

Méthodes algébriques dans les systèmes intégrables

Sylvain Carpentier

16 octobre 2012

1 Introduction

L'étude des systèmes intégrables est depuis longtemps une branche fondamentale de la physique mathématique. Dans le cadre de la mécanique hamiltonienne, et plus généralement des systèmes dynamiques de dimension finie, un système est dit intégrable au sens de Liouville s'il possède suffisamment de constantes du mouvement fonctionnellement indépendantes et en involution. Liouville démontre que de tels systèmes sont résolubles en quadratures et que leur dynamique, si elle est bornée dans l'espace des phases, est contenue dans un tore de dimension le nombre de variables dynamiques. Aussi l'intégrabilité impose-t-elle de fortes contraintes physiques sur le système.

En considérant comme des variables indépendantes les dérivées partielles d'une même variable dynamique, on interprète les EDP non-linéaires comme des systèmes dynamiques de dimension infinie. On étudie ces équations dans le cadre de l'algèbre différentielle élémentaire. L'algèbre des fonctions différentielles sur l'espace des phases que l'on considère est une extension de l'anneau des polynômes différentiels en les variables dynamiques, de sorte qu'on peut définir des champs de vecteurs sans avoir recours au calcul différentiel en dimension infinie et à l'analyse fonctionnelle. A chaque système dynamique correspond une dérivation de l'algèbre des fonctions. Dans ce contexte on redéfinit les notions de symétries, de constantes du mouvement, d'intégrabilité. Les questions qu'on cherche à résoudre sont les suivantes. Comment vérifier qu'un système donné est intégrable, et si oui, comment peut-on l'intégrer ? Peut-on décrire tous les systèmes intégrables d'un certain type ? Peut-on donner une description complète des systèmes intégrables de tout ordre ?

2 Systèmes intégrables

2.1 Equations d'évolution, algèbre de fonctions différentielles

Une équation d'évolution est un système d'EDP de la forme

$$\frac{du_i}{dt} = P_i(u, u', u'', \dots), \quad i \in I = \{1, \dots, l\} \quad (2.1) \quad \boxed{1}$$

où les $u_i(t, x)$ sont des fonctions lisses sur une variété M de dimension 1 dépendant du temps t et de $x \in M$ et les P_i sont des fonctions différentiables en $u = (u_i)_{i \in I}$ et un nombre fini de ses dérivées partielles $u^{(n)} = (\frac{\partial^n u_i}{\partial x^n})_{i \in I}$. Un des exemples qui apparaît le plus souvent dans la littérature des systèmes intégrables est l'équation de Korteweg-de-Vries, qui décrit la propagation des vagues en eaux peu profondes,

$$\frac{du}{dt} = u''' + 6uu' \quad (\text{KdV})$$

On voit les $u_i^{(n)}$ comme les générateurs de l'algèbre de polynômes différentiels

$$A_I = \mathbb{C}[u_i^{(n)} | i \in I, n \geq 0]$$

munie de la dérivation ∂ définie par $\partial(u_i^{(n)}) = u_i^{(n+1)}$. Une algèbre de fonctions différentielles R est une extension de A_I munie d'une famille de dérivations $\frac{\partial}{\partial u_i^{(n)}}$ qui commutent entre elles, prolongent les dérivées partielles de A_I et telles que pour tout $f \in R$, $\frac{\partial f}{\partial u_i^{(n)}} = 0$ sauf pour un nombre fini de couples (i, n) . On étend à R la dérivation ∂ de A_I par la formule suivante

$$\partial = \sum_{i,n} u_i^{(n+1)} \frac{\partial}{\partial u_i^{(n)}}$$

En pratique, les algèbres que l'on considère sont l'algèbre de polynômes différentiels elle-même, le localisé de A_I par un élément $f \in A_I$ ou plus généralement par une sous-partie multiplicative, son corps des fractions Q ou toute extension de ces algèbres obtenue en ajoutant une solution d'une équation polynomiale. Par exemple, l'algèbre différentielle $\mathbb{C}[\sqrt{u}^{-1}, u, u', \dots]$.

