

# Exposé de Maîtrise : Mesure Harmonique

Fabrice Catoire, Mikael de la Salle  
sujet proposé par Guy David

17 juin 2004

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Quelques Éléments d'analyse complexe</b>	<b>2</b>
1.1	Le principe du maximum . . . . .	2
1.2	Lemme de Schwartz . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Problème de Dirichlet et mesure harmonique pour <math>\mathbb{U}</math></b>	<b>3</b>
2.1	Rappels et définitions . . . . .	4
2.2	Résolution du problème de Dirichlet . . . . .	4
2.3	Continuité radiale : Le théorème de Fatou . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Extension à <math>\Omega</math> simplement connexe</b>	<b>8</b>
3.1	Limites aux frontières de fonctions holomorphes . . . . .	8
3.2	Le théorème de l'application conforme de Riemann . . . . .	10
3.3	Le théorème de Carathéodory . . . . .	12
3.4	Résolution du problème de Dirichlet et mesure harmonique . . . . .	15
<b>4</b>	<b>Généralisation à un domaine de Jordan finiment connexe</b>	<b>16</b>
4.1	Un peu de topologie . . . . .	16
4.2	Résolution du problème de Dirichlet . . . . .	17
4.3	Définition de la mesure harmonique . . . . .	20
	<b>Références</b>	<b>21</b>

## Introduction

On s'intéresse ici à la construction, sur des ouverts  $\Omega$  assez réguliers de  $\mathbb{C}$ , de *mesure harmonique* sur la frontière de ces ouverts. D'un point de vue probabiliste, au moins pour des ouverts bien réguliers, cette mesure représente la loi de  $B_T$ , où  $T$  est le temps d'arrêt égal au plus petit instant  $t$  où un mouvement brownien  $B_t$  issu d'un point fixé  $z \in \Omega$  sort de  $\Omega$ . Cette approche a été abordée en cours de probabilités.

La mesure harmonique est intimement reliée au problème de Dirichlet. Ici, on s'intéressera à une approche analytique.

Dans tout ce texte,  $\Omega$  sera un ouvert connexe de  $\mathbb{C}$  et sera appelé un domaine. De plus, il sera souvent supposé simplement connexe (cf définition 4), ce qui sera précisé. On supposera connues les notions élémentaires d'analyse complexe telles que les notions d'indice, de lacet, de formule de Cauchy, d'holomorphic, de fonctions harmoniques etc.

On notera également  $H(\Omega)$  l'ensemble des fonctions holomorphes sur  $\Omega$ .

Nous utiliserons aussi assez souvent le théorème de Jordan, qui affirme qu'une courbe de Jordan (i.e. une partie de  $\mathbb{C}$  homéomorphe au cercle unité) découpe  $\mathbb{C}$  en deux composantes connexes.

## 1 Quelques Éléments d'analyse complexe

Dans tout ce texte nous noterons  $\mathbb{U} =_{def} \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$  le disque unité de  $\mathbb{C}$ .

### 1.1 Le principe du maximum

On suppose connu le principe du maximum qui affirme que si  $h$  est une fonction harmonique sur un domaine  $\Omega$  borné et que

$$\forall \zeta \in \partial\Omega, \limsup_{z \rightarrow \zeta} h(z) \leq 0, \quad (1)$$

Alors  $h \leq 0$  sur tout  $\Omega$ .

Mais on peut avoir un résultat un peu plus fort, où la condition 1 ne porte plus sur tout  $\partial\Omega$ , mais sur  $\partial\Omega$  privé de quelques points. C'est le *principe de Lindelöf*, et il sera bien utile dans ce qui suit.

**Lemme 1 (Le principe du maximum de Lindelöf).** *Soient  $\Omega$  un domaine tel que  $\overline{\Omega} \neq \mathbb{C}$ ,  $u$  harmonique bornée à valeurs réelles sur  $\Omega$  et  $F$  un sous-ensemble fini de  $\partial\Omega$  tels que :*

$$\limsup_{z \rightarrow \zeta} u(z) \leq 0$$

*pour tout  $\zeta \in \partial\Omega \setminus F$ . Alors  $u(z) \leq 0$  sur  $\Omega$ .*

*Démonstration.* Cas où  $\Omega$  est borné Si  $F$  est vide, c'est le principe du maximum classique.

