 1 \\ \circ & \rightarrow & \circ & \cdots & \circ & \rightarrow & \circ \end{array}$$

Ici la forme de Tits est

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(\bar{x}) &= \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1} \\ &= \frac{1}{2}(x_1^2 + x_n^2) + \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{n-1} (x_i - x_{i+1})^2 \right). \end{aligned}$$

Elle est donc bien définie positive et pour $\bar{m} \in \mathbb{N}^n \setminus \{\bar{0}\}$ on a $\mathcal{B}(\bar{m}) = 1$ si et seulement si il existe $n \geq j \geq i \geq 1$ tels que $m_k = 1$ si $j \geq k \geq i$ et $m_k = 0$ sinon. On en déduit les espaces figurant dans les représentations indécomposables, les applications liant les espaces non nuls (si $j - i \geq 1$) étant nécessairement inversibles par indécomposabilité. Par le théorème 1.7, les représentations indécomposables sont donc toutes isomorphes à une représentation du type $L_{i,j}$ (pour $n \geq j \geq i \geq 1$, k étant le corps de référence) contenant la suite suivante complétée par des zéros si $j - i < n - 1$:

$$\begin{array}{ccccccc} k & id & k & & k & id & k \\ \circ & \rightarrow & \circ & \cdots & \circ & \rightarrow & \circ \\ j & & j-1 & & i+1 & & i \end{array}$$

2. Considérons maintenant le cas de la boucle \tilde{A}_0 . Sa forme de Tits est la forme nulle donc le théorème 1.8 nous dit que quel que soit l'entier $n > 0$, il y a une infinité de classes de représentations indécomposables

de dimension n . En effet, ayant fixé la dimension n , on note pour tout $x \in k$

$$J(x) = \begin{pmatrix} x & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & (0) & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & x \end{pmatrix} = xI_n + N,$$

où I_n est la matrice identité de dimension n .

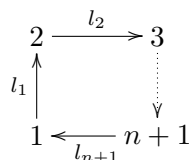
Notons que cette matrice définit bien un endomorphisme indécomposable : si $J(x)$ stabilise X et Y avec $X \oplus Y = k^n$ décomposition non triviale, alors X et Y sont laissés stables par $N = J(x) - xI_n$ mais N nilpotent induit deux endomorphismes nilpotents sur X et Y , tous deux donc de noyau non nul ce qui impliquerait que $1 = \dim(\ker N) \geq 2$ ce qui est faux : on a bien X ou Y nul.

Ensuite, si $J(x)$ est isomorphe à $J(y)$, alors il existe $P \in GL_n(k)$ avec

$$J(x) = PJ(y)P^{-1} = P(yI_n + N)P^{-1} = yI_n + PNP^{-1},$$

donc $J(x - y) = PNP^{-1}$. Or la matrice de droite est nilpotente (car N l'est), d'où $x = y$, ce qui permet de vérifier l'existence d'une infinité de classes de représentations indécomposables de dimension n , supposant k infini.

3. Enfin regardons le carquois cyclique \widehat{A}_n de graphe sous-jacent \widetilde{A}_n , $n \geq 1$:



Ici la forme de Tits

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(\bar{x}) &= \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 - \sum_{i=1}^n x_i x_{i+1} - x_{n+1} x_1 \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n (x_i - x_{i+1})^2 + (x_1 - x_{n+1})^2 \right) \end{aligned}$$

est positive non définie. Pour $\bar{m} \in \mathbb{N}^{n+1} \setminus \{\bar{0}\}$ on a $\mathcal{B}(\bar{m}) = 1$ si et seulement s'il existe $n+1 \geq j \geq i \geq 1$ et un $s \in \mathbb{N}$ tels que : soit $m_k = s$ si $j \geq k \geq i$ et $m_k = s+1$ sinon, soit $m_k = s+1$ si $j \geq k \geq i$ et $m_k = s$ sinon. Puis, $\mathcal{B}(\bar{m}) = 0$ est équivalent à $m_1 = \dots = m_{n+1}$.

En considerant la sous-représentation V' de V telle que

$$V'_i = \cup_{k=0}^{\infty} \ker((f_{n+1} \circ \dots \circ f_1)^k \circ f_{n+1} \circ \dots \circ f_i), \quad i = \overline{1, n+1},$$

où f_i désigne V_{l_i} , et en choisissant de bons supplémentaires des k -espaces vectoriels V'_i , on voit que la catégorie $\text{mod}(k[\widehat{A}_n])$, où $\text{mod}(A)$ désigne la catégorie des A -modules de k -dimension finie, est le produit de deux sous-catégories :

- (a) La première est formée par les représentations V avec f_i bijective pour tout $i = \overline{1, n+1}$.

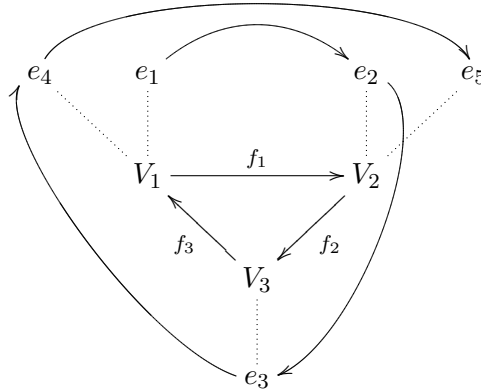
Cette catégorie est équivalente à $\text{mod}(k[T, T^{-1}])$ au moyen du foncteur qui à un $k[T, T^{-1}]$ -module M associe la représentation V avec $V_i = M$, $i = \overline{1, n+1}$, $f_i = Id$, $i = \overline{1, n}$, et f_{n+1} la multiplication par T . Si notre corps de base k est algébriquement clos, alors dans une base bien choisie la matrice de f_{n+1} s'écrit sous la forme de Jordan, et le cas d'une représentation indécomposable correspond exactement à la matrice $J(x)$, $x \neq 0$. De plus, les représentations de ce type avec les matrices $J(x)$, $J(y)$, $x \neq y$ ne sont pas isomorphes (voir l'exemple pour \widetilde{A}_0), donc on obtient un nombre infini de représentations non isomorphes dans le cas $\dim V_1 = \dots = \dim V_{n+1}$, ce qu'affirme le théorème 1.8.

- (b) Nous désignerons la seconde catégorie constituée des représentations avec $f_{n+1} \circ \dots \circ f_1$ nilpotente par \widetilde{U}_n (U pour unisériel). Ses objets indécomposables sont de la forme $V^{s,l}$ avec $s = \overline{0, n}$, $l \in \mathbb{N}^*$ et

$$V_i^{s,l} = \bigoplus_{1 \leq j \leq l, i-j \equiv s \pmod{n+1}} ke_j,$$

$$f_i^{s,l}(e_j) = \begin{cases} e_{j+1} & \text{si } j \neq l, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Cette définition est beaucoup plus claire sur le dessin (ici on prend $n = 2$, $l = 5$, $s = 0$) :



On voit un “serpent” sur 5 points.

Pour s’assurer que ces représentations indécomposables sont les seules possibles, il suffit de considérer dans V la plus longue chaîne d’éléments non nuls a_k, a_{k+1}, \dots, a_l avec $a_i \in V_i$, $i = \overline{k, l}$ et $f_i(a_i) = a_{i+1}$, $i = \overline{k, l-1}$, où les indices des f_i et V_i sont pris modulo $n+1$.

D’après le théorème 1.8, on a obtenu toutes les représentations indécomposables V de \widehat{A}_n avec $\mathcal{B}(\overline{\dim V}) = 1$ (à isomorphisme près), car on a obtenu toutes les valeurs de $\overline{\dim V}$ correspondantes. De plus, le cas $n+1|l$ donne de nouvelles représentations avec $\mathcal{B}(\overline{\dim V}) = 0$.

2 Carquois et foncteurs

On introduit dans cette partie quelques foncteurs dont les propriétés vont s'avérer très intéressantes vis à vis des représentations indécomposables et de leur classification à isomorphisme près mais aussi permettre un rapprochement avec la théorie des systèmes de racines qui sera évoquée plus tard. L'idée est en effet d'introduire des foncteurs dans un cadre propre à la théorie des représentations de carquois mais dont l'étude va clairement faire apparaître des passerelles avec une autre théorie.

2.1 Foncteurs basculants

On considère un carquois $C = (G, \Lambda)$.

Définition 2.1. 1. Soit $d \in G_0$. On notera G^d la partie de G_1 constituée des flèches ayant une extrémité égale à d et, si Λ est une orientation de G , celle obtenue en inversant le sens des flèches de G^d est notée $\sigma_d \Lambda$. Un sommet d est dit *(-)-accessible* ou *source* si $b(l) \neq d$ pour tout $l \in G^d$, et de même b est dit *(+)-accessible* ou *puits* si $d(l) \neq b$ pour tout $l \in G^b$.