2.2 Equations de conservation, dérivée de Fréchet

L'équation d'évolution (0.1) définit une autre dérivation X_P de l'algèbre R

$$X_P = \sum_{i,n} (\partial^n P_i) \frac{\partial}{\partial u_i^{(n)}} \quad (2.2) \quad \boxed{2}$$

$X_P(f)$ est la différentielle totale de f par rapport au temps t induite par l'équation d'évolution (0.1). On remarque que $[\partial, X_P] = 0$. Une dérivation de l'algèbre R qui vérifie cette propriété est appelée champ de vecteurs d'évolution. Il est facile de voir qu'elles sont toutes de la forme X_P pour un $P \in R^l$. L'ensemble des champs de vecteurs d'évolution forme une sous-algèbre de Lie de $Der(R)$ et le crochet de Lie satisfait l'équation suivante

$$[X_P, X_Q] = X_{X_P(Q) - X_Q(P)} \quad (2.3) \quad \boxed{3}$$

Un élément de $R/\partial R$ est appelé une fonctionnelle locale et l'image de $f \in R$ dans $R/\partial R$ est notée $\int f$.

Dans le cas de la dimension infinie, une intégrale du mouvement n'est plus une fonction mais une fonctionnelle locale.

Définition 2.1. On dit que $\int f$ est une intégrale du mouvement pour l'équation (0.1) si cette quantité est conservée au cours du temps, autrement dit si

$$\int \frac{df}{dt} = \int X_P(f) = 0 \quad (2.4) \quad \boxed{4}$$

On dit que f est une densité conservée.

En intégrant par partie, on remarque que cette condition est équivalente à

$$\int \frac{\delta f}{\delta u} \cdot P = 0$$

$\frac{\delta f}{\delta u} \in R^l$ est la dérivée variationnelle de f où

$$\left(\frac{\delta f}{\delta u}\right)_i = \frac{\delta f}{\delta u_i} = \sum_n (-\partial)^n \frac{\partial f}{\partial u_i^{(n)}}$$

Exemple 2.2. Pour l'équation de KdV, les quantités suivantes sont des densités conservées :

$$f_1 = u, \quad f_2 = u^2, \quad f_3 = -(u')^2 + 2u^3$$

En effet,

$$\frac{df_1}{dt} = (u'' + 3u^2)'$$

$$\frac{df_2}{dt} = (2uu'' - (u')^2 + 4u^3)'$$

$$\frac{df_3}{dt} = (9u^4 + 6u^2u'' + (u'')^2 - 12u(u')^2 - 2u'u''')$$

Enfin pour tout vecteur $F \in R^l$ on définit la dérivée de Fréchet comme étant la matrice d'opérateurs différentiels D_F telle que $(D_F(P))_k = D_{f_k}(P) = X_P(f_k)$

Ces deux notions s'interprètent comme les deux premières flèches de cohomologie du complexe de De Rham réduit $\Omega(R) = \tilde{\Omega}(R)/\partial\tilde{\Omega}(R)$. En effet, Ω_0 s'identifie à $R/\partial R$, Ω_1 à R^l , Ω_2 aux matrices d'opérateurs différentiels anti-adjointes et on a, pour $f \in R/\partial R$ et $F \in R^l$,

$$d\left(\int f\right) = \frac{\delta f}{\delta u}, \quad d(F) = D_F - D_F^*$$

2.3 Symmétries, systèmes intégrables

Traditionnellement, les symmétries d'une équation sont définies comme les transformations qui laissent stable l'espace des solutions. Considérons donc une transformation infinitésimale $\tilde{u} = u + \tau G$ et observons quelles sont les conditions sur G pour que $\frac{d\tilde{u}}{dt} = F(\tilde{u}, \tilde{u}', \dots)$ soit vraie au premier ordre en τ . On obtient

$$\frac{d\tilde{u}}{dt} - F(\tilde{u}, \tilde{u}', \dots) = \tau(X_F(G) - X_G(F)) + o(\tau)$$

On en déduit la définition suivante

Définition 2.3. Un vecteur $G \in R^l$ est une symmétrie pour l'équation d'évolution 2.1 si $[X_F, X_G] = 0$. On dit que les équations d'évolutions $u_t = F$ et $u_\tau = G$ sont compatibles.

