

Introduction à un domaine de recherche.  
*Sur les graphes aléatoires enracinés uniformément.*

Jérôme Casse  
*sous la direction de*  
Jean-François Le Gall

5 octobre 2011

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Les graphes aléatoires enracinés uniformément.</b>	<b>3</b>
1.1	Rappel sur les graphes et la récurrence des graphes. . . . .	3
1.2	Enracinement d'un graphe. . . . .	4
1.3	Graphes enracinés uniformément. . . . .	5
1.4	Graphes aléatoires enracinés uniformément. . . . .	6
<b>2</b>	<b>Théorème de Benjamini et Schramm.</b>	<b>6</b>
2.1	Énoncé du théorème de Benjamini et Schramm. . . . .	6
2.2	Points $(\delta, s)$ -étalés. . . . .	7
2.3	Empilements de cercles. . . . .	9
2.4	Application du théorème de Benjamini et Schramm : $\mathbb{Z}^3$ n'est pas planaire. . . . .	10

## Introduction

Depuis une dizaine d'années, l'étude des graphes aléatoires est devenu un des domaines en mathématiques qui s'est le plus développé. En effet, les graphes aléatoires, et en particulier les triangulations aléatoires, présentent un intérêt en probabilités, en physique statistique et en combinatoire. De plus, ils ont des liens étroits avec les surfaces aléatoires qui ont des applications en physique comme expliqué dans [1]. Une des questions importantes étant de savoir si la limite en loi d'une suite de triangulations de la sphère enracinées uniformément est récurrente. Il est conjecturé que ceci est vrai.

Nous allons ici voir un résultat de I. Benjamini et O. Schramm dans [2] qui est un cas particulier, mais aussi plus général de la conjecture ; c'est que la limite en loi d'une suite de graphes planaires aléatoires à degré borné enracinés uniformément est récurrente. C'est plus général car cela concerne des graphes planaires et pas que des triangulations de la sphère, mais c'est plus restreint puisque le degré des graphes est borné. Nous donnerons, en plus de l'énoncé du théorème de Benjamini et Schramm, les outils, principalement combinatoires, nécessaires pour le démontrer.

## 1 Les graphes aléatoires enracinés uniformément.

Dans cette première partie, on va définir l'objet de notre étude, qui vont être les graphes aléatoires enracinés uniformément.

### 1.1 Rappel sur les graphes et la récurrence des graphes.

On commence par quelques rappels sur les graphes, ce qui nous permettra de poser nos notations pour la suite.

**Définition 1.1.** Un graphe  $G = (V, E)$  est un couple dont le premier élément  $V$  est un ensemble appelé l'ensemble des sommets (noeuds) et le second  $E$  est un ensemble de couples d'éléments de  $V$  appelé ensemble des arêtes.

On peut munir cet ensemble d'une relation d'équivalence, dite d'isomorphisme, de la façon suivante.

**Définition 1.2** (isomorphisme des graphes). On dit que deux graphes  $G = (V, E)$  et  $G' = (V', E')$  sont isomorphes, s'il existe une bijection  $\phi$  entre  $V$  et  $V'$  qui préserve les arêtes, i.e.

$$\{u, v\} \in E \text{ ssi } \{\phi(u), \phi(v)\} \in E'.$$

Cette relation dit, en fait, que les noms des sommets d'un graphe n'ont aucune importance.

On rappelle un peu de terminologie sur les graphes qui va nous être utile.

**Définition 1.3.** Deux sommets sont voisins s'ils partagent une arête commune.

Le degré  $d_v$  d'un sommet  $v$  pour un graphe  $G$  est le nombre de ses voisins.

$$d_v = |\{u \neq v \mid \{u, v\} \in E\}|.$$

Le degré  $D$  d'un graphe  $G$  est le maximum des degrés de ses noeuds.

$$D = \max_{v \in V} d_v.$$

Un graphe est planaire si on peut le plonger dans le plan (c'est-à-dire si on peut le représenter dans le plan sans que deux arêtes ne se croisent).

Maintenant, nous rappelons comment on peut définir une marche aléatoire sur un graphe  $G$  localement fini (un graphe dont tous les sommets ont un nombre fini de voisins) à partir du sommet  $u$ .