2. Pour un puits b , on définit le foncteur F_b^+ de $\mathcal{L}(G, \Lambda)$ dans $\mathcal{L}(G, \sigma_b \Lambda)$ par $F_b^+(V) = W$, où :
 - $W_c = V_c$ si $c \neq b$,
 - $W_b = \ker(\pi_b)$ où $\pi_b : \bigoplus_{l \in G^b} V_{d(l)} \rightarrow V_b$ est l'application linéaire de composantes les V_l , $l \in G^b$,
 - $W_l = V_l$ si $l \in G_1 \setminus G^b$,
 - W_l est la composée naturelle $W_b \hookrightarrow \bigoplus_{l' \in G^b} V_{d(l')} \twoheadrightarrow V_{d(l)}$ si $l \in G^b$.
3. De même, pour une source d , on définit le foncteur F_d^- de $\mathcal{L}(G, \Lambda)$ dans $\mathcal{L}(G, \sigma_d \Lambda)$ par $F_d^-(V) = W$, où :
 - $W_c = V_c$ si $c \neq d$,
 - $W_d = (\bigoplus_{l \in G^d} V_{b(l)}) / (\text{Im } \sigma_d) = \text{cok}(\sigma_d)$ où $\sigma_d : V_d \rightarrow \bigoplus_{l \in G^d} V_{b(l)}$ est l'application linéaire de composantes les V_l , $l \in G^d$,
 - $W_l = V_l$ si $l \in G_1 \setminus G^d$,
 - W_l est la composée naturelle $V_{b(l)} \hookrightarrow \bigoplus_{l' \in G^d} V_{b(l')} \twoheadrightarrow W_d$ si $l \in G^d$.

$$\begin{array}{ccccccc}
 V_{d(l_1)} & & & & V_{d(l_1)} & & \\
 V_{l_1} \downarrow & \cdots & & F_b^+ & W_{l_1} \uparrow & \cdots & \\
 V_b & \leftarrow & V_{d(l_k)} & \rightarrow & W_b & \rightarrow & V_{d(l_k)} \\
 & & V_{l_k} & & & & W_{l_k}
 \end{array}
 , W_b = \ker [V_{l_1} \quad \cdots \quad V_{l_k}]$$

$$\begin{array}{ccccccc}
V_{b(l_1)} & & & & V_{b(l_1)} & & \\
W_{l_1} \downarrow & \cdots & & F_d^- & V_{l_1} \uparrow & \cdots & \\
W_d & \leftarrow & V_{b(l_k)} & \leftarrow & V_d & \rightarrow & V_{b(l_k)} \\
& & W_{l_k} & & & & V_{l_k}
\end{array}, W_d = \text{cok} \begin{bmatrix} V_{l_1} \\ \vdots \\ V_{l_k} \end{bmatrix}$$

Remarque 2.2. On note que dans le deuxième point de la définition, l'application linéaire "colonne" $[W_l]_{l \in G^b}$ de W_b dans $\oplus_{l \in G^b} V_{d(l)}$ est l'injection canonique et donc que $\text{Im}[W_l]_{l \in G^b} = \ker \pi_b$. Dans le troisième point on voit que l'application linéaire "ligne" $[W_l]_{l \in G^d}$ est cette fois la surjection canonique de $\oplus_{l \in G^d} V_{b(l)}$ sur W_d et que $\ker[W_l]_{l \in G^d} = \text{Im} \sigma_d$. Ces deux points vont permettre de démontrer le théorème suivant :

Théorème 2.3. *Soit V indécomposable. On a les résultats suivants :*

1. *Si b est un puits, deux cas sont possibles :*

(a) $V \simeq L_b$ et $F_b^+(V) = 0$

(b) $F_b^+(V)$ est indécomposable, $F_b^- F_b^+(V) = V$ et on a les égalités

$$\begin{aligned}
\dim F_b^+(V)_c &= \dim V_c, \quad \forall c \neq b \\
\dim F_b^+(V)_b &= -\dim V_b + \sum_{l \in G^b} \dim V_{d(l)} \quad (3)
\end{aligned}$$

2. *Si d est une source, deux cas sont possibles :*

(a) $V \simeq L_d$ et $F_d^-(V) = 0$

(b) $F_d^-(V)$ est indécomposable, $F_d^+ F_d^-(V) = V$ et on a les égalités

$$\begin{aligned}
\dim F_d^-(V)_c &= \dim V_c, \quad \forall c \neq d \\
\dim F_d^-(V)_d &= -\dim V_d + \sum_{l \in G^d} \dim V_{b(l)} \quad (4)
\end{aligned}$$

Remarque 2.4. Souvent on écrit abusivement une égalité entre deux objets qui ne sont qu'isomorphes, comme par exemple dans l'énoncé de ce théorème où l'on devrait mettre $F_b^- F_b^+(V) \simeq V$ plutôt que $F_b^- F_b^+(V) = V$.

Démonstration. On va introduire deux morphismes grâce à la remarque 2.2.

Pour 1. : Soit

$$i_V^b : F_b^- F_b^+(V) \rightarrow V$$

défini par $(i_V^b)_c = Id$ si $c \neq b$, puis on prend pour $(i_V^b)_b$ l'injection naturelle de $(F_b^- F_b^+(V))_b = (\oplus_{l \in G^b} V_{d(l)}) / (\text{Im}[W_l]_{l \in G^b}) = (\oplus_{l \in G^b} V_{d(l)}) / \ker \pi_b$ dans V_b ($[W_l]_{l \in G^b}$ en colonne).

Pour 2. : Soit

$$p_V^d : V \rightarrow F_d^+ F_d^-(V)$$

défini par $(p_V^d)_c = Id$ si $c \neq d$ et le choix pour $(p_V^d)_d$ de la surjection $\oplus_{l \in G^d} f_l : V_d \rightarrow \text{Im} \sigma_d = \ker[W_l]_{l \in G^d} = F_d^+ F_d^-(V)_d$ ($[W_l]_{l \in G^d}$ en ligne). On énonce le lemme suivant avant d'achever la preuve :

- Lemme 2.5.** 1. Pour un sommet d et deux représentations quelconques V_1 et V_2 , on a $F_d^\pm(V_1 \oplus V_2) \simeq F_d^\pm(V_1) \oplus F_d^\pm(V_2)$.
2. Les morphismes p_V^d et i_V^b sont respectivement surjectif et injectif.
3. On a les formules 3 (resp. 4) si p_V^d (resp. i_V^b) est un isomorphisme.
4. On a $(\ker p_V^d)_c = 0 \ \forall c \neq d$ et $(V/\text{Im } i_V^b)_c = 0 \ \forall c \neq b$.
5. Si V est du type $F_d^+(W)$ (resp. $F_b^-(W)$) alors p_V^d (resp. i_V^b) est un isomorphisme.
6. $V \simeq F_b^- F_b^+(V) \oplus (V/\text{Im } i_V^b)$ et $V \simeq F_d^+ F_d^-(V) \oplus \ker p_V^d$.

Démonstration. Les cinq premiers points ne sont pas compliqués. Pour le sixième, il suffit de trouver une section pour la suite exacte suivante :

$$0 \rightarrow \text{Im}(i_V^b)_b \rightarrow V_b \rightarrow (V/\text{Im } i_V^b)_b \rightarrow 0$$

On en construit une grâce au morphisme induit par n'importe quelle projection de V_b sur un supplémentaire de $\text{Im}(i_V^b)_b$. La suite :

$$0 \rightarrow \ker(p_V^d)_d \rightarrow V_d \rightarrow F_d^+ F_d^-(V)_d \rightarrow 0$$

qui est exacte car p_V^d est surjectif, se scinde de la même manière. \square

Pour finir la preuve du théorème, on traite par exemple le premier cas, la preuve étant similaire pour le deuxième. D'après le point 6. du lemme, on peut distinguer deux cas si V est indécomposable. Soit $V \simeq (V/\text{Im } i_V^b)$ et donc $V \simeq L_b$, soit $(V/\text{Im } i_V^b) = 0$ et donc d'après 3., on a les formules 3. Reste à montrer que $F_b^+(V)$ est indécomposable : si $F_b^+(V) = W_1 \oplus W_2$, d'après 1. on a $V = F_b^-(W_1) \oplus F_b^-(W_2)$ donc par exemple $F_b^-(W_2) = 0$. Mais d'après 5., avec $W = F_b^+(V)$, p_W^b est un isomorphisme, et comme (par construction du morphisme p_W^b) $p_W^b(W_2) \subseteq F_b^+ F_b^-(W_2) = 0$, on a donc bien $W_2 = 0$, ce qui permet de conclure. \square

Définition 2.6. On dit d'une suite de points (d_1, \dots, d_k) qu'elle est $(+)$ -accessible selon Γ si d_1 est $(+)$ -accessible selon Λ , d_2 est $(+)$ -accessible selon $\sigma_{d_1} \Lambda$, et ainsi de suite. On définit de même une suite de points $(-)$ -accessible.

Corollaire 2.7. Soit (d_1, \dots, d_k) une suite $(+)$ -accessible du carquois. On a les deux résultats suivants :

- Pour $1 \leq i \leq k$, considérant L_{d_i} comme objet de $\mathcal{L}(G, \sigma_{d_{i-1}} \dots \sigma_{d_1} \Lambda)$, on a $F_{d_1}^- \dots F_{d_{i-1}}^-(L_{d_i})$ soit nul, soit indécomposable dans $\mathcal{L}(G, \Lambda)$.
- Si l'objet $V \in \mathcal{L}(G, \Lambda)$ est indécomposable et vérifie $F_{d_k}^+ \dots F_{d_1}^+(V) = 0$, alors pour un certain i on a $V \simeq F_{d_1}^- \dots F_{d_{i-1}}^-(L_{d_i})$.

2.2 Foncteurs de Coxeter

Le théorème 2.3 et son corollaire 2.7 sont très puissants et vont permettre d'établir directement plusieurs résultats à propos des carquois dirigés que nous définissons ci-dessous :

Définition 2.8. Un carquois (G, Λ) est *dirigé* s'il ne contient pas de circuit fermé : si $d \in G_0$ et $\{l_1, \dots, l_k\} \subseteq G_1$ vérifient $d(l_1) = d$ et $b(l_i) = d(l_{i+1})$ pour $1 \leq i < k$, alors $b(l_k) \neq d$.

