Recouvrements aléatoires

Daphné Dieuleveut et Thibaut Castan
Sujet proposé par Jean Bertoin

15 octobre 2009

Table des matières

1 Introduction

Les problèmes de recouvrements aléatoires consistent à étudier le recouvrement d'ensembles de "grande taille" par des parties choisies au hasard.
L'objet de notre mémoire est le problème suivant, posé par Aryeh Dvoretzky en 1956 :

> On se place sur le cercle de longueur 1 : $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.
> On considère une suite d'arcs de cercle $(I_n)_{n\geq 1}$, de longueurs données par des réels $(l_n)_{n\geq 1}$ dans $]0,1[$, de centres répartis de façon indépendante et uniformément distribués sur $\mathbb{T}$. On étudie l'ensemble E des points recouverts une infinité de fois par ces arcs de cercle, et en particulier on cherche une condition sous laquelle E recouvre presque sûrement $\mathbb{T}$.

P. Billard a apporté des premiers éléments de réponses, repris ensuite par J.-P. Kahane, permettant de déterminer la dimension de Hausdorff du complémentaire de E dans $\mathbb{T}$.
Un résultat plus spectaculaire fut apporté en 1972 par L. Shepp, apportant une condition nécessaire et suffisante sur la suite l_n pour que $\mathbb{T}$ soit recouvert par E. Le but de ce dossier est de montrer la seconde forme du théorème de Shepp :

$$\mathbb{T} = E \ p.s. \iff \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \times e^{l_1+\ldots+l_n} = +\infty$$

Pour atteindre cet objectif, nous commencerons par quelques résultats simples, puis nous aboutirons à une première formulation du théorème de Shepp. La seconde forme s'en déduit par des considérations touchant à l'analyse fonctionnelle.

2 Préliminaires

2.1 Notations

Nous allons, dans cette partie, introduire des notations essentielles pour la suite de ce sujet. On considère tout d'abord une suite décroissante $(l_n)_{n\geq 1}$ dans [0,1], puis $(\omega_n)_{n\geq 1}$ un ensemble de point, répartis uniformément sur $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. On note alors $(I_n)_{n\geq 1}$ des arcs centrés en ω_n et de longueur l_n. Ainsi, on a $E = \limsup_{n\to\infty} I_n$, et par la suite, $F = E^C$. Par ailleurs, on notera $\limsup I_n$ pour $\limsup_{n\to\infty} I_n$, par souci de clarté et absence de confusion possible. Nous aurons aussi besoin des ensembles :

$$U_n = \bigcup_{k=1}^{n} I_k$$
$$F_n = \mathbb{T} \setminus U_n.$$

Notons la fonction indicatrice du segment $[-\frac{l_n}{2}, \frac{l_n}{2}]$ χ_n. Remarquons alors que
$E = \limsup I_n = \{t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \mid \sum_{n=1}^{\infty} \chi_n(t - \omega_n) = \infty\}$.
On pose, pour n entier strictement positif : $\xi_n : \chi_n * \chi_n$, ie pour $t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, $\xi_n(t) = \max(0, l_n - |t|)$. Enfin nous noterons par la suite : pour $n \in \mathbb{N}^*$ si $[\alpha,\beta]$ est un intervalle, on note $\mu_n([\alpha,\beta]) = \lambda([\alpha,\beta] \cap F_n)$ où λ est la mesure de Lebesgue. On pose alors : $\mu_n(\epsilon) = \mu_n([0, \epsilon])$.

2.2 Premiers résultats

Propositions préliminaires :

- F est σ -compact

- E est dense dans $\mathbb{T}$ p.s.

- F est maigre dans chaque intervalle de $\mathbb{T}$, c'est-à-dire contenu dans une réunion dénombrable d'ensemble d'intérieur vide.

Démonstration.
$*$ F est σ -compact : F = $\{x \in \mathbb{T} \mid$ x recouvert un nombre fini de fois par les $I_n\}$
$*$ Montrons que E est dense dans $\mathbb{T}$ p.s. et F maigre dans chaque intervalle.
Soit I un intervalle de longueur α, alors :

$$P(I \cap I_n \neq \emptyset) = P(\exists \omega \in I_n \mid \omega \in I) \geq P(\omega \in I) = \alpha$$

soit

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P(I \cap I_n \neq \emptyset) = +\infty$$

et comme les évènements $(I \cap I_n \neq \emptyset)_{n\geq 1}$ sont indépendants, par Borel-Cantelli :

$$P(\limsup(I \cap I_n \neq \emptyset)) = 1.$$

Or, par définition,

$$P(\limsup(I \cap I_n \neq \emptyset)) = P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} \bigcup_{k=n}^{+\infty} (I_k \cap I) \neq \emptyset\right) = P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} \left(\left(\bigcup_{k=n}^{+\infty} I_k\right) \cap I\right) \neq \emptyset\right) = 1$$

De plus, pour tout n $\in \mathbb{N}^*$, on a $(\bigcup_{k=n}^{+\infty} I_k)$ est ouvert donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, P\left(\left(\bigcup_{k=n}^{+\infty} I_n\right) \cap I \neq \emptyset\right) = 1$$

d'où p.s., (en choisissant n=1) pour tout I :

$$\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} I_n\right) \cap I \neq \emptyset$$

et $(\bigcup_{n=1}^{+\infty} I_n)^C$ est fermé.
De plus soit I un ouvert de $\mathbb{T}$, on note

$$A = I \cap \left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} I_n\right)$$

$A \neq \emptyset$ p.s. et

$$A \cap \left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} I_n\right)^C = \emptyset$$

donc $(\bigcup_{n=1}^{+\infty} I_n)^C$ est nulle part dense. De même, $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ F_k = \left(\bigcup_{n=k}^{+\infty} I_n\right)^C$ est un fermé nulle part dense. Ainsi $\bigcup_{k=1}^{+\infty} F_k$ est maigre, par le théorème de Baire appliqué pour $\mathbb{T}$ espace métrique complet.

$$\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} F_n\right)^C = \bigcap_{n=1}^{+\infty} F_n^C = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \bigcup_{k=n}^{+\infty} I_n = \limsup I_n$$

donc $E = \limsup I_n$ est de seconde catégorie, et est dense dans $\mathbb{T}$.