On remarque que le crochet de Lie de deux symmétries en est encore une. L'ensemble des symmétries de l'équation d'évolution 2.1 est donc une sous-algèbre de Lie de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs d'évolution.

Définition 2.4. Une équation d'évolution est dite intégrable si elle admet une suite de symmétries $(G_n)_{n \geq 0}$ qui engendrent un espace de dimension infinie sur les constantes et telles que $[X_{G_n}, X_{G_m}] = 0 \quad \forall (n, m) \in \mathbb{N}^2$.

Dans ce cadre, le problème de la classification des équations d'évolution intégrables est équivalent au problème de classification des sous-algèbres abéliennes de dimension infinie maximales de l'algèbre des champs de vecteurs d'évolution.

Proposition 2.5. *L'équation de Korteweg-de-Vries est intégrable*

Les fonctions suivantes sont des symétries d'ordre 1, 3, et 5 pour cette équation

$$\begin{aligned} G_1 &= u' \\ G_3 &= u''' + 6uu' = F \\ G_5 &= u^{(5)} + 10uu''' + 20u'u'' + 30u^2u' \end{aligned}$$

3 Opérateurs récurrents formels

Le concept d'opérateur récursif formel est au coeur de l'approche algébrique des systèmes intégrables. C'est avant tout un critère d'intégrabilité. Si l'équation $u_t = P$ possède une infinité de symétries ou de densités conservées dont l'ordre différentiel peut-être choisi arbitrairement grand, alors elle admet un opérateur récursif formel dont les coefficients peuvent être trouvés explicitement. On énonce et illustre les résultats fondamentaux liés à ce concept. On commence par des rappels indispensables d'algèbre différentielle élémentaire (voir [CDSK12] et [CDSK12'] pour des rappels plus approfondis).

3.1 Opérateurs pseudodifférentiels

Soit A un anneau muni d'une dérivation D . D est une application additive qui vérifie la propriété $D(ab) = D(a)b + aD(b) \forall (a, b) \in A^2$. Dans la suite on notera $a' = D(a)$ pour $a \in A$. Un opérateur différentiel à coefficients dans A est un polynôme en ∂ ,

$$A[\partial] = \left\{ \sum_{n \leq N} a_n \partial^n \mid N \in \mathbb{N}, a_n \in A \right\}$$

L'ensemble des opérateurs différentiels sur A est un anneau pour le produit défini par

$$\partial \cdot a = a \cdot \partial + a' \quad \forall a \in A$$

Un opérateur pseudodifférentiel sur A est une série de Laurent à coefficients dans A

$$A((\partial^{-1})) = \left\{ \sum_{-\infty \leq n \leq N} a_n \partial^n \mid N \in \mathbb{N}, a_n \in A \right\}$$

L'ensemble des opérateurs pseudodifférentiels sur A est un anneau pour le produit défini par

$$\partial^{-1}.a = \sum_{n \geq 0} (-1)^n a^{(n)} \partial^{-1-n}$$

Contrairement aux opérateurs différentiels, les opérateurs pseudodifférentiels n'agissent pas sur l'anneau différentiel A . Si A est un corps, alors $A((\partial^{-1}))$ est un corps non-commutatif. Par ailleurs, si $P \in A((\partial^{-1}))$ est de degré $n \in \mathbb{N}$ et si a_n possède une racine n -ième dans A , alors il existe un opérateur pseudodifférentiel Q tel que $Q^n = P$ et les k premiers coefficients de Q sont entièrement déterminés par la donnée des k premiers coefficients de P pour tout entier k .

Définition 3.1. Le résidu d'un opérateur pseudodifférentiel $P = \sum_{n \leq N} a_n \partial^n$ est le coefficient en ∂^{-1}

$$res(P) = a_{-1}$$

Le résidu logarithmique de P est défini par

$$reslog(P) = \frac{a_{N-1}}{a_N}$$

On utilisera le théorème suivant de Adler :

Théorème 3.2. Pour tout couple P, Q d'opérateurs pseudodifférentiels, le résidu du commutateur est dans l'image de D

$$res([P, Q]) = (\lambda(P, Q))'$$

3.2 opérateurs récurrents

Par souci de simplicité on supposera dans cette section que $l = 1$. Les définitions et résultats se généralisent pour un entier l quelconque.