Le théorème qui suit permet dans un premier temps de relier les classifications d'objets indécomposables pour diverses orientations :

Théorème 2.9. *Soit G un graphe ne contenant pas de cycle, c'est-à-dire que tout carquois de graphe sous-jacent G est dirigé, et soient Λ, Λ' deux orientations.*

1. *Il existe une suite (d_1, \dots, d_k) (+)-accessible selon Λ telle que*

$$\sigma_{d_k} \dots \sigma_{d_1} \Lambda = \Lambda'.$$

2. *Soient \mathcal{M} et \mathcal{M}' les classes d'isomorphisme de représentations indécomposables de $\mathcal{L}(G, \Lambda)$ et $\mathcal{L}(G, \Lambda')$, $\widetilde{\mathcal{M}} \subseteq \mathcal{M}$ (resp. $\widetilde{\mathcal{M}}' \subseteq \mathcal{M}'$) les objets de la forme $F_{d_1}^- \dots F_{d_{i-1}}^- (L_{d_i})$ (resp. $F_{d_k}^+ \dots F_{d_{i+1}}^+ (L_{d_i})$) pour $1 \leq i \leq k$. Alors le foncteur $F_{d_k}^+ \dots F_{d_1}^+$ réalise une bijection entre $\mathcal{M} \setminus \widetilde{\mathcal{M}}$ et $\mathcal{M}' \setminus \widetilde{\mathcal{M}}'$.*

Démonstration. Le deuxième point découle du premier et du corollaire 2.7. Si l'on raisonne par récurrence, il suffit de prouver le résultat pour Λ et Λ' différents sur une seule flèche l . Comme G ne comprend pas de cycle, $G \setminus l$ se scinde en deux : soit G' la composante contenant $b(l)$ (en accord avec Λ). Convainquons nous que l'on peut numéroter les points de G' de sorte que quelle que soit l' dans G'_1 on ait $d(l')$ d'indice plus grand que celui de $b(l')$: il suffit d'attribuer une hauteur entière à chaque point en partant de zéro pour $b(l)$ puis en ajoutant ou retranchant 1 selon que l'on remonte ou pas une flèche, un tel processus est applicable car le graphe est sans cycle et donc on affecte bien une seule valeur à chaque point. Les points sont alors distribués sur plusieurs "étages", chaque étage correspondant à une certaine hauteur : on indexe finalement les points en partant de l'étage le plus bas pour finir au plus haut, l'ordre de l'indexation n'ayant pas d'importance au sein de chaque étage. On voit ensuite facilement que cette nouvelle indexation convient pour démontrer le théorème. \square

Remarque 2.10. Plus généralement, si l'on manipule un carquois dirigé, on peut encore indexer ses points de telle sorte que pour toute flèche, l'indice du sommet de départ soit plus grand que celui du sommet d'arrivée. Ce résultat se montre par récurrence sur le nombre de sommets dans le graphe sous-jacent.

Lemme-définition 2.11. Soit (G, Λ) un graphe dirigé. On numérote ses points d_1, \dots, d_n de telle sorte que pour chacune de ses flèches l'indice du point de départ est plus grand que celui du point d'arrivée.

1. Les suites (d_1, \dots, d_n) et (d_n, \dots, d_1) sont respectivement (+)-accessible et (-)-accessible.
2. Les foncteurs $F_{d_n}^+ \dots F_{d_1}^+$ et $F_{d_1}^- \dots F_{d_n}^-$ envoient $\mathcal{L}(G, \Lambda)$ dans elle-même.
3. Ces foncteurs ne dépendent pas de la numérotation adoptée : on pose donc $\Phi^+ = F_{d_n}^+ \dots F_{d_1}^+$ et $\Phi^- = F_{d_1}^- \dots F_{d_n}^-$ que l'on appelle *foncteurs de Coxeter*.

Démonstration. Soit d_1, \dots, d_n et d'_1, \dots, d'_n sont deux numérotations convenables et m l'indice vérifiant $d_1 = d'_m$. Si d_1 était relié par $l \in G_1$ à un certain d'_i pour $i < m$, on aurait $d(l) = d'_m = d_1$ puisque $i < m$, mais c'est impossible d'après la propriété requise pour la numérotation d_1, \dots, d_n . Mais alors F_{d_1} commute avec les $F_{d'_i}$, $i < m$ et $F_{d'_m}^+ \dots F_{d'_1}^+ = F_{d'_m-1}^+ \dots F_{d'_1}^+ F_{d_1}^+$. Le même argument permet de montrer par récurrence que $F_{d'_n}^+ \dots F_{d'_1}^+ = F_{d_n}^+ \dots F_{d_1}^+$. On peut procéder de la même manière avec Φ^- . \square

Remarque 2.12. Il peut être très pratique d'avoir un foncteur qui envoie $\mathcal{L}(G, \Lambda)$ dans elle-même, notamment si l'on veut passer d'une représentation indécomposable d'un carquois à une autre : si l'on reprend l'exemple de A_n , on remarque en appliquant $F_{d_1}^+$ puis $F_{d_2}^+$ jusqu'à $F_{d_n}^+$ à $L_{i,j}$ que $\Phi^+(L_{i,j}) = \begin{cases} L_{i-1,j-1}, & \text{si } i > 1 \\ 0, & \text{si } i = 1 \end{cases}$. On peut bien sûr faire une remarque analogue en appliquant Φ^- à A_n .

Définition 2.13. Soit (G, Λ) un graphe dirigé. Un objet $V \in \mathcal{L}(G, \Lambda)$ est dit (+)-(*resp.* (-)-)irrégulier si pour un certain k on a $(\Phi^+)^k V = 0$ (*resp.* $(\Phi^-)^k V = 0$). Il est dit régulier si quelque soit k on a $V \simeq (\Phi^-)^k (\Phi^+)^k V \simeq (\Phi^+)^k (\Phi^-)^k V$.

On conclut avec le théorème suivant qui permet une classification plus pointue des indécomposables en distinguant des objets "simples" d'objets plus "compliqués" :

Théorème 2.14. On a les résultats suivants pour (G, Λ) graphe dirigé :

1. Tout objet indécomposable de $\mathcal{L}(G, \Lambda)$ est soit régulier, soit irrégulier.
2. Soit d_1, \dots, d_n une indexation de G_0 telle que l'existence d'une flèche $d_i \rightarrow d_j$ implique $i > j$. Pour $1 \leq i \leq n$, on pose $V_i = F_{d_1}^- \dots F_{d_{i-1}}^- (L_{d_i})$ et $V'_i = F_{d_n}^+ \dots F_{d_{i+1}}^+ (L_{d_i})$ éléments de $\mathcal{L}(G, \Lambda)$. On a pour $V \in \mathcal{L}(G, \Lambda)$ indécomposable :

$$\Phi^+(V) = 0 \Leftrightarrow \exists i, V \simeq V_i \quad \text{et} \quad \Phi^-(V) = 0 \Leftrightarrow \exists i, V \simeq V'_i$$

3. Tout objet indécomposable (+)-(resp. (-))-irrégulier est de la forme $(\Phi^-)^k V_i$ (resp. $(\Phi^+)^k V'_i$).

Remarque 2.15. La remarque précédente nous montre par exemple que toutes les représentations indécomposables de A_n (toujours orienté de la même manière) sont (+)-irrégulières.

3 La forme de Tits et le groupe de Weyl

3.1 La forme quadratique de Tits

Soit G un graphe fini connexe d'ensemble de sommets G_0 et d'ensemble d'arêtes G_1 , vues comme couples non ordonnés d'éléments (pas nécessairement distincts) de G_0 .

On introduit l'espace linéaire \mathcal{E}_G sur \mathbb{Q} constitué des vecteurs $x = (x_\alpha)_{\alpha \in G_0}$ à coordonnées rationnelles x_α . Pour chaque $\beta \in G_0$ on définit le vecteur $\bar{\beta} \in \mathcal{E}_G$ par $\bar{\beta}_\alpha = 1$ si $\alpha = \beta$ et $\bar{\beta}_\alpha = 0$ sinon. Notons que les $\bar{\beta}$ ainsi définis forment une base de l'espace linéaire \mathcal{E}_G .

Un vecteur $x = (x_\alpha)$ est dit

- *entier* si toutes ses coordonnées x_α , $\alpha \in G_0$ sont entières ;
- *positif* (noté $x > 0$) si toutes ses coordonnées x_α , $\alpha \in G_0$ sont positives ou nulles et si $x \neq 0$;
- *négatif* (noté $x < 0$) si l'on a $-x > 0$.

Maintenant on rappelle la notion de la forme quadratique de Tits introduite auparavant et on étudie ses propriétés.

Définition 3.1. La forme quadratique de Tits \mathcal{B} est définie sur l'espace \mathcal{E}_G par

$$\mathcal{B}(x) = \sum_{\alpha \in G_0} x_\alpha^2 - \sum_{(\alpha, \beta) \in G_1} x_\alpha x_\beta, \quad (5)$$

et la forme symétrique bilinéaire \langle, \rangle correspondante s'écrit

$$\langle x, y \rangle = \sum_{\alpha \in G_0} x_\alpha y_\alpha - \frac{1}{2} \sum_{(\alpha, \beta) \in G_1} (x_\alpha y_\beta + y_\alpha x_\beta). \quad (6)$$

Cette écriture explicite donne tout de suite les propriétés élémentaires de la forme \langle, \rangle présentées dans le

Lemme 3.2. Soient $\alpha \neq \beta$ deux points distincts de G_0 . Alors

1. $\langle \bar{\alpha}, \bar{\alpha} \rangle = 1$
2. $-2\langle \bar{\alpha}, \bar{\beta} \rangle$ est le nombre d'arêtes qui joignent α et β .

Pour le théorème de Gabriel, le cas de la forme de Tits \mathcal{B} positive est particulièrement intéressant.

Théorème 3.3. La forme de Tits \mathcal{B} du graphe G est

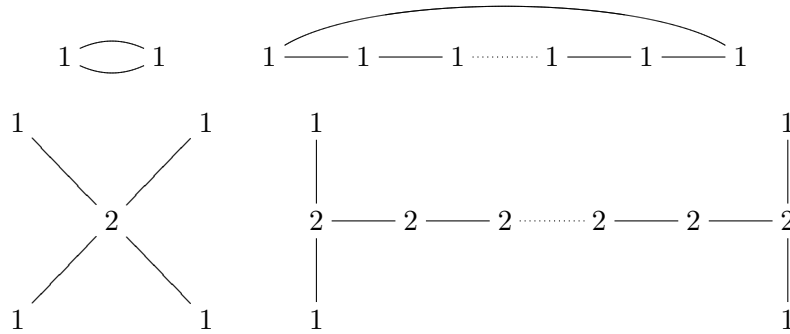
1. définie positive si et seulement si G est de la forme A_n, D_n, E_6, E_7, E_8 ;
2. positive non définie si et seulement si G est de la forme $\tilde{A}_n, \tilde{D}_n, \tilde{E}_6, \tilde{E}_7, \tilde{E}_8$.

Démonstration. Montrons d'abord que \mathcal{B} ne peut être définie positive que pour les graphes A_n, D_n, E_6, E_7, E_8 .