**Définition 1.4** (marche aléatoire simple sur le graphe). Soit  $G$  un graphe et  $u$  un sommet de  $G$ . Soit  $(X_n^u)$  une suite de variables aléatoires à valeurs dans  $V$ .  $X_n^u$  est une marche aléatoire sur  $G$  partant de  $u$  si

–  $X_0 = u$  presque sûrement,

–

$$P(X_{n+1} = w \mid X_n = v) = \begin{cases} 0 & \text{si } (v, w) \notin E, \\ \frac{1}{|\{w \mid (v, w) \in E\}|} & \text{si } (v, w) \in E. \end{cases}$$

Maintenant, on peut définir ce qu'est un graphe récurrent.

**Définition 1.5** (graphe récurrent). Soit  $G$  un graphe connexe localement fini.  $G$  est récurrent s'il existe un sommet  $u$  pour lequel  $(X_n^u)$  est une chaîne de Markov récurrente, i.e. si le temps de retour  $T^u = \inf \{n > 0 \mid X_n^u = u\}$  est fini presque sûrement. Si ceci est vrai pour un sommet de  $G$ , alors cela est vrai pour tous les sommets de  $G$ .

On rappelle une propriété importante sur les sous-graphes de graphes récurrents, qui est la monotonie de Rayleigh.

**Proposition 1.6** (monotonie de Rayleigh). *Si  $G_1$  est un sous-graphe d'un graphe  $G$  récurrent, alors  $G_1$  est récurrent.*

## 1.2 Enracinement d'un graphe.

Maintenant, on va définir ce que sont les graphes enracinés qui sont, simplement, des graphes dont on particularise un sommet, la racine.

**Définition 1.7** (graphe enraciné). Un graphe enraciné  $(G, o) = ((V, E), o)$  est un couple dont le premier élément est un graphe  $G = (V, E)$  et le second  $o \in V$  est un sommet du graphe  $G$  appelé racine.

On peut étendre l'isomorphisme que l'on avait sur les graphes pour les graphes enracinés en rajoutant comme propriété à l'isomorphisme de conserver la racine.

**Définition 1.8** (isomorphisme des graphes enracinés). On dit que deux graphes enracinés  $(G, o)$  et  $(G', o')$  sont isomorphes s'il existe une bijection  $\phi$  qui rend  $G$  et  $G'$  isomorphes et qui envoie  $o$  en  $o'$ .

On note  $\mathcal{X}$  l'espace de tous les graphes enracinés quotienté par la relation d'isomorphisme (qui est une relation d'équivalence). Cet espace peut être muni d'une métrique qui induira la topologie naturelle sur cet espace.

**Définition 1.9** (métrique sur les graphes enracinés). On note  $B_G(o, n)$  (la boule de centre  $o$  et de rayon  $n$  du graphe  $G$ ) le sous-graphe de  $G$  dont les sommets sont les sommets de  $G$  à distance au plus  $n$  de  $o$  et dont les arêtes sont les arêtes de  $G$  dont les deux extrémités sont à distance au plus  $n$  de  $o$ . On définit la distance  $D$  entre deux graphes enracinés ainsi

$$D((G, o), (G', o')) = 2^{-\sup\{n \mid (B_G(o, n), o) \text{ et } (B_{G'}(o', n), o') \text{ sont isomorphes}\}}$$

où  $2^{-\infty} = 0$ .

*Remarque.*  $D$  est même une distance ultramétrique, c'est-à-dire que, pour tout  $(G, o), (G', o'), (G'', o'') \in \mathcal{X}$ , on a

$$D((G, o), (G', o')) \leq \max(D((G, o), (G'', o'')), D((G', o'), (G'', o''))).$$

### 1.3 Graphes enracinés uniformément.

Dans cette sous-section, on va introduire une première notion d'aléatoire qui va être l'enracinement uniforme d'un graphe fini.

**Définition 1.10** (enracinement uniforme d'un graphe fini). Soit  $G = (V, E)$  un graphe où le nombre de sommets est fini. On définit la mesure de probabilité  $\mu_G$  sur  $\mathcal{X}$  muni de sa tribu borélienne  $\mathcal{B}$ , ainsi

$$\mu_G = \frac{1}{|V|} \sum_{v \in V} \delta_{(G, v)}$$

où  $\delta_{(G, v)}$  est la mesure de Dirac.