Sinon, notons  $F = \{\zeta_1, \dots, \zeta_N\}$ , et définissons

$$u_\varepsilon(z) = u(z) - \varepsilon \sum_{j=1}^N \log \left( \frac{\text{diam}(\Omega)}{|z - \zeta_j|} \right).$$

Alors  $u_\varepsilon$  est harmonique sur  $\Omega$ <sup>1</sup> et  $\limsup_{z \rightarrow \zeta} u_\varepsilon(z) \leq 0$ . Cette inégalité est claire pour  $\zeta \notin F$  car  $u_\varepsilon \leq u$ , et pour  $\zeta \in F$ , comme  $u$  est borné,  $\limsup_{z \rightarrow \zeta} u_\varepsilon(z) = -\infty$ .

---

<sup>1</sup>Il suffit de calculer le laplacien de  $h(x, y) = \log(x^2 + y^2)$ . La dérivée seconde de  $x \rightarrow h(x, y)$  vaut  $\frac{2}{x^2 + y^2} - \frac{4x^2}{(x^2 + y^2)^2}$ , et la symétrie en les variables entraîne  $\Delta h = 0$

Donc le principe du maximum s'applique à  $u_\varepsilon$ , d'où pour tout  $\varepsilon$ , et pour tout  $z \in \Omega$ ,

$$u(z) \leq \varepsilon \sum_{j=1}^N \log \left( \frac{\text{diam}(\Omega)}{|z - \zeta_j|} \right).$$

En faisant tendre  $\varepsilon$  vers 0, on a l'inégalité recherchée.

Cas général Soit  $z_0 \notin \Omega$ , et soit  $\varphi(z) = \frac{1}{z - z_0}$ . Alors la fonction  $v = u \circ \varphi^{-1}$  est harmonique sur  $\varphi(\Omega)$  car  $\varphi^{-1}$  est holomorphe, et car la composée à droite d'une fonction harmonique par une fonction holomorphe reste holomorphe<sup>2</sup>. Elle vérifie les hypothèses du lemme sur un domaine borné. Elle est donc négative sur  $\varphi(\Omega)$ . Donc  $u$  aussi.  $\square$

**Remarque.** Ce théorème permet d'appliquer, sans effort, un résultat analogue à une fonction holomorphe  $f$  : Si  $\limsup_{z \rightarrow \zeta} |f(z)| \leq \varepsilon$  pour  $\zeta \in \partial\Omega \setminus F$ , alors  $|f| \leq \sqrt{2}\varepsilon$ .

Il suffit en effet d'appliquer le principe du maximum de Lindelöf à  $\text{Re}(f)$ ,  $-\text{Re}(f)$ ,  $\text{Im}(f)$  et  $-\text{Im}(f)$ .

## 1.2 Lemme de Schwartz

**Lemme 2 (Lemme de Schwartz).** Soit  $f$  une fonction holomorphe de  $\mathbb{U} \rightarrow \mathbb{U}$ . Alors  $|f'(0)| \leq 1$  et  $|f'(0)| = 1$  ssi  $f$  est une rotation.

*Démonstration.* Si  $f(0) = 0$ , alors soit  $g$  la fonction holomorphe définie par  $g(z) = \frac{f(z)}{z}$  et  $g(0) = f'(0)$ . Alors  $\limsup |g(z)| \leq 1$  quand  $|z| \rightarrow 1$ . Par le principe du maximum,  $|g(z)| \leq 1$  sur tout  $\mathbb{U}$ . Il ne reste plus qu'à voir le cas d'égalité.

Supposons  $|g(0)| = 1$ . Pour tout  $r > 0$ ,

$$|g(0)| = \left| \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} g(re^{i\theta}) d\theta \right| \leq \int |g(re^{i\theta})| d\theta$$

Donc  $|g| = 1$  sur le cercle de rayon  $r$ . De plus on a égalité dans l'inégalité triangulaire. Donc l'argument de  $g$  est constant sur le cercle.  $g$  est donc constante de module 1. Et  $f$  est bien une rotation.