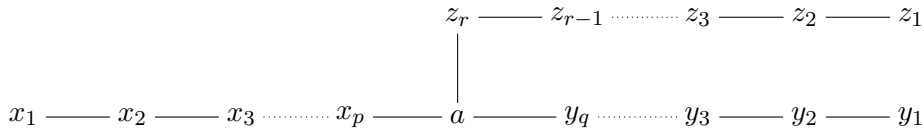
Si G contient

- soit un cycle,
- soit un sommet avec au moins 4 voisins,
- soit deux sommets avec au moins 3 voisins,

alors la forme \mathcal{B} n'est pas définie positive : si on complète les valeurs indiquées dans la figure ci-dessous par des zéros dans les autres sommets (s'il y en a), on obtient un vecteur $x \in \mathcal{E}_G$ avec $x \neq 0$ et $\mathcal{B}(x) = 0$.



Ainsi, G est forcément de la forme



avec p, q, r entiers positifs.

Pour un entier positif p on considère la forme quadratique C_p en $p + 1$ variables :

$$C_p(x_1, \dots, x_{p+1}) = -x_1x_2 - x_2x_3 - \dots - x_px_{p+1} + x_1^2 + \dots + x_p^2 + \frac{p}{2(p+1)}x_{p+1}^2.$$

En écrivant C_p sous la forme

$$C_p(x) = \sum_{i=1}^p \frac{i}{2(i+1)} \left(x_{i+1} - \frac{i+1}{i} x_i \right)^2,$$

on remarque qu'elle est positive non définie, et qu'un vecteur $x \neq 0$ tel que $C_p(x) = 0$ n'a pas de coordonnées nulles.

On place les valeurs $x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q, z_1, \dots, z_r, a$ dans les sommets de G comme indiqué dans la figure ci-dessus. On a

$$\mathcal{B}(x, y, z, a) = C_p(x_1, \dots, x_p, a) + C_q(y_1, \dots, y_q, a) + C_r(z_1, \dots, z_r, a) \\ + \left(1 - \frac{p}{2(p+1)} - \frac{q}{2(q+1)} - \frac{r}{2(r+1)}\right) a^2.$$

Manifestement, \mathcal{B} est définie positive si et seulement si

$$1 - \frac{p}{2(p+1)} - \frac{q}{2(q+1)} - \frac{r}{2(r+1)} > 0,$$

ou, de manière équivalente, si

$$A = \frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} + \frac{1}{r+1} > 1.$$

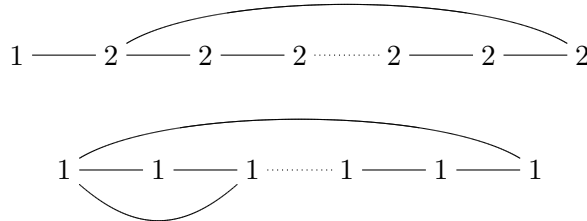
Sans perte de généralité, supposons $p \leq q \leq r$. Regardons tous les cas possibles :

p	q	r	A	les graphes correspondants
0	quelconques		> 1	A_n
1	1	quelconque	> 1	D_n
1	2	2,3,4	> 1	E_6, E_7, E_8
1	2	5	$= 1$	\tilde{E}_8
1	2	≥ 6	< 1	
1	3	3	$= 1$	\tilde{E}_7
1	3	≥ 4	< 1	
2	2	2	$= 1$	\tilde{E}_6
≥ 2	≥ 2	≥ 3	< 1	

En fait, on a aussi démontré que pour les graphes A_n, D_n, E_6, E_7, E_8 on a $A > 1$, et donc la forme de Tits correspondante est effectivement définie positive.

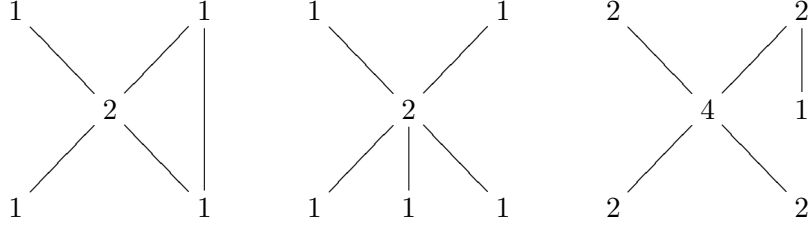
Montrons ensuite que \mathcal{B} ne peut pas être positive non définie que pour les graphes $\tilde{A}_n, \tilde{D}_n, \tilde{E}_6, \tilde{E}_7, \tilde{E}_8$.

Si le graphe G avec la forme \mathcal{B} positive contient un cycle, alors, comme le montre le dessin ci-dessous, G est précisément un cycle, i.e. de la forme \tilde{A}_n .

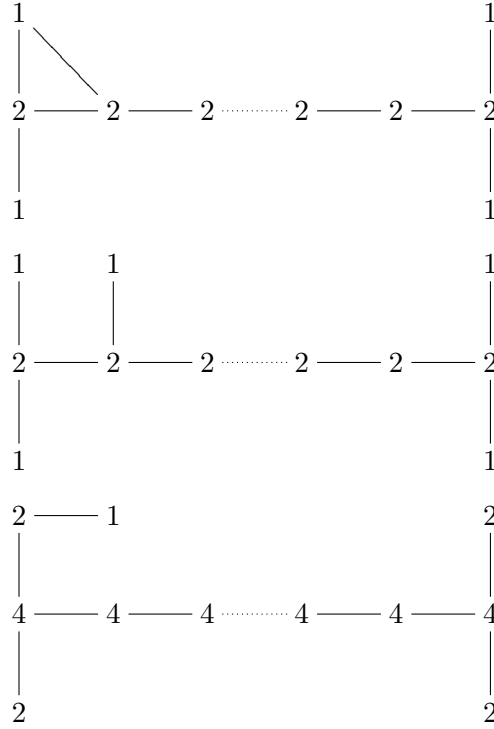


Comme avant, en complétant les valeurs par des zéros dans les autres sommets (s'il y en a), on obtient un vecteur $x \in \mathcal{E}_G$ avec $x \neq 0$ et $\mathcal{B}(x) < 0$.

Puis, si le graphe G avec la forme \mathcal{B} positive contient un sommet avec au moins 4 voisins, alors le dessin ci-dessous montre que G est de la forme \tilde{D}_n avec $n = 4$.



Il en est de même pour le graphe dont deux sommets ont au moins 3 voisins :



Dans le cas qui reste, introduisons comme avant les valeurs $x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q, z_1, \dots, z_r, a$. Une démarche analogue montre que \mathcal{B} est positive non définie si et seulement si

$$A = \frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} + \frac{1}{r+1} = 1.$$

Comme le montre la table pour les valeurs de A en fonction de p, q, r ci-dessus, $A = 1$ pour les graphes $\tilde{E}_6, \tilde{E}_7, \tilde{E}_8$ et seulement pour eux.

Il nous reste à montrer que pour les graphes \tilde{A}_n et \tilde{D}_n , la forme de Tits correspondante est effectivement positive non définie. Pour cela, écrivons-la sous une forme appropriée.

– Pour le graphe \tilde{A}_n , $n \geq 0$, on a

$$\mathcal{B}(x) = \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n+1} x_i x_{i+1} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n+1} (x_i - x_{i+1})^2.$$

(Pour simplifier l'écriture, on pose $n+2 = 1$.)

– Pour le graphe \tilde{D}_n , $n \geq 4$, on a

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(x) &= \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 - \sum_{i=2}^{n-1} x_i x_{i+1} - x_1 x_3 - x_{n-1} x_{n+1} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=3}^{n-2} (x_i - x_{i+1})^2 + \frac{1}{4} ((2x_1 - x_3)^2 + (2x_2 - x_3)^2 \\ &\quad + (2x_n - x_{n-1})^2 + (2x_{n+1} - x_{n-1})^2). \end{aligned}$$

□

3.2 Le groupe de Weyl et le système de racines

Définition 3.4. Pour $\beta \in G_0$, on appelle *symétrie de vecteur* β la transformation linéaire σ_β de \mathcal{E}_G définie par $(\sigma_\beta x)_\gamma = x_\gamma$ pour $\gamma \neq \beta$ et $(\sigma_\beta x)_\beta = -x_\beta + \sum_{(\alpha, \beta) \in G_1} x_\alpha$.

Lemme 3.5. Soit $\beta \in G_0$. Alors on a

1. $\sigma_\beta^2 = 1$;
2. pour tout $x \in \mathcal{E}_G$,

$$\sigma_\beta(x) = x - 2\langle x, \bar{\beta} \rangle \bar{\beta}$$

(pour la forme \langle, \rangle voir la définition 3.1).

Démonstration. L'assertion 1. découle facilement de la définition.

Pour 2. il suffit de remarquer que la formule 6 nous donne

$$\langle x, \bar{\beta} \rangle = x_\beta - \frac{1}{2} \sum_{(\alpha, \beta) \in G_1} x_\alpha.$$

□

Définition 3.6. On appelle *le groupe de Weyl* le groupe W des transformations linéaires de \mathcal{E}_G engendré par les σ_β , $\beta \in G_0$.

Remarque 3.7. Le lemme précédent (l'assertion 1.) montre que chaque élément du groupe de Weyl est un produit des symétries.

Étudions maintenant quelques propriétés du groupe de Weyl.

- Lemme 3.8.** 1. *Le groupe de Weyl W préserve le réseau des points à coordonnées entières de \mathcal{E}_G .*
2. *Le groupe de Weyl W préserve la forme de Tits \mathcal{B} .*
3. *Si la forme \mathcal{B} est définie positive, alors W est fini.*

Démonstration. Les assertions 1. et 2. se déduisent facilement de la définition d'une symétrie 3.4 et de la formule 5.