Autrement expliqué, l'enracinement uniforme d'un graphe fini est juste le fait de prendre un graphe  $G$  fini et de choisir la racine  $\mathbf{o} \in V$  de manière uniforme, c'est-à-dire avec une probabilité égale pour chacun des sommets. On obtient, ainsi, un graphe enraciné aléatoire  $(G, \mathbf{o})$  dont la loi est  $\mu_G$ .

## 1.4 Graphes aléatoires enracinés uniformément.

Dans la section précédente, on a vu un premier niveau d'aléatoire qui était l'enracinement uniforme d'un graphe fini  $G$  fixé. On va, ici, en rajouter un deuxième niveau qui va être de prendre le graphe  $G$  fini non plus de manière déterministe, mais de manière aléatoire. Ce sera sur ce genre de graphes enracinés aléatoires dits à loi non-biaisée que l'on travaillera.

**Définition 1.11.** Soit  $\mu$  une probabilité sur  $\mathcal{X}$ . On dit que  $\mu$  est non-biaisée s'il existe une probabilité  $\nu$  sur l'ensemble des graphes finis non-enracinés (ensemble dénombrable) telle que

$$\mu = \sum_{H \text{ graphes non-enracinés}} \nu(H) \mu_H.$$

Ainsi, un graphe enraciné aléatoire  $(\mathbf{G}, \mathbf{o})$  de loi  $\mu$  non-biaisée peut être vu comme le fait de prendre un graphe non-enraciné aléatoire  $\mathbf{G}$  avec loi  $\nu$ , puis une fois celui-ci obtenu, prendre la racine  $\mathbf{o}$  de manière uniforme sur l'ensemble des sommets  $\mathbf{V}$  du graphe  $\mathbf{G}$ .

## 2 Théorème de Benjamini et Schramm.

Dans cette partie, on verra le théorème de Benjamini et Schramm, qui est un des premiers théorèmes sur la récurrence de la limite d'une suite de graphes aléatoires enracinés uniformément, et les éléments principaux qui permettent de le démontrer.

### 2.1 Énoncé du théorème de Benjamini et Schramm.

On commence donc par énoncer le théorème de Benjamini et Schramm.

**Théorème 2.1.** *Soit  $M < \infty$  et soit  $(G, o)$  la limite en loi de graphes planaires aléatoires enracinés  $(G_i, o_i)$  non-biaisés de degré borné par  $M$ . Alors, presque sûrement  $G$  est récurrent.*

C'est un résultat important car il démontre la conjecture sur les triangulations de la sphère dans le cas où les degrés sont bornés. D'ailleurs, ce théorème peut être vu comme un corollaire de lui-même dans le cas particulier des triangulations de la sphère et de la monotonie de Rayleigh. Ainsi, l'important est de bien comprendre ce qui arrive dans le cas des triangulations de la sphère. Mais, avant de regarder les éléments combinatoires qui permettent d'arriver à ce théorème, on va regarder un exemple parlant qui est celui de l'arbre binaire.

**Exemple** (l'arbre binaire). Pour la suite de graphes  $(G_i)$ , on prend les arbres binaires de hauteur  $i$ . On remarque que l'arbre binaire infini, qui est la limite