□

- Propriétés :

$$(1) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} l_n < \infty \Rightarrow \lambda(E) = 0$$

$$(2) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} l_n = \infty \Rightarrow \lambda(F) = 0$$

Démonstration.
La propriété de recouvrement est indépendante des premiers termes, et si $\lambda(E) > 0$, alors il existe n $\in \mathbb{N}^*$ tel que $\sum_{k=n}^{\infty} l_n < \lambda(E)$. Or puisque les milieux des segments sont répartis uniformément dans $\mathbb{T}$, aucun ensemble ne peut-être recouvert une infinité de fois, soit $\lambda(E) = 0$
Le (2) découle de Borel-Cantelli : on a $P(\omega \in I_n) = l_n$ aussi

$$(2) \ \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} P(\omega \in I_n) = \infty$$

et les I_n sont indépendants, donc P($limsup I_n$) = 1, soit $P(F) = P(E^C) = 0$ □

3 Théorème de Shepp : une première forme

Nous allons nous intéresser ici à la probabilité de l'évènement $\mathbb{T} = \limsup I_n$. Cet évènement a une probabilité 0 ou 1 par application de la loi du tout ou rien. Le but de cette partie sera de démontrer la première forme du théorème de Shepp, essentiel pour aboutir au deuxième énoncé. Celle-ci s'écrit :

$$\limsup I_n = \mathbb{T} \Longleftrightarrow \int_0^1 \exp\,(\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n(t))dt = \infty.$$

3.1 Une première approche

Nous allons dans cette section démontrer une proposition qui semble assez éloignée de l'énoncé du premier théorème de Shepp. Cependant, le corollaire que nous déduirons nous permettra de distinguer des cas afin d'obtenir une condition suffisante au recouvrement de $\mathbb{T}$.

Proposition 1.

$$Si \ \limsup \ \frac{1}{n} \exp\,(l_1 + ... + l_n) = \infty$$
$$alors \ \mathbb{T} = \limsup \ I_n \ p.s.$$

Démonstration.
Notons $u_n = \frac{1}{n} \exp\,(l_1 + ... + l_n)$ pour tout n $\in \mathbb{N}^*$, et on fait l'hypothèse $\limsup u_n = \infty$. De plus on note $\Lambda = \{n \in \mathbb{N}^* \mid u_n \geq \sup_{m<n} u_m\}$. Alors Λ est infini, $(u_n)_{n\in\Lambda}$ est croissante, et $\lim_{n\in\Lambda, n\to\infty} u_n = \infty$, par hypothèse.
Pour tout $n \in \Lambda \setminus \{1\}$:

$$\begin{aligned} u_n \geq u_{n-1} \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{1}{n}\exp(l_1 + ... + l_n) \geq \frac{1}{n-1}\exp(l_1 + ... + l_{n-1}) \\ &\Longleftrightarrow \quad \exp l_n \geq \frac{n}{n-1} \\ &\Longleftrightarrow \quad l_n \geq \log(1 + \frac{1}{n-1}) \geq \frac{1}{n-1} \\ &\Longrightarrow \quad l_n > \frac{1}{2n}. \end{aligned}$$

On note alors pour tout n $\in \mathbb{N}^*$: $\forall j \in [\![0, 2n-1]\!] : t_j = \frac{j}{2n}$
On remarque que $\mathbb{T}$ est recouvert par $\bigcup_{j=0}^{2n-1} [t_j - \frac{1}{4n}; t_j + \frac{1}{4n}]$. Par ailleurs pour tout $m \in [\![1, n]\!]$, puisque $l_m > \frac{1}{2n}$, *si* $I_m =]a, b[$, *on note* $I'_m =]\ a + \frac{1}{4n}\ ,\ b - \frac{1}{4n}\ [$.
On a ainsi :

$$P(\mathbb{T} \neq U_n) \ \leq \ P\left(\exists j \mid \left[t_j - \frac{1}{4n}, t_j + \frac{1}{4n}\right] \nsubseteq U_n\right)$$

car sinon, on aurait

$$\forall j \in [\![\ 0\ ,\ 2n-1\ ]\!]\ , \left[t_j - \frac{1}{4n}; t_j + \frac{1}{4n}\right] \subseteq U_n \Rightarrow \mathbb{T} \subset U_n \Rightarrow \mathbb{T} = U_n.$$

Or

$$\begin{aligned} \exists j \mid [t_j - \frac{1}{4n}, t_j + \frac{1}{4n}] \nsubseteq U_n = I_1 \cup ... \cup I_n \quad &\Rightarrow \quad \exists j \mid d(t_j, \partial U_n) < \frac{1}{4n} \\ &\Rightarrow \quad \exists j \mid t_j \notin I'_1 \cup ... \cup I'_n \end{aligned}$$

donc

$$P(\mathbb{T} \neq U_n) \leq P(\exists j \mid t_j \notin I'_1 \cup ... \cup I'_n).$$

Or par indépendance du choix des I_n , donc des I'_n :

$$P(t_j \notin I'_1 \cup ... \cup I'_n) = P(t_j \notin I'_1) \times ... \times P(t_j \notin I'_n)$$

et comme $P(t_j \notin I'_m) = 1$ - longueur de $I'_m = 1 - (l_m - \frac{1}{2n})$, on a ainsi :

$$\begin{aligned}
P(\mathbb{T} \neq U_n) &\leq P(\exists j \mid t_j \notin I'_1 \cup ... \cup I'_n) \\
&\leq 2n \prod_{m=1}^{n} \left(1 - l_m + \frac{1}{2n}\right) \\
&\leq 2n \exp\left(\sum_{m=1}^{n} \log\,(1 - l_m + \frac{1}{2n})\right) \\
&\leq 2n \exp\left(- \sum_{m=1}^{n} (l_m - \frac{1}{2n}\right) \\
&\leq 2n \exp\left(-\frac{1}{2} + (l_1 + ... + l_n)\right) .
\end{aligned}$$

On fait alors tendre n vers ∞ pour n $\in \Lambda$, et par hypothèse on a donc :

$$P(\mathbb{T} \neq U_n) \longrightarrow 0 \;\; [n \to \infty] \; d'où \; P\left(\mathbb{T} \neq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right) = 0.$$

De même, par indépendance de la limsup par rapport aux premiers éléments de la suite u_n, on a :

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \; P(\mathbb{T} \neq \bigcup_{n=m}^{\infty} I_n) = 0.$$

Ainsi, on obtient donc :

$$limsup\; I_n = \mathbb{T}\; p.s..$$

□

On peut alors déduire le corollaire suivant :

Corollaire 2.

$$Si \sum_{n \leq 1} l_n^2 = \infty$$

$$alors\; limsup\; I_n = \mathbb{T}\; p.s.$$

Démonstration.
On considère $A = \{n \in \mathbb{N}^* \mid l_n > n^{-\frac{2}{3}}\}$. Si A est fini, alors on a :

$$\sum_{n=1}^{\infty} l_n^2 = \sum_{n \in A} l_n^2 + \sum_{n \notin A} l_n^2.$$

On majore la somme finie sur les éléments de A par K, constante. On obtient :

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} l_n^2 &\leq K + \sum_{n \notin A} n^{-\frac{2}{3}\times 2} \\ &\leq K + \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{4}{3}} \\ &< \infty .\end{aligned}$$

Absurde par hypothèse, donc A est infini.