Pour 3. remarquons qu'un élément de W est entièrement défini par ses valeurs en les vecteurs $\bar{\beta}$, $\beta \in G_0$, puisque ces derniers forment une base de l'espace linéaire \mathcal{E}_G . D'après 1. et 2. un élément de W transforme chaque $\bar{\beta}$ en un vecteur entier x avec $\mathcal{B}(x) = \mathcal{B}(\bar{\beta})$. Or pour une forme \mathcal{B} définie positive l'équation $\mathcal{B}(x) = \mathcal{B}(\bar{\beta})$ n'a qu'un nombre fini de solutions entières. Donc il n'y a qu'un nombre fini de possibilités pour les vecteurs $w(\bar{\beta})$, $\beta \in G_0$ ($w \in W$), donc pour w , vu que G_0 est fini. \square

Définition 3.9. Les vecteurs $x = w\bar{\beta} \in \mathcal{E}_G$, $w \in W$, $\beta \in G_0$ sont appelés *les racines*. Les vecteurs $\bar{\beta}$, $\beta \in G_0$ sont appelés *les racines simples*.

- Lemme 3.10.** 1. *Si x est une racine, alors $-x$ l'est.*
2. *Supposons \mathcal{B} définie positive. Si un vecteur x est une racine, alors il est forcément positif ou négatif (i.e. soit $x > 0$, soit $-x > 0$).*

Démonstration. 1. Il suffit de remarquer que $\sigma_\beta(\bar{\beta}) = -\bar{\beta}$ pour tout $\beta \in G_0$.

2. Montrons que pour un vecteur $y > 0$ tel que $\mathcal{B}(y) = 1$ et pour un $\alpha \in G_0$, on a soit $\sigma_\alpha y > 0$, soit $y = \bar{\alpha}$ (et alors $-\sigma_\alpha y = \bar{\alpha} > 0$). Le résultat désiré se démontre alors par récurrence.

$\mathcal{B}(\bar{\alpha}) = \mathcal{B}(y) = 1$ entraîne $|\langle \bar{\alpha}, y \rangle| \leq 1$. Or la formule 6 induit $2\langle \bar{\alpha}, y \rangle \in \mathbb{Z}$. Regardons les cas possibles.

(a) $2\langle \bar{\alpha}, y \rangle = 2 \Rightarrow \langle \bar{\alpha}, y \rangle = 1 \Rightarrow y = \bar{\alpha}$.

(b) $2\langle \bar{\alpha}, y \rangle \leq 0 \Rightarrow \sigma_\alpha y = y - 2\langle \bar{\alpha}, y \rangle \bar{\alpha} > 0$.

(c) $2\langle \bar{\alpha}, y \rangle = 2y_\alpha - \sum_{(\alpha, \beta) \in G_1} y_\beta = 1 \Rightarrow y_\alpha \geq 1 \Rightarrow \sigma_\alpha y = y - \bar{\alpha} > 0$. \square

La notion de racines joue un rôle important dans la compréhension du comportement d'une forme de Tits définie positive grâce à la proposition ci-dessous. Elle permettra dans la suite de caractériser les représentations indécomposables du carquois sous-jacent.

3.3 Les transformations de Coxeter

Définition 3.11. Soit $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ un numérotage quelconque des sommets de G . Une transformation de Coxeter est un élément $c = \sigma_{\alpha_1} \cdots \sigma_{\alpha_n}$ de W (qui dépend du choix du numérotage bien sûr).

Lemme 3.12. Supposons la forme de Tits \mathcal{B} de G définie positive. Fixons une transformation de Coxeter $c = \sigma_{\alpha_1} \cdots \sigma_{\alpha_n}$. Alors

1. c n'a pas de vecteur invariant non nul;
2. pour un $x \in \mathcal{E}_G$, $x \neq 0$, on ne peut pas avoir $c^i x > 0$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$.

Démonstration. 1. Prenons un vecteur $y \in \mathcal{E}_G$ invariant : $cy = y$. Les transformations $\sigma_{\alpha_n}, \dots, \sigma_{\alpha_2}$ ne changent pas la coordonnée correspondant à α_1 . Alors $(\sigma_{\alpha_1} y)_{\alpha_1} = (cy)_{\alpha_1} = y_{\alpha_1}$, d'où $\sigma_{\alpha_1} y = y$. De manière analogue $\sigma_{\alpha_2} y = \sigma_{\alpha_3} y = \dots = y$.

On a $y = \sigma_{\alpha} y = y - 2\langle \bar{\alpha}, y \rangle \bar{\alpha}$ pour tout $\alpha \in G_0$. Or les $\bar{\alpha}$, $\alpha \in G_0$, forment une base de l'espace linéaire \mathcal{E}_G . Vu que \mathcal{B} est non-dégénérée, on conclut $y = 0$.

2. Puisque W est un groupe fini, on a $c^h = 1$ pour un certain $h > 0$. Si tous les vecteurs $x, cx, \dots, c^{h-1}x$ étaient positifs, le vecteur $y = x + cx + \dots + c^{h-1}x$ serait non nul. Or on vérifie facilement que $cy = y$, ce qui contredit 1.

□

Maintenant on est prêt à montrer la

Proposition 3.13. Pour \mathcal{B} définie positive l'ensemble de racines est exactement l'ensemble de solutions entières positives et négatives de l'équation $\mathcal{B}(x) = 1$.

De plus, toute solution entière de $\mathcal{B}(x) = 1$ est soit positive soit négative.

Démonstration. D'après le lemme 3.8, une racine x est forcément entière et satisfait $\mathcal{B}(x) = 1$. Et d'après le lemme 3.10, elle est forcément positive ou négative.

Dans l'autre sens, supposons que $x > 0$ est une solution entière de l'équation $\mathcal{B}(x) = 1$ qui ne soit pas une racine. Cela signifie que l'on ne peut pas avoir $\sigma_{\alpha_1} \cdots \sigma_{\alpha_m} x = \bar{\beta}$ pour des $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in G_0$ (pas nécessairement distincts) et $\beta \in G_0$. Comme on l'a vu dans la démonstration du lemme 3.8, cela implique $\sigma_{\alpha_1} \cdots \sigma_{\alpha_m} x > 0$ pour tous les $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in G_0$, $m \in \mathbb{N}$. Or l'assertion 2 du lemme 3.12 fournit alors une contradiction !

Pour $x < 0$, ceci montre que $-x$ est une racine, donc x l'est aussi (lemme 3.10).

Pour achever la preuve, introduisons les ensembles $G_+ = \{\alpha \in G_0 : x_{\alpha} > 0\}$ et $G_- = \{\alpha \in G_0 : x_{\alpha} < 0\}$, puis montrons qu'ils ne peuvent pas être non

vides simultanément. Posons $x_\alpha^+ = x_\alpha$ si $x_\alpha > 0$, et $x_\alpha^+ = 0$ sinon ; $x_\alpha^- = x_\alpha$ si $x_\alpha < 0$, et $x_\alpha^- = 0$ sinon. La formule (5) donne

$$\mathcal{B}(x) = \mathcal{B}(x^+) + \mathcal{B}(x^-) - \sum_{(\alpha,\beta) \in G_1, \alpha \in G_+, \beta \in G_-} x_\alpha x_\beta$$

Pour le vecteur $x^+ - x^-$, dont les coordonnées sont les valeurs absolues des coordonnées de x , on calcule

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(x^+ - x^-) &= \mathcal{B}(x^+) + \mathcal{B}(x^-) + \sum_{(\alpha,\beta) \in G_1, \alpha \in G_+, \beta \in G_-} x_\alpha x_\beta \\ &\leq \mathcal{B}(x^+) + \mathcal{B}(x^-) - \sum_{(\alpha,\beta) \in G_1, \alpha \in G_+, \beta \in G_-} x_\alpha x_\beta = \mathcal{B}(x) = 1. \end{aligned} \quad (7)$$

Or pour $x^+ - x^- \neq 0$, la forme \mathcal{B} étant définie positive, on a $\mathcal{B}(x^+ - x^-) > 0$, donc $\mathcal{B}(x^+ - x^-) = 1$, avec égalité dans (7). Cette égalité entraîne $1 = \mathcal{B}(x) = \mathcal{B}(x^+) + \mathcal{B}(x^-)$, d'où soit $\mathcal{B}(x^+) = 0$, soit $\mathcal{B}(x^-) = 0$, et donc (toujours puisque \mathcal{B} est définie positive) soit $x^+ = 0$ (et alors G_+ est vide), soit $x^- = 0$ (et alors G_- est vide). \square

4 Démonstrations dans le cas défini positif

4.1 La preuve due à Tits de la première implication

Il s'agit donc de montrer :

Proposition 4.1. *Soit (G, Λ) un carquois. S'il n'y a dans $\mathcal{L}(G, \Lambda)$ qu'un nombre fini de classes d'isomorphisme de représentations indécomposables, alors G est du type A_n, D_n, E_6, E_7 ou E_8 .*

Démonstration. Commençons par fixer un vecteur dimension non nul $\bar{n} = (n_p)_{p \in G_0}$, et considérons tous les objets de $\mathcal{L}(G, \Lambda)$ de dimension \bar{n} . Une représentation V vérifie alors nécessairement $V_p \simeq k^{n_p}$, et est donc complètement déterminée par un point de la variété

$$H = \prod_{l \in G_1} \text{Hom}_k(k^{n_{d(l)}}, k^{n_{b(l)}})$$

qui est par ailleurs de dimension $\sum_{l \in G_1} n_{d(l)} n_{b(l)}$. Ensuite, par définition de la relation d'isomorphie, deux points correspondent à des représentations isomorphes si et seulement s'ils appartiennent à la même orbite dans H sous l'action de $G = (\prod_{p \in G_0} GL_{n_p}(k))/k^*$ qui cette fois est de dimension $-1 + \sum_{p \in G_0} n_p^2$. Mais alors s'il n'y a dans $\mathcal{L}(G, \Lambda)$ qu'un nombre fini de classes d'isomorphisme de représentations indécomposables, le nombre d'orbites dans H est fini puisque la dimension est fixée et que toute représentation se décompose en une somme directe finie d'objets indécomposables d'après le théorème 1.5. Ceci implique (voir par exemple [7]) $\dim G \geq \dim H$, c'est-à-dire $\mathcal{B}(\bar{n}) > 0$, pour peu que l'on ait supposé k infini.