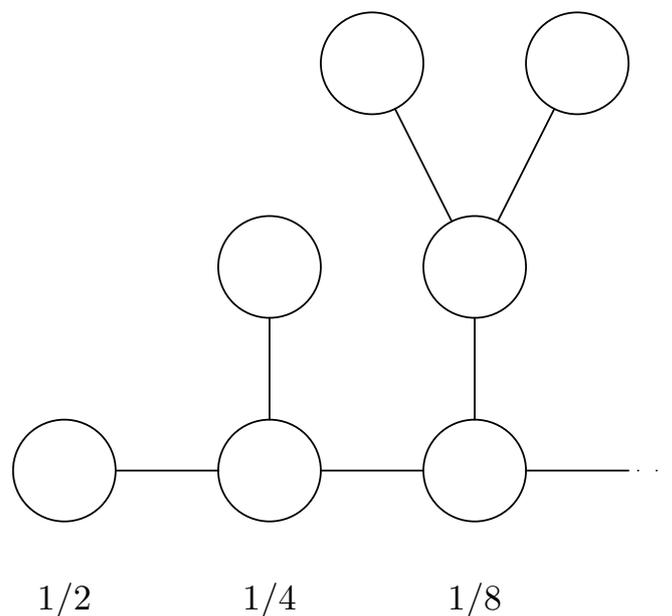


FIGURE 1 – La limite en loi d’une suite d’arbres binaires enracinés de manière uniforme. Les chiffres sous les sommets du dessous indiquent la probabilité d’être le noeud racine.

de cette suite de graphes, est transient (on a une chance sur trois de remonter et deux sur trois de descendre). Mais, si on les regarde enracinés de manière uniforme (et non pas sur la racine originelle), on a plus de chances d’être proche des feuilles de l’arbre que de la racine originelle. Ainsi, la limite en loi de cette suite devient le graphe de la figure 1, qui, lui, est récurrent car on a affaire à un peigne où les branches sont des arbres binaires finis.

Maintenant, on va s’intéresser à deux points qui sont utiles pour démontrer le théorème de Benjamini et Schramm. Le premier de ces points sera la notion de points  $(\delta, s)$ -étalés et le second sera sur les empilements de cercles.

## 2.2 Points $(\delta, s)$ -étalés.

La notion de points  $(\delta, s)$ -étalés est une notion qui a été introduite par Benjamini et Schramm dans [2] pour démontrer leur théorème. Tout d’abord, on va définir ce que sont les points  $(\delta, s)$ -étalés avant d’énoncer le résultat les concernant. On commence d’abord par définir le rayon d’isolement d’un point  $w$  dans un ensemble  $C$  de points.

**Définition 2.2** (rayon d’isolement). On définit le rayon d’isolement de  $w \in C$  comme  $\rho_w = \inf\{|v - w| : v \in C \setminus \{w\}\}$ , c’est la distance la plus petite entre  $w$  et un autre point de  $C$ .

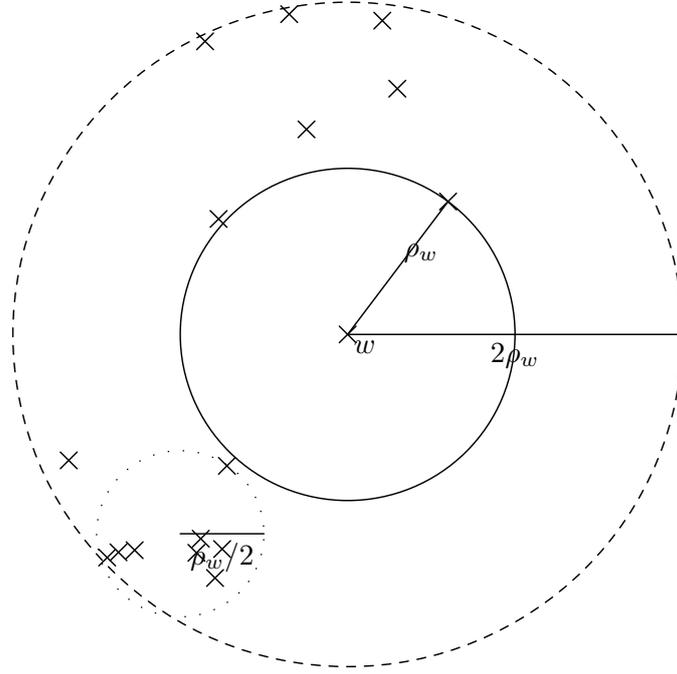


FIGURE 2 – Un point  $(0.5, 7)$ -étalé.

Maintenant, on définit ce qu'est un point  $(\delta, s)$ -étalé.

**Définition 2.3** (point  $(\delta, s)$ -étalé). Soit  $\delta \in (0, 1)$ ,  $s > 0$ ,  $w \in C$ . On dit que  $w$  est  $(\delta, s)$ -étalé si

$$\inf_{p \in \mathbb{R}^2} |C \cap (\mathbb{B}(w, \delta^{-1}\rho_w) \setminus \mathbb{B}(p, \delta\rho_w))| \geq s,$$

c'est-à-dire si, dans le disque centré en  $w$  de rayon  $\delta^{-1}\rho_w$  privé de n'importe quel disque de rayon  $\delta\rho_w$ , il y a plus de  $s$  points de  $C$ .