Sinon, dans le cas général, on pose  $h = \varphi \circ f$  où  $\varphi(z) = \frac{z - f(0)}{1 - \overline{f(0)}z}$ .  $\varphi$  est une bijection de  $\mathbb{U}$  envoyant  $f(0)$  sur 0. On a donc  $|\varphi'(f(0))f'(0)| = |h'(0)| \leq 1$ . C'est-à-dire  $|f'(0)| \leq (1 - |f(0)|^2)^{-1/2} < 1$ .  $\square$

## 2 Problème de Dirichlet et mesure harmonique sur la boule unité

Étant donné  $\Omega$  est un domaine quelconque différent de  $\mathbb{C}$ , et  $h$  une fonction continue sur  $\partial\Omega$ , le problème de Dirichlet avec condition aux frontières  $h$  consiste à trouver une fonction  $f$  harmonique sur  $\Omega$  continue sur  $\overline{\Omega}$  et telle que  $f|_{\partial\Omega} = h$ .

Le principe du maximum nous dit que pour  $\Omega$  borné, la solution au problème de Dirichlet, si elle existe, est unique. En effet si  $f$  est harmonique et vaut 0 sur  $\partial\Omega$ , alors par le principe du maximum  $f \leq 0$ . De même  $-f \leq 0$ , donc  $f = 0$ <sup>3</sup>. Pour  $\Omega$  non borné, le fait d'imposer à la fonction  $h$  d'être continue sur  $\partial\Omega \cup \{\infty\}$  et à  $f$  d'être continue sur  $\overline{\Omega} \cup \infty$  donne l'unicité sans travailler.

On peut étendre ce problème à des conditions aux frontières plus ou moins régulières, par exemple pour des fonctions continues par morceaux. Alors on exige la continuité de la solution  $f$  sur  $\Omega$  privé des points de discontinuité de  $\Omega$ . Là encore, une solution *bornée* est unique si elle existe, par le principe du maximum un peu généralisé, voir le lemme 1.

On s'intéressera ici à des domaines dont la frontière est constituée de points simples (cf définition 5).

<sup>2</sup>Il suffit de voir, dans le cas où elle est à valeurs réelles,  $u$  comme la partie réelle d'une fonction holomorphe. Et la composée de fonctions holomorphes reste holomorphe.

<sup>3</sup>Si  $f$  n'est pas réelle, le même raisonnement s'applique avec  $\text{Re}(f)$  et  $\text{Im}(f)$

## 2.1 Rappels et définitions

**Définition 1 (Noyau de Poisson).** Le noyau de Poisson  $P_z(\theta)$  pour le disque unité  $\mathbb{U}$  est défini par la formule suivante, où  $z \in \mathbb{U}$  et  $\theta \in \mathbb{R}$  :

$$P_z(\theta) = \frac{1}{2\pi} \frac{1 - |z|^2}{|e^{i\theta} - z|^2} = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \left( \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} \right)$$

**Remarque.**

$$\int_0^{2\pi} P_z(\theta) d\theta = \operatorname{Re} \left( \int_0^{2\pi} \frac{1 + ze^{-i\theta}}{1 - ze^{-i\theta}} \frac{d\theta}{2\pi} \right) \quad (2)$$

$$= \operatorname{Re} \left( \int_0^{2\pi} \sum_0^{\infty} (1 + ze^{-i\theta}) z^n e^{-in\theta} \frac{d\theta}{2\pi} \right) \quad (3)$$

$$= 1 \quad (4)$$

**Définition 2 (Intégrale de Poisson).** Si  $f \in L^1(\partial\mathbb{U})$ , on définit son intégrale de Poisson par la fonction  $P[f] : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{C}$  telle que

$$P[f](z) = \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) P_z(\theta) d\theta$$

**Remarque.**

- $P[f]$  est harmonique. En effet si  $f$  est réelle,  $P[f]$  est la partie réelle de :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} d\theta$$

Sinon,  $f = \operatorname{Re}(f) + i \operatorname{Im}(f)$ .