Pour conclure, soit $(x_p)_{p \in G_0} \in \mathcal{E}_G \setminus \{0\}$, alors il existe $d \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que $\bar{n} = d(|x_p|)_{p \in G_0} \in \mathbb{N}^{|G_0|} \setminus \{0\}$ si bien que

$$\mathcal{B}((x_p)) \geq \mathcal{B}(|x_p|) = \frac{1}{d^2} \mathcal{B}(\bar{n}) > 0$$

et on peut finalement appliquer le théorème 3.3. □

Remarque 4.2. On a fait la démonstration seulement dans le cas où k est infini, mais le résultat reste vrai pour un corps de base $k = \mathbb{F}_q$ fini, avec un argument différent. On peut considérer par exemple le taux de croissance du nombre d'objets non-isomorphes de dimension m en fonction de m .

4.2 La seconde implication suivant la méthode de Bernstein, Gel'fand et Ponomarev

On relie enfin les similitudes qui sont apparues dans les parties précédentes entre les comportements respectifs des foncteurs basculants de $\mathcal{L}(G, \Lambda)$ et des réflexions σ_β de \mathcal{E}_G sur les représentations indécomposables et les racines positives. Ce lien est explicitement réalisé par l'application $\overline{\dim}$, levant

ainsi une part du mystère quant à l'apparition dans la théorie des carquois des diagrammes de Dynkin, justement d'abord étudiés via la théorie des systèmes de racines.

On commence par reformuler quelques résultats :

Lemme 4.3. *Soit (G, Λ) un carquois, $b \in G_0$ un point $(+)$ -accessible selon Λ et $V \in \mathcal{L}(G, \Lambda)$ un objet indécomposable. On a soit $F_b^+(V)$ indécomposable et $\overline{\dim} F_b^+(V) = \sigma_b(\overline{\dim} V)$, soit $V = L_b$ avec $0 = \overline{\dim} F_b^+(V) \neq \sigma_b(\overline{\dim} V) < 0$.*

Corollaire 4.4. *Soient (d_1, \dots, d_n) une suite $(+)$ -accessible selon Λ et $V \in \mathcal{L}(G, \Lambda)$ un objet indécomposable. Pour $0 \leq j \leq n$, on note $V_j = F_{d_j}^+ \dots F_{d_1}^+ V$, $m_j = \sigma_{d_j} \dots \sigma_{d_1}(\overline{\dim} V)$ et $i = \max\{0 \leq j \leq n : \forall k \leq j, m_k > 0\}$. Alors*

- les V_j sont indécomposables pour $j \leq i$ et $V = F_{d_1}^- \dots F_{d_j}^- V_j$;
- si $i < n$, on a $V_i = L_{d_{i+1}}$, $V = F_{d_1}^- \dots F_{d_i}^- L_{d_{i+1}}$ et en outre, pour $i < j \leq n$, les V_j sont nuls.

Remarque 4.5. Comme la plupart des énoncés de ce type, on a des résultats tout à fait analogues si l'on remplace $(+)$ par $(-)$.

Montrons maintenant l'implication suivante du théorème de Gabriel :

Proposition 4.6. *Soit (G, Λ) un carquois dont la forme de Tits \mathcal{B} est définie positive, c'est-à-dire que G est du type A_n, D_n, E_6, E_7 ou E_8 . Alors il n'y a qu'un nombre fini de classes d'isomorphisme d'objets indécomposables dans $\mathcal{L}(G, \Lambda)$ car ces classes sont en bijection avec les racines positives de \mathcal{E}_G qui elles-mêmes correspondent aux solutions entières positives de $\mathcal{B}(x) = 1$ d'après la proposition 3.13.*

Démonstration. 1. Soit V un objet indécomposable de $\mathcal{L}(G, \Lambda)$ pour un carquois tel que dans l'énoncé. Comme on manipule un graphe dirigé on peut écrire $G_0 = d_1, \dots, d_n$ de telle sorte que pour tout l dans G_1 on ait l'indice de $d(l)$ supérieur à celui de $b(l)$. On introduit $c = \sigma_{d_n} \dots \sigma_{d_1}$ la transformation de Coxeter associée. On sait par le lemme 3.12 qu'alors il existe $k > 0$ tel que $c^k(\overline{\dim} V)$ ne soit pas un vecteur positif. Soit alors la suite $(+)$ -accessible de nk points $(b_1, \dots, b_{nk}) = (d_1, \dots, d_n, \dots, d_1, \dots, d_n)$ (k fois) si bien que $c^k(\overline{\dim} V) = \sigma_{b_{nk}} \dots \sigma_{b_1}(\overline{\dim} V) \not\geq 0$. Mais alors d'après le corollaire 4.4, il existe $i < nk$ tel que $V = F_{b_1}^- \dots F_{b_i}^- L_{b_{i+1}}$. Comme V est indécomposable on a bien la formule $\overline{\dim} V = \sigma_{b_1} \dots \sigma_{b_i}(\overline{b_{i+1}})$ qui fait de $\overline{\dim} V$ une racine positive.

On remarque que l'indice i qui détermine complètement V ne dépend que de $\overline{\dim} V$: on a donc démontré que l'application $V \mapsto \overline{\dim} V$ des classes d'isomorphisme d'objets indécomposables dans l'ensemble des racines positives est d'une part bien définie mais est aussi injective.

2. On considère la même indexation des points de G . Soit x une racine positive et k tel que $c^k(x) \neq 0$. Comme $c^k = \sigma_{b_{nk}} \dots \sigma_{b_1}$ il existe $i = \max\{0 \leq j < nk : \forall k \leq j, \sigma_{b_k} \dots \sigma_{b_1}(x) > 0\}$. La preuve du lemme 3.10 vu plus haut nous dit clairement que $\sigma_{b_i} \dots \sigma_{b_1}(x) = \overline{b_{i+1}}$. Mais alors $\sigma_{b_1} \dots \sigma_{b_i}(\overline{b_{i+1}}) = x > 0$ et la maximalité de i nous dit que quel que soit $1 \leq k \leq i$ on a aussi $\sigma_{b_k} \dots \sigma_{b_i}(\overline{b_{i+1}}) > 0$ et même $F_{b_k}^- \dots F_{b_i}^- L_{b_{i+1}}$ indécomposable d'après le corollaire 4.4 (son analogue en fait - cf. remarque 4.5) : en particulier $V = F_{b_1}^- \dots F_{b_i}^- L_{b_{i+1}}$ est indécomposable et $\dim V = x$ ce qui fournit la surjectivité et donc achève la preuve. \square

Remarque 4.7. La première partie de la démonstration donne en fait une méthode pour expliciter n'importe quelle représentation indécomposable en fonction des plus simples, celles de dimension 1. L'indice k exhibé dans la démonstration n'est certes pas facile à calculer dans les cas particuliers, puisqu'issu d'un résultat théorique. Mais si l'on revient à notre exemple A_n (toujours selon Λ qui oriente les flèches de gauche à droite - cf. premier exemple pour les notations) et que l'on considère, pour $j > 1$, la représentation de dimension 1 : $L_{d_j} = L_{j,j} \in \mathcal{L}(A_n, \sigma_{j-1} \dots \sigma_1 \Lambda)$, alors on trouve qu'en fait $L_{i,j} = F_{d_i}^- \dots F_{d_{j-1}}^- L_{j,j}$ (pour $1 \leq i \leq j-1$) et on obtient donc ici sans trop de problème l'expression des représentations indécomposables quelconques en fonction des plus simples.

5 Remarques

5.1 Une autre preuve

Il y a une autre démonstration du théorème de Gabriel qui figure par exemple au chapitre 7 du livre de Gabriel-Roiter [8]. En plus des actions de groupes, elle utilise les notions élémentaires d'algèbre homologique et de géométrie algébrique. Comme dans la preuve exposée ci-dessus, la forme de Tits joue ici un rôle important. Les représentations d'un carquois sont identifiées avec les modules de k -dimension finie sur l'algèbre des chemins (voir la remarque 1.11). Enfin, on se sert du "lemme de Ringel" :

Lemme 5.1 (Ringel). *Si la forme de Tits d'un carquois C sur le corps de base k algébriquement clos est définie positive, alors on a*

$$\mathrm{Hom}(W, W) = k\mathbf{1}_W$$

pour toute représentation indécomposable W de C .

5.2 Qu'est-ce qui se passe quand la forme de Tits n'est pas positive ?

Lorsque la forme quadratique de Tits de C n'est pas positive, les représentations k -linéaires finies de C ne sont pas "classifiables". Expliquons-nous.

Considérons le carquois C :



Son algèbre $k[C]$ est l'algèbre associative libre $k\langle X, Y \rangle$ engendrée par deux variables qui ne commutent pas.

On construit pour toute algèbre A de type fini sur k un foncteur pleinement fidèle

$$F : \mathrm{mod}(A) \rightarrow \mathrm{mod}(k\langle X, Y \rangle),$$

où $\mathrm{mod}(A)$ désigne la catégorie des A -modules de k -dimension finie. Si A est engendrée par a_1, \dots, a_n , il suffit de poser $F(M) = M^{n+2}$ pour tout module $M \in \mathrm{mod}(A)$ et de laisser opérer X et Y sur $F(M)$ (par multiplication à droite) au moyen des matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 & 1 & a_1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 & a_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour tout morphisme $f : M \rightarrow M'$ de A -modules, posons

$$F(f) : (m_1, \dots, m_{n+2}) \mapsto (f(m_1), \dots, f(m_{n+2})),$$

on a clairement un morphisme de $k\langle X, Y \rangle$ -modules $F(M) \rightarrow F(M')$. L'application de $\text{Hom}_A(M, M')$ dans $\text{Hom}_{k\langle X, Y \rangle}(F(M), F(M'))$ ainsi définie est bijective, dont l'inverse associe à tout $\phi : F(M) \rightarrow F(M')$ le A -morphisme