Aussi pour tout $n \in A$: $l_1 + ... + l_n > n \times n^{-\frac{2}{3}} > n^{\frac{1}{3}}$. Aussi, on a :

$$\frac{1}{n} \exp(n^{\frac{1}{3}}) \longrightarrow \infty \Rightarrow limsup\ \frac{1}{n}\ exp\ (l_1 + ... + l_n) = \infty$$

d'où, finalement :

$$limsup\ I_n = \mathbb{T}\ p.s.$$

□

On peut donc maintenant effectuer une distinction de cas, en considérant soit le cas où la série de terme générale (l_n^2) diverge, et on a alors recouvrement,soit celui où cette série converge. On a alors besoin de condition plus restrictive sur la suite l_n.

3.2 Un résultat plus précis

On suppose dans cette section : $l_1 < \frac{1}{2}\ et\ \sum_{n=1}^{\infty} l_n^2 < \infty$. Alors on a la condition nécessaire suivante :

Proposition 3.

$$si\ pour\ \epsilon \in]0,1[,\ on\ a :\ \int_0^{\epsilon} \exp\ (\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n(t))\ dt\ =\ \infty$$

$$alors\ \mathbb{T} = \limsup\ I_n\ p.s.$$

Remarque préliminaire :
Commençons par expliciter la somme des termes ξ : puisque l'on a $\sum_{n=1}^{\infty} l_n^2 < \infty$, il est clair que l_n décroit vers 0 quand n tend vers l'infini. Aussi, pour tout $t \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $l_m < t$, et m minimal pour cette propriété (on rappelle que la suite $(l_n)_{n\geq 1}$ est décroissante). Ainsi, on a clairement :

$$\forall t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}],\ \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n(t)\ =\ \sum_{n=1}^{m-1} l_n\ -\ (m-1)t$$

On revient à la démonstration de la proposition.

Démonstration.
Commençons par quelques notations :
On fixe $n \in \mathbb{N}^*$.
$A = \{F_n \cap [0, \epsilon] \neq \emptyset\}$ et pour N entier strictement positif : $A^N = \{F_n \cap [0, \epsilon]\ contient\ un\ intervalle\ de\ longueur\ \frac{1}{N}\ \}$.
On a clairement : $\lim_{N\to\infty} P(A^N) = P(A)$. On choisit maintenant $0 < 2\epsilon < 1 - l_1\ et\ N \in \mathbb{N}^*$. Si $A^N \neq \emptyset$, alors il existe $j \in [\![0, \lfloor N\epsilon \rfloor]\!]$ tel que $\frac{j}{N} \in F_n$.

On note encore : $A_0 = \{0 \in F_n\}$ et pour $j \in [\![1, \lfloor N\epsilon \rfloor]\!]$, $A_j = \{0 \in U_n,\ \frac{1}{N} \in U_n, ...,\ \frac{j-1}{N} \in U_n, \frac{j}{N}\}$. Or comme on a soit $\frac{j}{N} \in U_n$, soit $\frac{j}{N} \in F_n$, les $(A_j\ ,\ j \in [\![0, \lfloor N\epsilon \rfloor]\!]\ )$ constituent une partition de A^N, et donc

$$P(A^N) = \sum_{j=0}^{\lfloor N\epsilon \rfloor} P(A_j)$$

Afin de démontrer la proposition, nous avons besoin d'un résultat intermédiaire mais essentiel. Nous conserverons les notations précédentes pour le résultat et la démonstration du lemme suivant :

Lemme 4.

$$E(\mu_n(2\epsilon)) \geq P(A) \times E(\mu_n(\epsilon) \mid\ 0 \in F_n)$$

Démonstration.
On restreint d'abord l'étude à A_j , pour $j \in [\![0, \lfloor N\epsilon \rfloor]\!]\ ,\ N \in \mathbb{N}^*$. On veut donc montrer :

$$E(\mu_n(2\epsilon)\mathbb{1}_{A_j}) \geq P(A_j) \times E(\mu_n(\epsilon) \mid\ 0 \in F_n)$$

On a pour $j \in [\![0, \lfloor N\epsilon \rfloor]\!]\ ,\ k \in [\![\ 1\ ,\ n\ ]\!]$:

$$\{x \in I_k\} \cap \left\{\frac{j}{N} \notin I_k\right\} \Rightarrow \left[0, \frac{j-1}{N}\right] \cap I_k = \emptyset\ .$$

On a donc pour tout $i \in [\![0, j-1]\!]$,

$$\frac{i}{N} \in U_n \Leftrightarrow\ \frac{i}{N} \in U_n \setminus I_k\ .$$

Aussi pour $x \in [\frac{j}{N}, \frac{j}{N} + \epsilon]$:

$$P\left(0 \in U_n, ..., \frac{j-1}{N} \in U_n \mid \frac{j}{N}, x \notin I_1 \cup ... \cup I_{k-1}, x \in I_k\right) \leq P\left(0 \in U_n, ..., \frac{j-1}{N} \in U_n \mid \frac{j}{N}, x \in F_n\right).$$

Or $(I_k \setminus (I_1 \cup ... \cup I_{k-1}))_{k \in [\![1,n]\!]}$ est une partition de U_n. On a ainsi :

$$\begin{aligned} P(0 \in U_n, ..., \frac{j-1}{N} \in U_n \mid \frac{j}{N}, x \in U_n) &\leq P(0 \in U_n, ..., \frac{j-1}{N} \in U_n \mid \frac{j}{N}, x \in F_n) \\ &\leq P(0 \in U_n, ..., \frac{j-1}{N} \in U_n \mid \frac{j}{N}). \end{aligned}$$