*Remarque.* Ainsi, un point  $(\delta, s)$ -étalé est un point qui a beaucoup de points autour de lui, mais ils ne sont pas tous concentrés en un endroit. En revanche, ils peuvent l'être en deux endroits. Ainsi, la notion de points  $(\delta, s)$ -étalés à un rapport avec les points d'accumulation.

On a l'exemple d'un point  $(\delta, s)$ -étalé sur la figure 2.

Maintenant, on énonce le résultat que Benjamini et Schramm ont montré, dans [2], sur les points  $(\delta, s)$ -étalés.

**Proposition 2.4.** Pour tout  $\delta \in (0, 1)$ , il existe une constante  $c = c(\delta)$  telle que pour tout ensemble  $C$  de points de  $\mathbb{R}^2$  et pour tout  $s \geq 2$ , on a

$$|\{w | w \text{ est un point } (\delta, s)\text{-étalé dans } C\}| \leq c \frac{|C|}{s}.$$

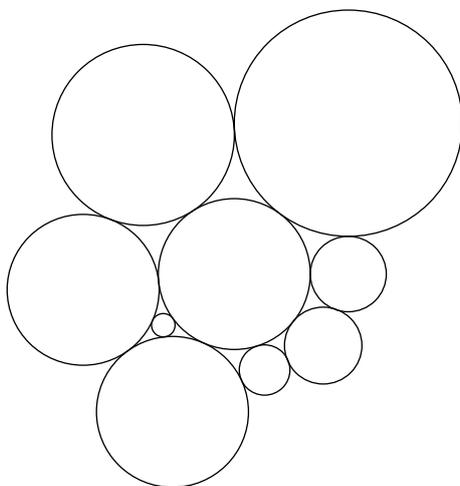


FIGURE 3 – Un empilement de cercles.

*Autrement dit, on peut trouver une majoration du nombre de points  $(\delta, s)$ -étalés dans un ensemble  $C$  ne dépendant que de  $\delta$ , de  $s$  et du cardinal de  $C$  et, donc, indépendante de la manière dont sont répartis les points de  $C$  dans le plan.*

Ce qu'il y a d'intéressant avec ce résultat, c'est que c'est un résultat très général puisqu'il concerne n'importe quel ensemble fini de points.

### 2.3 Empilements de cercles.

On passe, maintenant, au deuxième outil utile pour la démonstration, que sont les empilements de cercles.

**Définition 2.5** (empilement de cercles). Un empilement de cercles  $P$  est un ensemble de cercles inclus dans  $\mathbb{R}^2$  tel que deux cercles distincts de cet ensemble sont disjoints ou tangents.

Un exemple d'empilement de cercles est donné par la figure 3.

A chaque empilement de cercles, on peut associer un graphe dit graphe de tangence de la façon suivante.

**Définition 2.6** (graphe de tangence). Le graphe de tangence d'un empilement de cercles  $P$  est le graphe dont les sommets sont indexés par les cercles de  $P$  et il existe une arête entre deux sommets si les cercles correspondants sont tangents.

Les empilements de cercles sont un outil puissant pour étudier les graphes puisqu'ils permettent de donner une structure géométrique dans le plan aux

graphes, ce qui permet d'en déduire des propriétés sur ces derniers, comme nous allons le voir. On commence par un premier théorème qui permet de relier les empilements de cercles et les graphes.

**Théorème 2.7** (théorème de l'empilement de cercles). *Pour tout graphe  $G$  fini planaire, il existe un empilement de cercles  $P$  du plan dont le graphe de tangence est  $G$ . De plus, si  $G$  est une triangulation de la sphère, alors  $P$  est unique aux transformations de Möbius près.*

C'est un résultat ancien dans la théorie des graphes. En effet, il a été démontré par Koebe en 1936 dans [3]. Il est très utile pour faire le lien entre des problèmes géométriques et la théorie des potentiels des graphes planaires. De plus, il a des liens importants avec les fonctions analytiques. Dans notre cas, il permet de construire une suite d'empilements de cercles à partir de notre suite de graphes aléatoires enracinés uniformément et, ensuite, d'appliquer le théorème qui suit à la limite de cette suite d'empilements de cercles.