$$m \mapsto \phi_1(m, 0, \dots, 0)$$

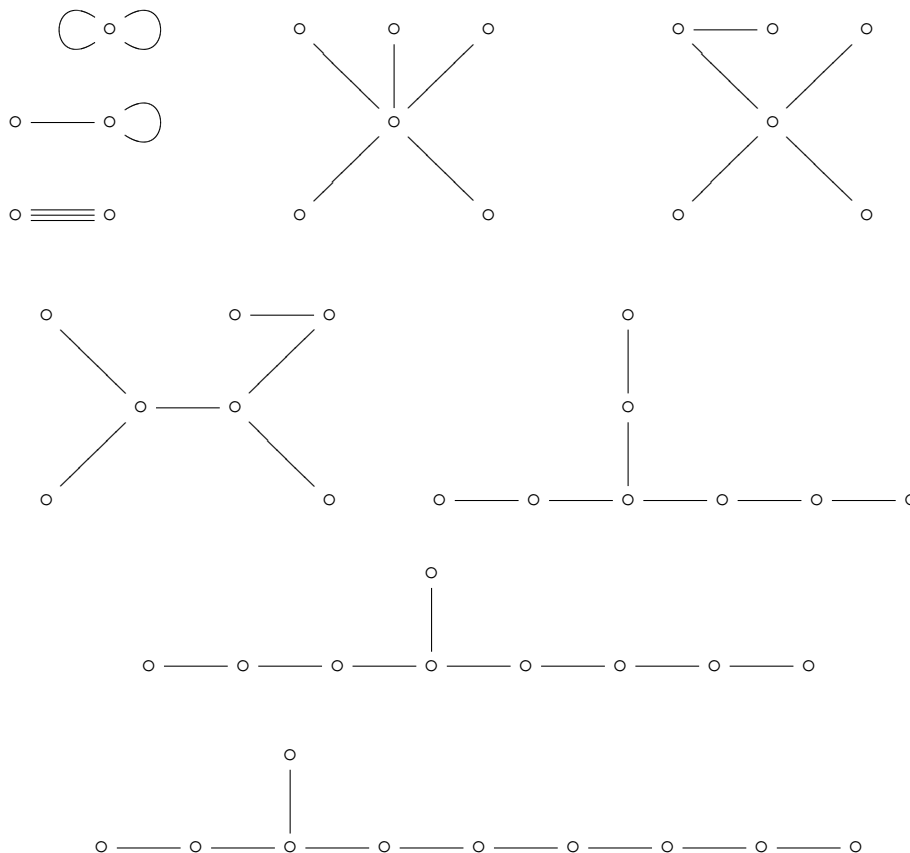
de M dans M' (ϕ_1 désigne la projection de ϕ sur la première coordonnée).

Une classification complète des représentations finies de C impliquerait donc une classification complète des modules de k -dimension finie sur toute algèbre de type fini. En particulier, toute algèbre de dimension finie sur k pourrait s'écrire comme une sous-algèbre de la k -algèbre des endomorphismes d'une représentation finie de C .

Pour un autre carquois D de forme de Tits non positive on peut construire un foncteur pleinement fidèle

$$G : \text{mod}(k\langle X, Y \rangle) \rightarrow \text{mod}(k[D]).$$

Il suffit de s'intéresser au cas où D est minimal, c'est-à-dire où tous ses sous-carquois ont une forme de Tits positive. Or la liste de ces carquois minimaux est finie. Voici tous les graphes de carquois minimaux :



Prenons à titre d'exemple le carquois D

$$p \xrightarrow{l} q \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{array} m .$$

À tout module $M \in \text{mod}(k\langle X, Y \rangle)$ on associe une représentation $G(M) = V$ de D avec $V(p) = M$, $V(q) = M \oplus M$, les flèches l et m opérant (par multiplication à droite) au moyen des matrices

$$(1 \ 0) \text{ et } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ X & Y \end{pmatrix}$$

respectivement.

Pour tout morphisme $f : M \rightarrow M'$ de $k\langle X, Y \rangle$ -modules posons

$$G(f) : m \mapsto f(m), (m_1, m_2) \mapsto (f(m_1), f(m_2)).$$

On vérifie qu'il s'agit d'un morphisme $G(M) \rightarrow G(M')$ de représentations de D . L'application de $\text{Hom}_{k\langle X, Y \rangle}(M, M')$ dans $\text{Hom}_{k[D]}(G(M), G(M'))$ ainsi définie est injective, car si l'on connaît $G(f)$, on connaît en particulier $m \mapsto f(m)$. De plus, l'application affectant à tout $\phi : G(M) \rightarrow G(M')$, $m \mapsto f(m)$, $(m_1, m_2) \mapsto h(m_1, m_2)$ l'application k -linéaire $m \mapsto f(m)$ est son inverse. Pour voir cela, il faut vérifier que f est en fait $k\langle X, Y \rangle$ -linéaire et que

$$h(m_1, m_2) = (f(m_1), f(m_2)). \quad (8)$$

Par définition des morphismes de représentations du carquois, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} & & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ X & Y \end{pmatrix} \\ & & \downarrow \\ M & \xrightarrow{(1 \ 0)} & M \oplus M \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{array} \\ \downarrow f & & \downarrow h \\ M' & \xrightarrow{(1 \ 0)} & M' \oplus M' \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{array} \\ & & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ X & Y \end{pmatrix} \end{array}$$

Ceci donne

$$h(m_1, 0) = (f(m_1), 0)$$

et

$$h(xm_2, m_1 + ym_2) = (xh_2(m_1, m_2), h_1(m_1, m_2) + yh_2(m_1, m_2)),$$

où h_i désigne la projection de h sur la i -ème coordonnée.

En particulier, $m_2 = 0$ donne

$$h(0, m_1) = (xh_2(m_1, 0), h_1(m_1, 0) + yh_2(m_1, 0)) = (0, f(m_1)),$$

d'où la formule 8. Ensuite, pour $m_1 = -ym_2$ on a

$$\begin{aligned} (f(xm_2), 0) &= h(xm_2, 0) = h(xm_2, -ym_2 + ym_2) \\ &= (xh_2(-ym_2, m_2), h_1(-ym_2, m_2) + yh_2(-ym_2, m_2)) \\ &= (xf(m_2), f(-ym_2) + yf(m_2)), \end{aligned}$$

d'où la $k\langle X, Y \rangle$ -linéarité.

Ainsi on a effectivement un foncteur pleinement fidèle.

5.3 Systèmes de racines et diagrammes de Dynkin

Donnons maintenant un bref aperçu de la théorie des racines et montrons comment les diagrammes de Dynkin y apparaissent. Pour les démonstrations et les détails on renvoie le lecteur à l'excellent livre de Jean-Pierre Serre [9], où il expose cette théorie dans le cadre de la théorie des algèbres de Lie.

Soit V un espace euclidien de dimension finie, muni du produit scalaire euclidien standard noté (\cdot, \cdot) .

Définition 5.2. *Un système de racines (réduit) dans V est un ensemble fini non vide Φ de vecteurs non nuls (appelés racines) qui satisfont les propriétés suivantes :*

1. Les racines engendrent V comme espace vectoriel.
2. Les seuls multiples scalaires d'une racine α qui sont dans Φ sont α elle-même et son opposé $-\alpha$.
3. Φ est stable par les réflexions σ_α d'hyperplan l'orthogonal de α , i.e. pour toutes racines α, β on a

$$\sigma_\alpha(\beta) = \beta - 2\frac{(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)}\alpha \in \Phi.$$

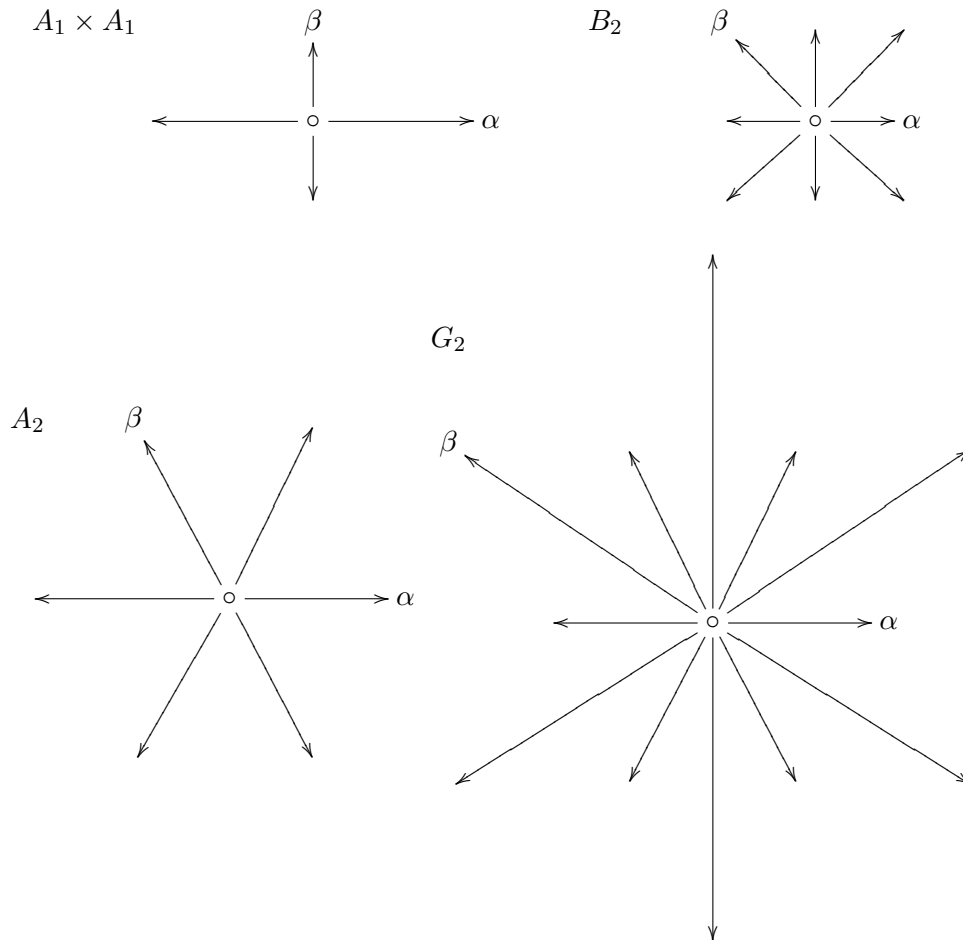
4. La projection orthogonale d'une racine β sur la droite engendrée par une autre racine α est un multiple demi-entier de α :

$$\langle \alpha, \beta \rangle = 2\frac{(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)} \in \mathbb{Z}.$$

Définition 5.3. Le groupe des isométries de V engendré par les réflexions par rapport aux hyperplans associés aux racines de Φ est nommé *le groupe de Weyl* de Φ .