Donc en écrivant les formules de façon explicite, on a :

$$\frac{P(0 \in U_n, ..., \frac{j-1}{N} \in U_n, \frac{j}{N}, x \in U_n)}{P(\frac{j}{N} \in F_n, x \in U_n)} \leq \frac{P(0 \in U_n, ..., \frac{j-1}{N} \in U_n, \frac{j}{N})}{P(\frac{j}{N} \in F_n)}$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \quad \frac{P(0 \in U_n, ..., \frac{j-1}{N} \in U_n, \frac{j}{N}, x \in U_n)}{P(0 \in U_n, ..., \frac{j-1}{N} \in U_n, \frac{j}{N})} \leq \frac{P(\frac{j}{N} \in F_n, x \in U_n)}{P(\frac{j}{N} \in F_n)} \\ &\Leftrightarrow \quad P(x \in U_n \mid A_j) \leq P(x \in U_n \mid \frac{j}{N} \in F_n) \\ &\Leftrightarrow \quad P(x \in F_n \mid A_j) \geq P(x \in F_n \mid \frac{j}{N} \in F_n)\ . \end{aligned}$$

Ainsi, on peut écrire :

$$E(\mu_n(\frac{j}{N},\frac{j}{N}+\epsilon)\mid A_j) \geq E(\mu_n(\frac{j}{N},\frac{j}{N}+\epsilon)\mid \frac{j}{N}\in F_n)\ .$$

Or, puisqu'on a une répartition uniforme des milieux des segments sur le cercle, par translation, on obtient :

$$E(\mu_n(\frac{j}{N},\frac{j}{N}+\epsilon)\mid \frac{j}{N}\in F_n) = E(\mu_n(0,\epsilon)\mid 0\in F_n)\ .$$

On a donc :

$$\frac{E(\mu_n(\frac{j}{N},\frac{j}{N}+\epsilon)\mathbb{1}_{A_j})}{E(\mathbb{1}_{A_j})} \geq E(\mu_n(0,\epsilon)\mid 0\in F_n)$$

or

$$\begin{aligned} E(\mu_n(2\epsilon)\mathbb{1}_{A_j}) &\geq E(\mu_n(\frac{j}{N},\frac{j}{N}+\epsilon)\mathbb{1}_{A_j}) \\ &\geq P(A_j)\times E(\mu_n(0,\epsilon)\mid 0\in F_n). \end{aligned}$$

En sommant pour j allant de 0 à $\lfloor N\epsilon \rfloor]\!]$, nous avons ainsi :

$$E(\mu_n(2\epsilon)) \geq P(A)\times E(\mu_n(0,\epsilon)\mid 0\in F_n)\ .$$

□

Revenons maintenant à la preuve de la proposition :
Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Par définition de μ_n , on peut écrire :

$$\begin{aligned} E(\mu_n(2\epsilon)) &= \int_0^{2\epsilon} E(t\in\mathbb{T}\setminus(I_1\cup ...\cup I_n)dt \\ &= \int_0^{2\epsilon} E(\prod_{j=1}^{n}(1-\chi_j(t-\omega_j)))dt \end{aligned}$$

car $\mathbb{T}\setminus(I_1\cup ...\cup In) = (\mathbb{T}\setminus I_1)\cap ...\cap(\mathbb{T}\setminus I_n)$ et χ_j fonction indicatrice de $[-\frac{l_j}{2},\frac{l_j}{2}]$. On a encore :

$$E(\mu_n(2\epsilon)) = \int_0^{2\epsilon}\prod_{j=1}^{n} E(1-\chi_j(t-\omega_j))dt$$

et comme $E(1-\chi_j(t-\omega_j)) = P(\mathbb{1}_{\mathbb{T}\setminus I_j}) = 1-l_j$, il suit :

$$E(\mu_n(2\epsilon)) = 2\epsilon\prod_{j=1}^{n}(1-l_j)\ .$$

Par ailleurs, on peut écrire

$$E(\mu_n(\epsilon)\mid 0\in F_n) = \frac{E(\mu_n(\epsilon)\mathbb{1}_{0\in F_n})}{P(0\in F_n)}$$

or $P(0 \in F_n) = \prod_{j=1}^{n}(1-l_j)$ et

$$\begin{aligned} E(\mu_n(\epsilon)\mathbb{1}_{0\in F_n}) &= \int_0^\epsilon E(\prod_{j=1}^{n}(1-\chi_j(t-\omega_j)) \times \prod_{i=1}^{n}(1-\chi_i(-\omega_i)))dt \\ &= \int_0^\epsilon \prod_{j=1}^{n}(E((1-\chi_j(t-\omega_j)) \times (1-\chi_j(-\omega_j)))dt \\ &= \int_0^\epsilon \prod_{j=1}^{n}(E((1-\chi_j(t-\omega_j) - \chi_j(-\omega_j) + \chi_j(t-\omega_j) \times \chi_j(t))dt \\ &= \int_0^\epsilon \prod_{j=1}^{n}(1-2l_j+\xi_j(t))dt\ . \end{aligned}$$

Aussi

$$E(\mu_n(2\epsilon)) = \frac{1}{\prod_{j=1}^{n}(1-l_j)} \times \int_0^\epsilon \prod_{j=1}^{n}(1-2l_j+\xi_j(t))dt$$

et donc, suite au lemme :

$$\begin{aligned} 2\epsilon &\geq P(A) \times (\prod_{j=1}^{n}(1-l_j))^{-2} \times \int_0^\epsilon \prod_{j=1}^{n}(1-2l_j+\xi_j(t))dt \\ &\geq P(A) \times \int_0^\epsilon \prod_{j=1}^{n}(1+\frac{\xi_j(t)-l_j^2}{(1-l_j^2)^2})dt\ . \end{aligned}$$

De plus $\sum_{n=1}^{\infty} l_n^2 < \infty$, donc comme $l_1 \leq 1/2$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\frac{1}{(1-l_n)^2} \leq 4$

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{l_j^2}{(1-l_j)^2} \leq 4 \times \sum_{j=1}^{n} l_j^2 = O(1)\ [n \to +\infty]$$

et

$$\sum_{j=1}^{n}(\xi_j(t)-l_j^2) \times (1-l_j)^{-2} = \sum_{j=1}^{n}\xi_j(t)\ +\ O(1)\ [n \to +\infty]$$

On a par ailleurs

$$\begin{aligned} \prod_{j=1}^{n}(1+\frac{\xi_j(t)-l_j^2}{(1-l_j^2)^2}) &= \exp(\sum_{j=1}^{n}\log(1+\frac{\xi_j(t)-l_j^2}{(1-l_j^2)^2})) \\ &\leq \exp(\sum_{j=1}^{n}\frac{\xi_j(t)-l_j^2}{(1-l_j^2)^2}) \\ &\leq \exp(\sum_{j=1}^{n}\xi_j(t)\ +\ O(1)) \\ &\leq K \times \exp(\sum_{j=1}^{n}\xi_j(t)),\ K\ \textit{constante ne dépendant que de}\ (l_n)_{n\geq 1}\ . \end{aligned}$$