Définition 3.3. Un opérateur pseudodifférentiel sur R de degré 1 Λ est un opérateur récursif formel pour 2.1 si il satisfait l'équation suivante

$$\frac{d\Lambda}{dt} = [D_P, \Lambda] \tag{3.5} \quad \square$$

On remarque que si Γ est un opérateur différentiel de degré quelconque satisfaisant cette équation, alors il laisse stable l'ensemble des symétries de $u_t = P$. En effet, si G est une telle symétrie et si $H = \Gamma(G)$,

$$\begin{aligned} X_P(H) &= X_P(\Gamma)(G) + \Gamma(X_P(G)) \\ &= D_P(H) - \Gamma(X_P(G)) + \Gamma(X_P(G)) \\ &= D_P(H) = X_H(P) \end{aligned}$$

On retrouve ainsi la notion usuelle d'opérateur récursif.

Proposition 3.4. *Si un opérateur pseudodifférentiel Q sur R de degré N satisfait (3.5), alors toutes ses puissances entières $Q^k, k \in \mathbb{Z}$ et sa racine N -ème la satisfont également. Si Λ est un opérateur récursif formel, l'ensemble de ces opérateurs récursifs formels est décrit par*

$$\left\{ \sum_{-\infty \leq n \leq 1} a_n \Lambda^n \mid a_n \in \mathbb{C} \right\}$$

L'existence d'un opérateur récursif formel est une condition nécessaire d'intégrabilité.

Théorème 3.5. *Si l'équation d'évolution 2.1 admet une infinité de symétries d'ordres arbitrairement grands, alors elle possède un opérateur récursif formel.*

L'idée de la preuve et le lien entre les notions d'opérateur récursif formel et de symétrie peuvent être illustrés par la considération suivante. Soit n l'ordre différentiel de P et soit une symétrie G d'ordre $m > n$. Par définition G vérifie l'équation suivante

$$\frac{dD_G}{dt} - [D_P, D_G] = X_G(D_F)$$

On en déduit que

$$\frac{d(D_G)^{1/m}}{dt} - [D_P, (D_G)^{1/m}] = Q$$

où Q est un opérateur pseudodifférentiel d'ordre $\text{ord}(Q) \leq n + 1 - m$. Ainsi $(D_G)^{1/m}$ est une approximation d'un opérateur récursif formel à l'ordre $3 - m$. Plus précisément, si il existe un opérateur formel pour 2.1, alors on peut

trouver des coefficients λ_k tels que l'opérateur pseudodifférentiel suivant soit un opérateur récursif formel,

$$\Lambda = (D_G)^{1/m} + \sum_{k \leq 2-m} \lambda_k \partial^k$$

Si le système possède une infinité de symétries d'ordre différentiel arbitrairement grand, on construit par des approximations successives un opérateur récursif formel.

Exemple 3.6. Pour l'équation (KdV) , on peut voir, pour des raisons qu'on donnera dans la section suivante, que l'opérateur pseudodifférentiel rationnel $\Gamma = (u' + 2u\partial + \partial^3) \cdot \partial^{-1}$ satisfait (3.5). Pour obtenir rigoureusement un opérateur récursif formel, il faut en considérer la racine, $\Lambda = (\Gamma)^{1/2}$

Théorème 3.7. *Si l'équation 2.1 admet un opérateur récursif formel Γ , les quantités suivantes sont des densités conservées*

$$\rho_i = \text{res}(\Lambda^i), \quad i = -1, 1, 2, \dots$$

$$\rho_0 = \text{reslog}(\Lambda)$$

$$\frac{d\rho_i}{dt} = (\sigma_i)'$$

On les appelle les densités conservées canoniques du système.

Remarque 3.8. Ces densités sont bien canoniques puisque, d'après la description de l'ensemble des opérateurs récursifs formels d'un système que donne la proposition (3.4), l'espace qu'elles engendrent ne dépend pas du choix de cet opérateur.

Ce théorème et la discussion qui suit le théorème (3.5) donnent une méthode pour tester l'existence d'un opérateur récursif formel et, par conséquent, l'intégrabilité d'un système.