Comme il agit fidèlement sur l'ensemble fini Φ , le groupe de Weyl est toujours fini.

Par exemple, il existe seulement un système de racines de rang 1 constitué de deux vecteurs différents de zéro α et $-\alpha$; il est appelé A_1 . Pour le rang 2, il existe quatre possibilités :



Deux vecteurs voisins dans les systèmes représentés forment un angle de $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}$ respectivement. Le rapport de leurs longueurs est arbitraire pour $A_1 \times A_1$ et est égal à $\sqrt{2}, 1$ et $\sqrt{3}$ pour les autres systèmes.

Notons que notre liste exhaustive de systèmes de racines de rang 2 montre toutes les possibilités géométriques pour deux racines dans un système quelconque. En particulier, deux racines forment un angle de $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}$ ou π .

Définition 5.4. Un sous-ensemble Φ^+ de Φ est appelé ensemble de *racines positives* si :

1. Pour chaque racine α , exactement une des racines $\alpha, -\alpha$ est contenue dans Φ^+ .

2. Pour toutes $\alpha, \beta \in \Phi^+$ telles que $\alpha + \beta$ est une racine, $\alpha + \beta \in \Phi^+$.

Définition 5.5. Un sous-ensemble Δ de Φ est appelé ensemble de *racines simples* ou *base* si :

1. Δ est une base de V .
2. Les coefficients de chaque vecteur de Φ dans cette base sont entiers de même signe.

Par exemple, une base (α, β) est choisie sur chaque dessin dans le cas du rang 2 ci-dessus.

Étant donné un système de racines, nous pouvons toujours choisir (de beaucoup de manières) un ensemble de racines positives. Puis, pour chaque choix de racines positives, il existe un unique sous-ensemble de racines simples, tel que les racines positives sont exactement les racines exprimées comme combinaison des racines simples avec des coefficients positifs. En outre, deux racines simples distinctes ne forment jamais un angle aigu.

Définition 5.6. À chaque système de racines on associe un graphe appelé *diagramme de Dynkin* dont les sommets correspondent aux vecteurs dans Δ et dont les arêtes sont dessinées entre chaque paire de vecteurs non orthogonaux. Il y a :

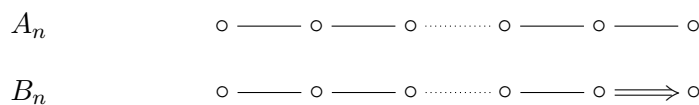
- une seule arête non orientée si les vecteurs correspondants font un angle de $\frac{2\pi}{3}$;
- une double arête orientée s'ils font un angle de $\frac{3\pi}{4}$;
- une triple arête orientée s'ils font un angle de $\frac{5\pi}{6}$.

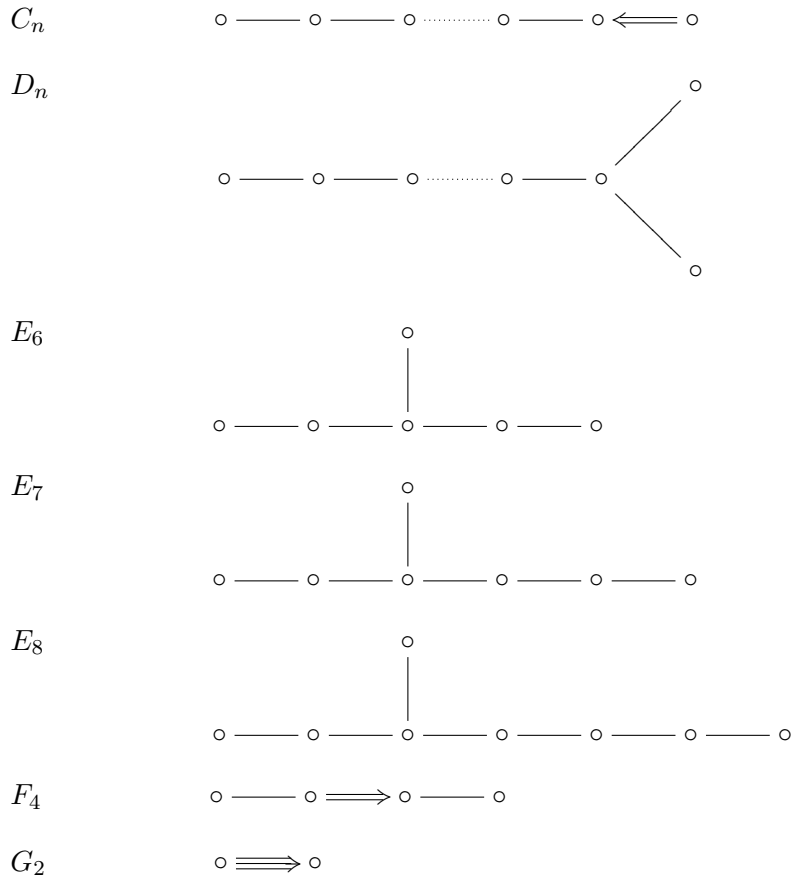
Les doubles et triples arêtes sont marquées avec un signe d'angle pointant vers le vecteur le plus court.

Remarque 5.7. Bien qu'un système de racines possède plus d'une base, le groupe de Weyl agit transitivement sur l'ensemble des bases. Par conséquent, le diagramme de Dynkin est bien défini. D'autre part, deux systèmes avec le même diagramme de Dynkin sont isomorphes.

Remarque 5.8. Au lieu d'orienter les arêtes, on peut, suivant Serre, munir les sommets du graphe de coefficients proportionnels au carré de la longueur de la racine correspondante.

Ainsi, le problème de classification des systèmes de racines (irréductibles) se réduit à celui des diagrammes de Dynkin (resp. connexes) possibles. Les diagrammes de Dynkin codent le produit scalaire sur V en termes de base Δ , et la condition que ce produit scalaire doit être défini positif s'avère être tout ce qui est nécessaire pour obtenir la classification désirée. Les diagrammes connexes qui apparaissent sont les suivants :





Les quatre premiers graphes ont chacun n sommets, avec $n \geq 1$, $n \geq 2$, $n \geq 3$, $n \geq 4$ respectivement.

Inversement, les diagrammes de Dynkin ci-dessus correspondent effectivement à des systèmes de racines, que l'on peut construire explicitement.

On voit quatre familles infinies (appelées *les systèmes de racines classiques*) et cinq cas exceptionnels (*les systèmes de racines exceptionnels*).

Notons que l'écriture du produit scalaire (\cdot, \cdot) dans la base Δ amène à la forme de Tits (du diagramme de Dynkin correspondant) étudiée ci-dessus, au moins quand tous les angles sont $\frac{2\pi}{3}$!

Les systèmes de racines classent des objets reliés dans la théorie de Lie, notamment les algèbres de Lie semi-simples complexes et les groupes de Lie semi-simples complexes simplement connexes. Dans chaque cas, les racines sont les poids différents de zéro de la représentation adjointe.

6 Conclusion

La méthode détaillée ici, initialement développée par Bernstein, Gel'fand et Ponomarev dans l'article [1], permet donc de démontrer directement la bijection entre les classes d'indécomposables d'un carquois dont la forme de Tits \mathcal{B} est définie positive et les solutions entières positives de $\mathcal{B}(\bar{n}) = 1$. Les foncteurs qu'ils ont introduits permettent de construire, à isomorphisme près, toutes les représentations indécomposables à partir des plus simples d'entre elles (celles de dimension 1), et ce de façon analogue à celle dont les racines positives sont atteintes par applications successives des générateurs σ_β du groupe de Weyl à partir des racines simples (voir la preuve de 4.6 et la remarque 4.7).

Cette méthode a été étendue par la suite dans un ouvrage de Dlab et Ringel (voir [10]), ceux-ci étudiant de nouveaux types de graphes (dits "valués") afin, d'une part, de traiter des diagrammes de Dynkin plus généraux (notamment les diagrammes comprenant des arêtes multiples), et d'autre part de retrouver les résultats de Nazarova ou de Donovan et Freislich à propos du théorème 1.8 reliant les diagrammes de Dynkin étendus et les carquois de forme de Tits positive non définie.

Références

- [1] I.N. Bernstein, I.M. Gelfand, V.A. Ponomarev, *Coxeter functors and Gabriel's theorem*, Uspehi Mat. Nauk 28, (1973) no. 2 (170), p. 19-33, traduit dans Russian Mathematical Surveys 1973, 28 (serie 2), 17-32.
- [2] P. Gabriel, *Représentations indécomposables*, Séminaire Bourbaki, 26e année (1973/1974), Exp. No. 444, pp. 143 169. Lecture Notes in Math., Vol. 431, Springer, Berlin, 1975.
- [3] S. Lang, *Algebre*, Dunod, 2004.
- [4] P. Gabriel, *Unzerlegbare Darstellungen I*, Manuscripta Math. 6 (1972), 71-103.
- [5] I.A. Nazarova, *Representations of quivers of infinite type*, Isv. Akad. Nauk SSSR, 37 (1973), 752-791.
- [6] P. Donovan, M.R. Freislich, *The representation theory of finite graphs and associated algebras*, Carleton Lecture Notes 5, 1973.
- [7] A. Borel, *Linear Algebraic Groups*, Benjamin, New York, 1969, 2nd enlarged edition, GTM 126, Springer-Verlag, 1991.
- [8] P. Gabriel, A.V. Roiter, *Representations of finite-dimension algebras*, Enc. of Math. Sci., 73, Algebra VIII, Springer, 1992.
- [9] J.P. Serre, *Algèbres de Lie semi-simples complexes*, Benjamin, 1966.
- [10] V. Dlab, C.M. Ringel, *Indecomposable representation of graphs and algebras*, Memoirs of the American Mahemtical Society, Volume 6, Number 173, 1976.