Ainsi

$$\frac{2}{K} \times \epsilon \geq P(A)\int_0^\epsilon \exp(\sum_{j=1}^{n}\xi_j(t))dt$$

donc comme $\lim_{n\to\infty}\int_0^\epsilon \exp\,(\sum_{j=1}^n \xi_j(t))\,dt = \infty$, on a donc P(A) = 0 .
Ainsi $lim_{n\to\infty}P(F_n \cap [0,\epsilon] \neq \emptyset) = 0$, d'où

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \cap [0,\epsilon] \neq \emptyset\right) = 0\ .$$

On a donc pour tout intervalle la même relation par translation, et donc $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \emptyset\ p.s.$, c'est à dire $\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n = \mathbb{T}$ p.s. , et de même pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $\bigcup_{n=m}^{\infty} I_n = \mathbb{T}$ p.s. . D'où

$$\limsup I_n \;=\; \mathbb{T}\ p.s.$$

□

Ainsi, dans le cas de convergence de la série de terme général les (l_n^2), on a obtenu proposition faisant intervenir une autre hypothèse proche de celle du théorème de Shepp pour le recouvrement. Nous verrons plus tard que le corollaire 2 et la proposition 3 forment à elle deux la condition suffisante au recouvrement dans le premier théorème de Shepp. Nous sommes donc maintenant amener à chercher une condition nécessaire au recouvrement.

3.3 Une condition nécessaire

Il est maintenant intéressant de trouver une condition proche de la précédente qui s'avèrerait nécessaire au recouvrement. On va en fait prouver que si l'hypothèse de la proposition 3 n'est pas remplie, alors on ne peut avoir recouvrement. Le résultat est le suivant :

Proposition 5.

$$Si\ pour\ \epsilon \in]0,1[,\ on\ a :\ \int_0^\epsilon \exp\,(\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n(t)\,dt \;<\; \infty$$
$$alors\ \ \mathbb{T} \neq \limsup\ I_n\ p.s.\ .$$

Remarque :
Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $t \leq \exp\,(t)$, aussi l'hypothèse implique :

$$\int_0^\epsilon (\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n(t)\,dt \;<\; \infty$$

or ξ_n est positif pour $|t| \leq \frac{1}{2}$ donc par Fubini-Tonnelli :

$$\int_0^\epsilon (\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n(t)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty}(\int_0^\epsilon \xi_n(t)dt)$$

et pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_0^\epsilon \xi_n(t)dt = \int_0^{\min(\epsilon,l_n)} (l_n - |t|)\,dt = [l_n t - \frac{t^2}{2}]_0^{\min(\epsilon,l_n)}\ .$$

Or si on choisit $\epsilon = l_1$, on a donc :

$$\int_0^\epsilon \xi_n(t)dt = \frac{l_n^2}{2}$$

d'où

$$\sum_{n=1}^{\infty} l_n^2 < \infty\ .$$

Revenons maintenant à la preuve de la proposition :

Démonstration.
soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\epsilon \in [0,1]$. On note comme dans la partie précédente l'évènement $A = \{F_n \cap [0,\epsilon] \neq \emptyset\}$. On a vu $\mu_n(\epsilon) = \epsilon \times \prod_{j=1}^{n}(1-l_j)$ et par ailleurs :

$$\begin{aligned}
(E(\mu_n(\epsilon)))^2 &= (E(\mu_n(\epsilon)\mathbb{1}_A))^2 \\
&\leq E((\mathbb{1}_A^2) \times E(\mu_n^2(\epsilon)) \\
&\leq P(A) \times E(\mu_n^2(\epsilon)) \,.
\end{aligned}$$

On peut écrire :

$$\begin{aligned}
E(\mu_n^2(\epsilon)) &= E(\int_0^\epsilon \int_0^\epsilon \prod_{j=1}^{n}(1-\chi_j(t-\omega_j)) \times \prod_{i=1}^{n}(1-\chi_i(s-\omega_i))\, dt \times ds) \\
&= \int_0^\epsilon \int_0^\epsilon \prod_{j=1}^{n} E((1-\chi_j(t-\omega_j)) \times (1-\chi_j(s-\omega_j))\, dt \times ds \\
&= \int_0^\epsilon \int_0^\epsilon \prod_{j=1}^{n}(1-2l_j+\xi_j(t-s))\, dt \times ds \,.
\end{aligned}$$

On pose alors $u = t - s$, on a $\xi_j(u) = \sup(0, l_j - |u|)$ donc comme pour $j \in [1,n]$ et $u \in [-\epsilon,\epsilon]$, on a $l_j \leq \frac{1}{2}$: $1 - 2l_j + \xi j(u) \geq 0$. Par ailleurs $\xi_j(u) = \xi_j(-u)$, ainsi on obtient :

$$\begin{aligned}
E(\mu_n^2(\epsilon)) &= \int_0^\epsilon \int_{-s}^{-s+\epsilon} \prod_{j=1}^{n}(1-2l_j+\xi_j(u))\, du \times ds \\
&\leq \int_0^\epsilon \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \prod_{j=1}^{n}(1-2l_j+\xi_j(u))\, du \times ds \\
&\leq 2 \times \int_0^\epsilon \int_0^\epsilon \prod_{j=1}^{n}(1-2l_j+\xi_j(u))\, du \times ds \,.
\end{aligned}$$

On a donc

$$E(\mu_n^2(\epsilon)) \leq 2\epsilon \int_0^\epsilon \prod_{j=1}^{n}(1-2l_j+\xi_j(t))\, dt$$

et ainsi

$$(E(\mu_n(\epsilon)))^2 = \epsilon^2 \times (\prod_{j=1}^{n}(1-l_j))^2 \leq P(A) \times 2\epsilon \int_0^\epsilon \prod_{j=1}^{n}(1-2l_j+\xi_j(t))\, dt \,.$$

En utilisant la même méthode que dans la section précédente :

$$\int_0^\epsilon \prod_{i=1}^{n}(\frac{1-2l_j+\xi_j(t)}{(1-l_j)^2})dt = \int_0^\epsilon \exp(\sum_{i=1}^{n}\xi_j(t) + O(1))dt$$

d'où

$$\epsilon \leq C \times P(A) \times \int_0^\epsilon \exp(\sum_{i=1}^{n}\xi_j(t))dt$$

où C est une constante dépendant uniquement de la suite $(l_n)_{n\geq 1}$. On fait alors tendre n vers l'infini , et on obtient alors $P(A) > 0$. Aussi pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(\{F_n \cap [0,\epsilon] \neq \emptyset\}) > 0$, c'est à dire

$$P([0,\epsilon] \nsubseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n) > 0 \,.$$

On en déduit donc

$$\mathbb{T} \neq \limsup I_n \ p.s. \ .$$

□

3.4 Le premier théorème de Shepp

La proposition 5 fournit comme nous allons le voir la condition nécessaire au recouvrement. Nous avons donc maintenant tous les éléments nécessaires à la démonstration du premier théorème de Shepp.