Les $n - 1$ premiers coefficients peuvent être choisis égaux aux $n - 1$ premiers coefficients de D_P , P étant une symétrie de l'équation qu'elle définit.

$$\Lambda = (D_P)^{1/n} + \sum_{k \leq 2-n} \lambda_k \partial^k$$

On peut alors calculer les quantités $\rho_{-1}, \dots, \rho_{n-2}$ explicitement en fonction des coefficients de D_P . En reportant Λ dans l'équation (3.5), on voit que $\rho_{-1} = (\frac{\partial P}{\partial u^n})^{-1/n}$ doit être une densité conservée. Autrement dit, il doit

exister une fonction σ_{-1} telle que $\frac{d\rho_{-1}}{dt} = (\sigma_{-1})'$. Dans le cas contraire, le système n'admet pas d'opérateur récursif formel et n'est donc pas intégrable. Si σ_{-1} existe, on montre que λ_{2-n} s'exprime explicitement en fonction des coefficients de D_P et de σ_{-1} . De même le coefficient suivant λ_{1-n} ne peut être trouvé que si la fonction ρ_0 est une densité conservée. Dans ce cas, il s'exprime en fonction des coefficients de D_P , de σ_0 et de σ_{-1} . En itérant ce procédé on construit autant de coefficients que l'on souhaite à moins de trouver un ρ_i qui n'est pas une densité conservée. Dans ce cas le système n'admet pas d'opérateur récursif formel et n'est pas intégrable.

4 Systèmes d'EDP Hamiltoniens

Dans [BDSK09], V.Kac et A. De Sole donnent une définition rigoureuse des structures hamiltoniennes sur une algèbre de fonctions différentielles en introduisant les algèbres vertex de Poisson. Une structure d'algèbre vertex de Poisson sur R induit un crochet de Lie sur l'espace des fonctionnelles locales qui est l'analogie du crochet de Poisson en dimension finie. Cependant les Algèbres Vertex de Poisson nous emmèneraient trop loin et on se contentera ici de donner une définition de structure hamiltonienne directement liée aux crochets de Lie sur l'espace des fonctionnelles locales.

4.1 Structures hamiltoniennes

Soit $H(\partial)$ une matrice $l \times l$ d'opérateurs différentiels. $H(\partial)$ définit un crochet sur l'espace $R/\partial R$ des fonctionnelles locales par la formule

$$\left\{ \int f, \int g \right\}_H = \int \frac{\delta f}{\delta u} \cdot H(\partial) \frac{\delta g}{\delta u} \quad (4.6) \quad \boxed{6}$$

Définition 4.1. On dit qu'une matrice d'opérateurs différentiels $H(\partial)$ définit une structure hamiltonienne sur R si le crochet $\{, \}_H$ munit $R/\partial R$ d'une structure d'algèbre de Lie.

Définition 4.2. Soit H une structure hamiltonienne. Une EDP hamiltonienne est une équation d'évolution de la forme

$$\frac{du}{dt} = H(\partial) \frac{\delta h}{\delta u} \quad (4.7) \quad \boxed{7}$$

On dit que $\int h$ est une fonctionnelle hamiltonienne et $X_{H(\partial)\frac{\delta h}{\delta u}}$ un champ de vecteurs hamiltonien.

Dans le contexte Hamiltonien, une densité conservée est simplement une fonctionnelle $\int f$ qui commute avec $\int h$ pour le crochet défini par H . Par ailleurs, $\int h \rightarrow X_{H(\partial)\frac{\delta h}{\delta u}}$ est un morphisme d'algèbre de Lie. Par conséquent, si $\dim \text{Ker} H(\partial) < +\infty$ et si $(\int h_n)$ est une suite de fonctionnelles en involutions qui engendrent un espace de dimension infinie, l'équation 4.7 est intégrable. En effet les champs de vecteurs hamiltoniens qui leurs correspondent sont eux aussi en involution et engendrent un espace de dimension infinie.

4.2 Structures bihamiltoniennes

Une même équation d'évolution peut être mise sous une forme hamiltonienne pour des structures H et K différentes. Loin d'être un inconvénient, cela se révèle une des sources d'intégrabilité les plus importantes dans l'approche hamiltonienne comme on peut le voir en utilisant le schéma de Lenard ([BDSK09]). Sous certaines hypothèses, ce schéma permet de construire une suite de fonctionnelles en involution pour l'une ou l'autre de ces structures à condition qu'elles soient compatibles.