- $P[f](z)$  est l'intégrale de  $f$  par rapport à la mesure de probabilité  $\omega(z, \cdot, \mathbb{U})$  de densité  $P_z$  par rapport à la mesure de Lebesgue sur  $\partial\mathbb{U}$ . C'est à dire que pour  $E \in \partial\mathbb{U}$  mesurable, on a :

$$\omega(z, E, \mathbb{U}) = \int_E \frac{1 - |z|^2}{|e^{i\theta} - z|^2} \frac{d\theta}{2\pi} \quad (5)$$

C'est mesure est appelée *mesure harmonique* en  $z$  dans  $\mathbb{U}$ .

À  $E \subset \partial\mathbb{U}$  fixé, l'application  $z \rightarrow \omega(z, E, \mathbb{U})$  est harmonique.

## 2.2 Résolution du problème de Dirichlet

**Théorème 1 (Problème de Dirichlet pour la boule unité).** - Si  $f \in L^1(\partial\mathbb{U})$  et si  $f$  est continue en  $e^{i\theta_0}$ , alors :

$$\lim_{\substack{z \rightarrow e^{i\theta_0} \\ z \in \mathbb{U}}} P[f](z) = f(e^{i\theta_0}) \quad (6)$$

- Si  $f \in C(\partial\mathbb{U})$ , alors  $P[f]$  est solution du problème de Dirichlet avec conditions aux frontières données par  $f$ .

*Démonstration.* Soient  $\varepsilon > 0$ , et  $I$  est un intervalle ouvert contenant  $\theta_0$  tel que  $|f(e^{i\theta}) - f(e^{i\theta_0})| < \varepsilon$  pour  $\theta \in I$ . Alors on a :

$$\begin{aligned} |u(z) - f(e^{i\theta_0})| &\leq \underbrace{\int_I |f(e^{i\theta}) - f(e^{i\theta_0})| P_z(\theta) d\theta}_{\leq \varepsilon} \\ &+ \underbrace{\int_{[0;2\pi] \setminus I} |f(e^{i\theta}) - f(e^{i\theta_0})| P_z(\theta) d\theta}_{\leq (\|f\|_1 + |f(e^{i\theta_0})|) \int_{[0;2\pi] \setminus I} P_z(\theta) d\theta} \end{aligned} \quad (7)$$

Or  $\int_{[0;2\pi] \setminus I} P_z(\theta) d\theta \rightarrow 0$  quand  $z \rightarrow e^{i\theta}$ , on a donc pour  $z$  assez proche de  $e^{i\theta}$ ,  $|u(z) - f(e^{i\theta_0})| \leq 2\varepsilon$ . D'où la conclusion du premier point.

Le second point est clair car  $P[f]$  est harmonique et  $P[f]$  a une limite égale à  $f$  en tout point de  $\partial\mathbb{U}$ .  $\square$

**Remarque.**

1. On a évidemment le même résultat si on remplace la boule unité centrée en 0 par une boule  $D(a; R)$  quelconque. Il faut alors prendre pour noyau de Poisson :

$$\frac{1}{2\pi} \frac{R^2 - |z - a|^2}{|R e^{i\theta} - (z - a)|^2} = \frac{1}{2\pi} R e \left( \frac{R e^{i\theta} + z - a}{R e^{i\theta} - (z - a)} \right)$$

2. Ce théorème résout le problème de Dirichlet dans le cas où  $f$  est continue. Le cas  $L^1$  est résolu par le *théorème de Fatou*, la condition frontière étant affaiblie.

### 2.3 Continuité radiale : Le théorème de Fatou

**Définition 3.** Pour  $\alpha > 1$  et  $\zeta \in \partial\mathbb{U}$ , on pose  $\Gamma_\alpha(\zeta) = \{z \in \mathbb{U}, |z - \zeta| \leq \alpha(1 - |z|)\}$  un cône partant de  $\zeta$ .

**Théorème 2 (Théorème de Fatou).** Si  $f \in L^1(\partial\mathbb{U})$ , alors pour presque tout  $\zeta \in \partial\mathbb{U}$ ,  $P[f]$  admet des limites non tangentielles en  $\zeta$  égales à  $f(\zeta)$ , c'est à dire  $\forall \alpha$  :

$$\lim_{z \in \Gamma_\alpha} P[f](z) = f(\zeta)$$

*Démonstration.* La relation montrer est linéaire en  $f$ , on peut donc supposer  $f \geq 0$  puis appliquer le résultat à  $f^+$  et  $f^-$ .