Théorème 6.

$$\limsup I_n = \mathbb{T} p.s. \Longleftrightarrow \int_0^1 \exp\,(\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n(t))dt = \infty \ .$$

Démonstration.
Supposons $\limsup I_n = \mathbb{T}$ p.s., alors par la proposition 5, on en déduit qu'il existe $\epsilon_0 \in]0, 1[$:

$$\int_0^{\epsilon_0} \exp\,(\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n(t))dt = \infty \ .$$

Ainsi par positivité de l'exponentielle, on a le résultat :

$$\int_0^1 \exp\,(\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n(t))dt = \infty \ .$$

Supposons maintenant $\int_0^1 \exp\,(\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n(t))dt = \infty$, alors puisque $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n(t)$ tend vers 0 quand t tend vers 1, et est strictement décroissante, on déduit que la divergence de cette intégrale vient de l'intégration au voisinage de 0. D'où, pour tout $\epsilon_0 \in]0, 1[$, $\int_0^{\epsilon} \exp\,(\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n(t))dt = \infty$. On utilise maintenant la distinction de cas que nous avons évoqué précédemment. Il existe deux cas :
• *Cas* $\sum_{n=1}^{\infty} l_n^2 = \infty$:
alors par le corollaire de la proposition 1, on a directement $\limsup I_n = \mathbb{T} p.s.$.

• *Cas* $\sum_{n=1}^{\infty} l_n^2 < \infty$:
par la proposition 2 : $\limsup I_n = \mathbb{T} p.s.$.

Ainsi dans tous les cas

$$\limsup I_n = \mathbb{T} p.s. \ .$$

d'où l'équivalence. □

Nous avons donc maintenant un premier résultat donnant une condition nécessaire et suffisante au recouvrement, cependant ce résultat semble très difficile à utiliser, puisqu'il fait intervenir l'exponentielle d'une somme de convolées de fonctions indicatrices. Ainsi, il est nécessaire de l'améliorer pour obtenir un résultat plus utilisable plus aisément.

4 Théorème de Shepp : deuxième forme

4.1 Deux résultats techniques

La preuve du théorème du second théorème de Shepp repose sur deux lemmes d'analyse.

Lemme 7. *Soit $\varepsilon > 0$. Soit une fonction Φ convexe, strictement décroissante sur $]0,\varepsilon[$, telle que $\Phi'(t) \nrightarrow 0$ $[t \to \varepsilon]$. Alors :*

$$\int_0^\varepsilon e^{\Phi(t)}dt < +\infty \Longleftrightarrow \int_0^\varepsilon e^{\Phi(t)} \frac{d\Phi'(t)}{(\Phi'(t))^2} < +\infty$$

Remarques :

- La fonction Φ se prolonge par continuité en ε. En effet : Φ est continue (car convexe), et décroissante ; on a donc existence de $\lim_{\varepsilon^-} \Phi \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$; par convexité, on ne peut avoir $\lim_{\varepsilon^-} \Phi = -\infty$. Cela justifie en particulier, pour $\alpha > 0$, l'existence des quantités $\int_\alpha^\varepsilon e^{\Phi(t)}dt$, $\int_\alpha^\varepsilon e^{\Phi(t)} \frac{d\Phi'(t)}{(\Phi'(t))^2}$.
On notera dans la preuve

$$\Phi(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon^-} \Phi, \;\; \Phi'(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon^-} \Phi'.$$

- Si on omet l'hypothèse $\Phi'(t) \nrightarrow 0$ $[t \to \varepsilon]$, le résultat est faux.
En effet, la fonction $\Phi(t) = (t-1)^2$ est strictement décroissante, convexe sur $]0,1[$, et on a :

$$\int_0^1 e^{(t-1)^2}dt < +\infty$$

$$\int_0^1 e^{\Phi(t)} \frac{d\Phi'(t)}{(\Phi'(t))^2} = \int_0^1 e^{(t-1)^2} \frac{dt}{4(t-1)^2} = +\infty.$$

- L'écriture $\int_\alpha^\beta f \, d\Phi'(t)$, pour $0 < \alpha < \beta$, correspond à l'intégrale de Stieljes de f par rapport à Φ' au sens suivant :
Remarquons tout d'abord que Φ est convexe, donc dérivable sur $]0,\varepsilon[$ privé d'un ensemble au plus dénombrable. On définit Ψ fonction continue à droite sur $]0,\varepsilon[$, coïncidant avec Φ' sur son ensemble de définition. Par convexité de Φ, Ψ est croissante sur $]0,\varepsilon[$.

$$\forall \alpha > 0$$

, $M_\alpha = -\inf_{]\alpha,\varepsilon[} \Psi > -\infty$.

On définit alors $\int_\alpha^\beta f \, d\Phi'(t) := \int_\alpha^\beta f \, d(\Psi + M_\alpha)(t)$ au sens des mesures de Stieljes. ($\Psi + M_\alpha$ est bien continue à droite, croissante, positive, avec $(\Psi + M_\alpha)(t) \longrightarrow 0$ $[t \longrightarrow \alpha^+]$)

- On note $\int_0^\beta .$ pour $lim_{\alpha \to 0^+} \int_\alpha^\beta .$, cette limite étant dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$; l'existence de cette limite est due au fait que toutes les quantités considérées sont positives.