**Théorème 2.8** (théorème de He et Schramm). *Si  $T$  est un graphe de tangence à degré borné d'un empilement de cercles  $P$  sans point d'accumulation, alors  $T$  est récurrent.*

On peut assouplir très aisément les hypothèses de ce théorème et obtenir le corollaire suivant.

**Corollaire 2.9.** *Si  $T$  est un graphe de tangence à degré borné d'un empilement de cercles  $P$  avec au plus un point d'accumulation, alors  $T$  est récurrent.*

Ce théorème a été démontré par He et Schramm dans [4]. C'est un théorème qui permet de lier la récurrence d'un graphe planaire infini avec le nombre de points d'accumulation de son empilement de cercles. Il est utile pour nous puisqu'on peut, en se servant de la majoration sur les points  $(\delta, s)$ -étalés, montrer que la limite de notre suite d'empilements de cercles possède au plus un point d'accumulation.

## 2.4 Application du théorème de Benjamini et Schramm : $\mathbb{Z}^3$ n'est pas planaire.

Dans cette partie, nous allons présenter une application du théorème de Benjamini et Schramm qui est de pouvoir montrer que certains graphes ne sont pas planaires. Ainsi, on peut démontrer grâce à ce théorème que  $\mathbb{Z}^3$  n'est pas planaire et, même mieux, en fait.

**Corollaire 2.10.** *Il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que, pour tout  $n \geq N$ ,  $[-n, n]^3 \cap \mathbb{Z}^3$  n'est pas planaire.*

On va faire la preuve de cette application du théorème de Benjamini et Schramm.

*Démonstration.* On suppose (absurde) que, pour tout  $n$ ,  $G_n = [-n, n]^3 \cap \mathbb{Z}^3$  est planaire. Ensuite, on enracine ces graphes de manière uniforme sur les sommets  $\mathbf{o}_n$ . On obtient donc une suite de graphes planaires  $(G_n, \mathbf{o}_n)$  de degré borné par 6. Donc, en appliquant le théorème de Benjamini et Schramm, on en déduit que, si la limite existe, elle est presque sûrement récurrente.

Maintenant, on va montrer que la limite de  $(G_n, \mathbf{o}_n)$  est presque sûrement  $\mathbb{Z}^3$  et n'est donc pas presque sûrement récurrente. Pour montrer cela, on va montrer que pour tout  $d \in \mathbb{N}$  et pour tout  $\epsilon \geq 0$ , il existe  $N$  tel que pour tout  $n \geq N$ , on a

$$P(B_{G_n}(o_n, d)) = [-d, d]^3 \geq \epsilon.$$

Ce qui est trivial car

$$P(B_{G_n}(o_n, d)) = [-d, d]^3 = \frac{(n-d)^3}{n^3} = \left(1 - \frac{d}{n}\right)^3.$$

Ainsi, on obtient bien la convergence de  $(G_n, \mathbf{o}_n)$  vers  $\mathbb{Z}^3$  presque sûrement. Et, donc, on en déduit qu'il existe  $N$  tel que  $G_N$  n'est pas planaire et, comme tout sous-graphe d'un graphe planaire est planaire, que, pour tout  $n \geq N$ ,  $G_n$  n'est pas planaire.  $\square$

## Références

- [1] J. Ambjørn, B. Durhuus, and P. Jónsson, *Quantum geometry : a statistical field theory approach*, ser. Cambridge monographs on mathematical physics. Cambridge University Press, 1997.
- [2] I. Benjamini and O. Schramm, "Recurrence of distributional limits of finite planar graphs," *Electronic Journal of Probability*, vol. 6, pp. 1–13, 2001.
- [3] P. Koebe, "Kontaktprobleme der konformen Abbildung," in *Bertinoro Workshops*, 1936.
- [4] Z.-X. He and O. Schramm, "Hyperbolic and parabolic packings," *Discrete and Computational Geometry*, vol. 14, no. 1, pp. 123–149, 1995.