Notons  $u = P[f]$ , et pour  $\zeta \in \partial\mathbb{U}$ , on note  $u_\alpha^*(\zeta) = \sup_{\Gamma_\alpha} |u|$

**Lemme 3.** Notons  $\lambda$  la mesure de Lebesgue sur  $\partial D$ . Alors :

$$\lambda(\{\zeta \in \partial\mathbb{U}, u_\alpha^*(\zeta) > \mu\}) \leq \frac{3 + 6\alpha}{\mu} \|f\|_1 \quad (8)$$

Lemme  $\Rightarrow$  Théorème. Soit  $W_{f,\alpha}(\zeta) = \limsup_{z \rightarrow \zeta, z \in \Gamma_\alpha} |u(z) - f(\zeta)|$ . On a clairement  $W_{f,\alpha}(\zeta) \leq u_\alpha^*(\zeta) + |f(\zeta)|$ . On en déduit que

$$\begin{aligned} \lambda(\{W_{f,\alpha}(\zeta) \geq \mu\}) &\leq \lambda\left(\left\{u_\alpha^*(\zeta) \geq \frac{\mu}{2}\right\}\right) + \lambda\left(\left\{f(\zeta) \geq \frac{\mu}{2}\right\}\right) \\ &\leq \frac{8 + 12\alpha}{\mu} \|f\|_1 \end{aligned}$$

Soit  $\varepsilon > 0$ . Si  $g$  est continue, on a toujours  $W_{f,\alpha} = W_{f-g,\alpha}$  car  $W_{g,\alpha} = 0$  pour  $g$  continue. Si on prend  $g$  telle que  $\|f - g\|_1 < \varepsilon^2$ , alors

$$\lambda(\{W_{f,\alpha}(\zeta) \geq \varepsilon\}) \leq (8 + 12\alpha)\varepsilon.$$

En faisant tendre  $\varepsilon$  vers 0, on obtient  $\lambda(\{W_{f,\alpha}(\zeta) > 0\}) = 0$ .

En prenant une suite  $\alpha$  tendant vers  $\infty$  dans  $\mathbb{N}$ , et en remarquant que si  $\alpha > \alpha'$ ,  $W_{f,\alpha} \geq W_{f,\alpha'}$ , on obtient le résultat recherché :

$$\lambda(\{\zeta, \exists \alpha, P[f](z) \not\rightarrow f(\zeta), z \in \Gamma_\alpha(\zeta)\}) = 0$$

Preuve du lemme. On introduit  $M_f$  la fonction maximale de *Hardy-Littlewood* de  $f$  :

$$M_f(\zeta) = \sup_{\substack{\text{I arc connexe de } \partial D \\ \text{contenant } \zeta}} \frac{1}{\lambda(I)} \int_I |f| d\theta \quad (9)$$

On a alors une relation entre  $u_\alpha^*$  et  $M_f$  donnée par le lemme :

**Lemme 4.**  $u_\alpha^*(\zeta) \leq (1 + 2\alpha)M_f(\zeta)$

*Démonstration.* On suppose  $\zeta = 1$ . Fixons  $z = re^{i\theta_0}$ , où on a pris  $|\theta_0| \leq \pi$ , posons

$$P_z^*(\theta) = \sup \{P_z(\varphi), |\theta| < |\varphi| < \pi\} = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \frac{1+|z|}{1-|z|} & \text{si } |\theta| < |\theta_0| \\ \max(P_z(\theta), P_z(-\theta)) & \text{sinon} \end{cases}$$

Autrement dit,  $P_z^*$  est le plus petit majorant pair du noyau de Poisson  $P_z$  décroissant sur