Démonstration. Pour $0 < \alpha < \varepsilon$, par intégration par parties, on a la formule :

$$\begin{aligned} \int_\alpha^\varepsilon e^{\Phi(t)}dt &= \left[\frac{e^{\Phi(t)}}{\Phi'(t)}\right]_\alpha^\varepsilon + \int_\alpha^\varepsilon e^{\Phi(t)} \frac{d\Phi'(t)}{(\Phi'(t))^2} \\ &= \frac{e^{\Phi(\alpha)}}{|\Phi'(\alpha)|} - \frac{e^{\Phi(\varepsilon)}}{|\Phi'(\varepsilon)|} + \int_\alpha^\varepsilon e^{\Phi(t)} \frac{d\Phi'(t)}{(\Phi'(t))^2}. \end{aligned}$$

Supposons

$$\int_0^\varepsilon e^{\Phi(t)}dt < +\infty.$$

On a alors

$$\int_0^{\varepsilon} e^{\Phi(t)} \frac{d\Phi'(t)}{(\Phi'(t))^2} \leq \int_0^{\varepsilon} e^{\Phi(t)} dt + \frac{e^{\Phi(\varepsilon)}}{|\Phi'(\varepsilon)|} < +\infty.$$

On va montrer la réciproque uniquement dans le cadre restreint :

$$\int_{\alpha}^{\varepsilon} \frac{d\Phi'(t)}{|\Phi'(t)|} \longrightarrow +\infty \ [\alpha \to 0]$$

(on constatera que cette propriété est bien vérifiée lorsqu'on appliquera le lemme.)

Supposons

$$\int_0^{\varepsilon} e^{\Phi(t)} \frac{d\Phi'(t)}{(\Phi'(t))^2} < +\infty.$$

On a :

$$\int_0^{\varepsilon} e^{\Phi(t)} dt = \liminf_{\alpha \to 0^+} \int_{\alpha}^{\varepsilon} e^{\Phi(t)} dt \leq \int_0^{\varepsilon} e^{\Phi(t)} \frac{d\Phi'(t)}{(\Phi'(t))^2} + \liminf_{\alpha \to 0^+} \frac{e^{\Phi(\alpha)}}{|\Phi'(\alpha)|}.$$

Pour $0 < \alpha < \varepsilon$, on a de plus :

$$\inf_{\alpha < t < \varepsilon} \left(\frac{e^{\Phi(t)}}{|\Phi'(t)|} \right) \int_{\alpha}^{\varepsilon} \frac{d\Phi'(t)}{|\Phi'(t)|} \leq \int_{\alpha}^{\varepsilon} e^{\Phi(t)} \frac{d\Phi'(t)}{(\Phi'(t))^2} \leq \int_0^{\varepsilon} e^{\Phi(t)} \frac{d\Phi'(t)}{(\Phi'(t))^2} < \infty.$$

Donc

$$\inf_{\alpha < t < \varepsilon} \left(\frac{e^{\Phi(t)}}{|\Phi'(t)|} \right) \longrightarrow 0[\alpha \to 0],$$

ce qui implique que

$$\liminf_{\alpha \to 0^+} \frac{e^{\Phi(\alpha)}}{|\Phi'(\alpha)|} = 0$$

(car $\frac{e^{\Phi(t)}}{|\Phi'(t)|} > 0 \ \forall t \in]0, \varepsilon]$).
En conclusion :

$$\int_0^{\varepsilon} e^{\Phi(t)} dt < +\infty.$$

□

Lemme 8. *Soit $(l_n)_n$ suite de réels positifs, telle que $l_n \longrightarrow 0$ $[n \longrightarrow +\infty]$.*
Notons pour tout n :

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} l_k \ \textit{et} \ t_n = s_n - n l_n$$

Soit φ fonction convexe, positive sur $\mathbb{R}$.
Alors :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi^2(s_n)}{n^2} \leq 2\Pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi^2(t_n)}{n^2}$$

Remarques :

On admettra dans la preuve le résultat suivant (inégalité de Hilbert) : pour tous complexes $a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_m$

$$\left| \sum_{p=1}^{m} \sum_{q=1}^{m} \frac{a_p \, \overline{b_q}}{p + q - 1} \right| \leq \Pi \left(\sum_{p=1}^{m} |a_p|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{q=1}^{m} |b_q|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

En particulier, pour tous réels positifs $(a_p)_{p\in\mathbb{N}}$, $(b_q)_{q\in\mathbb{N}}$:

$$\forall m \in \mathbb{N} \sum_{p=1}^{m} \sum_{q=1}^{m} \frac{a_p\, b_q}{p+q-1} \leq \Pi \left(\sum_{p=1}^{m} a_p^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{q=1}^{m} b_q^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

En faisant tendre m vers $+\infty$, on obtient :

$$\sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{a_p\, b_q}{p+q-1} \leq \Pi \left(\sum_{p=1}^{\infty} a_p^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{q=1}^{\infty} b_q^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

(ces sommes pouvant prendre la valeur $+\infty$).

Démonstration. Pour tout n, on a

$$t_{n+1} = (n+1)s_n - ns_{n+1}$$

c'est-à-dire

$$\frac{t_{n+1}}{n(n+1)} = \frac{s_n}{n} - \frac{s_{n+1}}{n+1}.$$

En sommant ces relations, pour tous n, m :

$$\sum_{k=n}^{m} \frac{t_{k+1}}{k(k+1)} = \frac{s_n}{n} - \frac{s_m}{m}.$$

Or

$$\frac{s_m}{m} \longrightarrow 0 \; lorsque \; m \longrightarrow +\infty$$

(propriété de Césaro pour la suite $(l_n)_n$), d'ou

$$\sum_{k>n} \frac{t_k}{k(k-1)} = \frac{s_n}{n}$$

(passage à la limite $m \longrightarrow +\infty$ et réindexation). Comme φ est convexe et

$$\sum_{k>n} \frac{n}{k(k-1)} = 1$$

on en déduit :

$$\varphi(s_n) = \varphi\left(\sum_{k>n} \frac{n}{k(k-1)} t_k \right) \leq \sum_{k>n} \frac{n}{k(k-1)} \varphi(t_k).$$

Notons

$$\mathcal{B} = \left\{ (\alpha_n)_n / \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n^2 \leq 1 \right\}$$

et

$$\mathcal{B}' = \{(\alpha_n)_n \in \mathcal{B} / \forall n,\ \alpha_n \geq 0\}.$$

($\mathcal{B}$ est la boule unité dans l^2 muni de la norme hilbertienne usuelle). On va utiliser le fait que

$$\forall x \in l^2,\ \|x\| = sup\{\langle x, \alpha \rangle,\ \alpha \in \mathcal{B}\} = sup\{\langle x, \alpha \rangle,\ \alpha \in \mathcal{B}'\},$$

soit en particulier

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi^2(s_n)}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}} = sup \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \frac{\varphi(s_n)}{n},\ (\alpha_n)_n \in \mathcal{B}' \right\}.$$

Soit $(\alpha_n)_n \in \mathcal{B}'$.
On a pour tout n

$$\alpha_n \frac{\varphi(s_n)}{n} \leq \sum_{k>n} \alpha_n \frac{\varphi(t_k)}{k(k-1)}$$

d'ou en sommant :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \frac{\varphi(s_n)}{n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k>n} \frac{\alpha_n\, \varphi(t_k)}{k(k-1)} = \sum_{k=2}^{\infty} \beta_n \frac{\varphi(t_k)}{k}$$

avec pour tout k

$$\beta_k = \frac{1}{k-1} \sum_{n=1}^{k-1} \alpha_n$$

(L'inversion des signes $\sum$, dans cette égalité comme dans les suivantes, est justifiée car tous les termes sont positifs.)