Définition 4.3. On dit que deux structures hamiltoniennes H et K sont compatibles si toute combinaison linéaire de H et de K est une structure hamiltonienne

Exemple 4.4. L'équation KdV peut être mise sous forme hamiltonienne pour deux structures différentes

$$H(\partial) = u' + 2u\partial + \partial^3$$

$$K(\partial) = \partial$$

En effet

$$u''' + 6uu' = H(\partial)\frac{\delta h}{\delta u} = K(\partial)\frac{\delta k}{\delta u}$$

pour $h = u^2$ et $k = u^3 + \frac{1}{2}uu''$. On peut montrer que H et K définissent des structures compatibles.

Définition 4.5. Une algèbre de fonctions différentielles est dite normale si toutes ses dérivées partielles sont surjectives.

Définition 4.6. Soit X un sous-ensemble de R^l . On pose

$$X^\perp = \{G \in R^l \mid \int G.F = 0 \forall F \in X\}$$

Proposition 4.7. Soit R une algèbre de fonctions différentielles normale. Soient H et K deux structures hamiltoniennes compatibles sur R . Soient deux fonctionnelles locales $\int h_0$ et $\int h_1$ satisfaisant les conditions suivantes :

- (i) $H(\partial) \frac{\delta h_0}{\delta u} = K(\partial) \frac{\delta h_1}{\delta u}$
- (ii) $\{\frac{\delta h_0}{\delta u}, \frac{\delta h_1}{\delta u}\}^\perp \subset \text{Im}K(\partial)$

Alors il existe une suite de fonctionnelles locales $(\int h_n)_n$ qui sont deux à deux en involution pour les crochets définis par $H(\partial)$ et par $K(\partial)$.

Exemple 4.8. Pour l'équation KdV, $h_0 = 2u$ et $h_1 = u^2$ conviennent.

Un autre moyen de voir que l'existence d'une structure bihamiltonienne est une forte garantie d'intégrabilité est de faire le lien avec les opérateurs récurrents formels.

Proposition 4.9. Soit $u_t = P$ une équation d'évolution qui peut être mise sous forme hamiltonienne de deux manières $P = H(\partial) \frac{\delta h}{\delta u} = K(\partial) \frac{\delta k}{\delta u}$. Alors l'opérateur différentiel $H.K^{-1}$ satisfait l'équation (3.5).

On remarque qu'on ne demande pas ici que les deux structures soient compatibles au sens précédent. En particulier, les fonctions $(\text{res}((H.K^{-1})^i))_{i \geq -1}$ sont des densités conservées. ■

Dans de nombreux exemples de systèmes bihamiltoniens, la suite de densités ainsi conservées donne des fonctions d'ordres différentiels arbitrairement grands. On peut se demander si c'est un fait général, auquel cas être bihamiltonien serait une condition suffisante d'intégrabilité. Par ailleurs, il s'avère que ce cadre hamiltonien est insuffisant pour décrire certaines équations et on doit développer la théorie plus générale des structures hamiltoniennes non-locales, qui sont des matrices d'opérateurs pseudodifférentiels rationnelles ([DSK12]).

Références

- [BDSK09] A. Barakat, A. De Sole, and V.G. Kac, *Poisson vertex algebras in the theory of Hamiltonian equations*, Japan. J. Math. **4**, (2009) 141-252.
- [CDSK12] S. Carpentier, A. De Sole, and V.G. Kac, *Some algebraic properties of matrix differential operators and their Deudonné determinant*, J. Math. Phys. (2012) arXive :1201.1992
- [CDSK12'] S. Carpentier, A. De Sole, and V.G. Kac, *Rational matrix pseudodifferential operators*, arXive :1206.4165
- [DSK12] A. De Sole, and V.G. Kac, *Non-local Hamiltonian structures and applications to the theory of integrable systems*, in preparation.
- [MS] A.V. Mikhailov and V.V. Sokolov, *Symmetries of Differential Equations and the Problem of Integrability*, Integrability, ed A.V. Mikhailov, Springer, xiii, 339 pp., ISBN 978-3-540-88110-0