On va à présent majorer la quantité :

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{\infty} \beta_k^2 &= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k-1)^2} \left(\sum_{n=1}^{k-1} \alpha_n \right)^2 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{n'=1}^{\infty} \alpha_n \alpha_{n'} \sum_{k\, >\, \max(n,n')} \frac{1}{(k-1)^2}\ . \end{aligned}$$

Montrons par récurrence le résultat suivant :

$$\forall N \in \mathbb{N},\ \sum_{k\, \geq\, N} \frac{1}{k^2} \leq \frac{2}{2N-1}.$$

- pour $N = 1$:

$$\sum_{k\, \geq\, N} \frac{1}{k^2} = \frac{\Pi^2}{6} \leq \frac{2}{2N-1} = 2.$$

- pour N quelconque, en supposant l'inégalité vérifiée au rang N :

$$\sum_{k\, \geq\, N+1} \frac{1}{k^2} \leq \frac{2}{2N-1} + \frac{1}{N^2}.$$

Il suffit donc de montrer que :

$$\frac{2}{2N-1} + \frac{1}{N^2} \leq \frac{2}{2N-3}.$$

Or

$$\begin{aligned} \frac{2}{2N-1} + \frac{1}{N^2} \leq \frac{2}{2N-3} &\iff 2N^2(2N-3) - (2N-1)(2N-3) \leq 2N^2(2N-1) \\ &\iff 4N^3 - 10N^2 + 8N - 3 \leq 4N^3 - 2N^2 \\ &\iff 0 \leq 8N^2 - 8N + 3 \\ &\iff 0 \leq 2(2N-1)^2 + 1. \end{aligned}$$

Cela conclut la récurrence.

On a donc, pour tous n, n' :

$$\sum_{k\, \geq\, \max(n,n')} \frac{1}{k^2} \leq \frac{2}{2\max(n,n')-1} \leq \frac{2}{n+n'-1}.$$

Ainsi, en injectant dans l'égalité :

$$\sum_{k=2}^{\infty} \beta_k^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{n'=1}^{\infty} \alpha_n \alpha_{n'} \frac{2}{n+n'-1}$$

donc, par l'inégalité de Hilbert :

$$\sum_{k=2}^{\infty} \beta_k^2 \leq 2\Pi \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 \leq 2\Pi$$

c'est-à-dire que

$$\left(\frac{\beta_k}{\sqrt{2\Pi}} \right)_k \in \mathcal{B}'$$

(en posant $\beta_0 = 0$). Ainsi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \frac{\varphi(s_n)}{n} \leq sup \left\{ \sqrt{2\Pi} \sum_{k=1}^{\infty} \beta'_k \frac{\varphi(t_k)}{k},\ (\beta'_k)_k \in \mathcal{B}' \right\} = \sqrt{2\Pi} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\varphi^2(t_m)}{m^2} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Et donc, en prenant le sup sur les $(\alpha_n)_n \in \mathcal{B}'$:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi^2(s_n)}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{2\Pi} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\varphi^2(t_m)}{m^2} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Cela conclut la preuve du lemme. □

4.2 Conséquence : le théorème de Shepp

Nous allons à présent montrer la seconde forme du théorème de Shepp. On fixe à nouveau la suite $(l_n)_n$ décroissante positive, vérifiant les conditions données dans les premières parties, et on utilise les notations données dans la partie 1.

Théorème 9.

$$\mathbb{T} = \limsup_{n \to \infty} (I_n) \Longleftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2}\, e^{l_1 + \ldots + l_n} = +\infty$$

Démonstration. D'après le théorème 1, il suffit de montrer que :

$$\int_0^{\varepsilon} exp \left(\sum_{n=0}^{\infty} \xi_n(t) \right) dt < \infty \Longleftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} exp(l_1 + \ldots + l_n) < \infty.$$

On considère la fonction

$$\Phi :\ t \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n(t).$$

Montrons que Φ est convexe, strictement décroissante sur $]0, \varepsilon[$, avec $\varepsilon = -l_1$.
$l_n \longrightarrow 0$ lorsque $n \longrightarrow +\infty$ avec $(l_n)_n$ décroissante, donc les intervalles $]l_{n+1}, l_n[$ (éventuellement vides) forment une partition de $]0, l_1[$. De plus, pour $t \in]l_{n+1}, l_n[$, on a :
- $\forall k \leq n$, $t < l_n < l_k$ donc $\xi_k(t) = l_k - t$;
- $\forall k > n$, $t > l_{n+1} > l_k$ donc $\xi_k(t) = 0$.
d'ou

$$\Phi(t) = \sum_{k=1}^{n} (l_k - t)$$

.
On a donc

$$\forall t \in]l_{n+1}, l_n[\ \Phi'(t) = -n.$$

Par ailleurs, on a :

$$\int_\alpha^\varepsilon \frac{d\Phi'(t)}{|\Phi'(t)|} = \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{1}{\alpha} \rfloor} \frac{1}{n} \longrightarrow +\infty \; [\alpha \to 0].$$

On peut donc appliquer le lemme 7 :

$$\begin{aligned} \int_0^\varepsilon exp\left(\sum_{n=0}^{\infty} \xi_n(t)\right) dt < \infty \quad & \Longleftrightarrow \quad \int_0^\varepsilon e^{\Phi(t)} \frac{d\Phi'(t)}{(\Phi'(t))^2} < +\infty \\ & \Longleftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \, exp \, \Phi(l_n) < \infty. \end{aligned}$$

Ainsi :
- le sens direct de l'équivalence découle du lemme 2 (l'hypothèse $\sum_{n \geq 1} l_n^2 < \infty$ implique évidemment que $l_n \longrightarrow 0$ lorsque $n \longrightarrow +\infty$, et $\varphi : x \mapsto e^{\frac{x}{2}}$ est bien positive, convexe) ;
- l'implication réciproque est évidente. □

5 Bibliographie

Références

[1] Jean-Pierre Kahane, *Some random series of functions* , Cambridge Studies in Advanced Mathematics 5. Cambridge University Press, 1985.