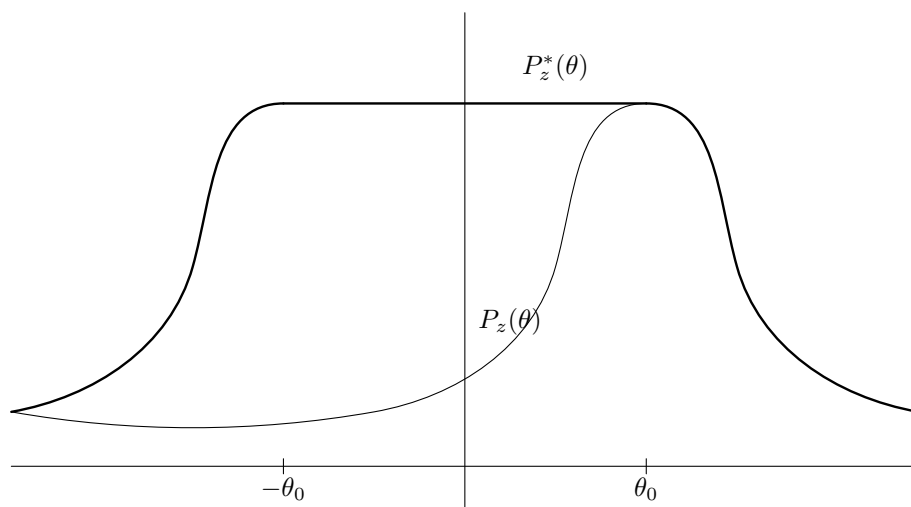


FIG. 1 -  $P_z$  et  $P_z^*$ .

$[0; \pi]$  (figure 1).

On a supposé  $f$  positive. Alors

$$0 \leq u(z) = \int f(e^{i\theta}) P_z(\theta) d\theta \leq \int f(e^{i\theta}) P_z^*(\theta) d\theta \quad (10)$$

De plus,  $P_z^*$  étant paire décroissante sur  $[0; \pi]$ ,  $P_z^*$  est une limite croissante dans  $L^\infty$  de fonctions en escaliers positives, paires et décroissantes sur  $[0; \pi]$ , c'est à dire de fonctions de la forme :

$$\sum a_j \left( \frac{1}{2\theta_j} \mathbf{1}_{[-\theta_j, \theta_j]} \right) \text{ avec } a_j \geq 0$$

Pour des fonctions en escaliers de ce genre, on a donc, par définition de  $M_f(1)$ , que

$$\int f(e^{i\theta}) \sum a_j \left( \frac{1}{2\theta_j} \mathbf{1}_{[-\theta_j, \theta_j]}(\theta) \right) d\theta \leq M_f(1) \cdot \sum a_j$$

En prenant une suite de telles fonction tendant uniformément vers  $f$ , on a l'inégalité

$$\int f(e^{i\theta}) P_z^*(\theta) d\theta \leq M_f(1) \|P_z^*\|_1. \quad (11)$$

De plus si  $z \in \Gamma_\alpha(1)$ ,

$$\begin{aligned} \|P_z^*\|_1 &\leq \|P_z\|_1 + \frac{2|\theta_0|}{2\pi} \frac{1+|z|}{1-|z|} \\ &\leq 1 + \frac{2|\theta_0|}{2\pi} \alpha \frac{(1+|z|)}{|1-z|} \\ &\leq 1 + 2\alpha \end{aligned} \tag{12}$$

La dernière étape du calcul 12 se montre en distinguant le cas où  $|\theta_0| \leq \frac{\pi}{2}$  de la façon suivante :

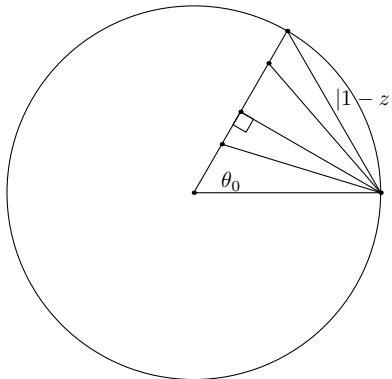


FIG. 2 – Les différentes valeurs de  $|1-z|$ , à  $\theta_0$  fixé.

Si  $|\theta_0| \leq \frac{\pi}{2}$ , alors  $|\theta_0| \leq \frac{\pi}{2} \sin \theta_0$ , et  $|1-z|$  est maximum, à  $\theta_0$  fixé, pour  $|1-z| = |\sin \theta_0|$  (voir le dessin 2). On en tire  $\frac{|\theta_0|}{|1-z|} \leq \frac{\pi}{2}$

La majoration 12 s'en suit sans problème, en majorant simplement  $|z|$  par 1.

Si  $\frac{\pi}{2} \leq |\theta_0| \leq \pi$ , cette majoration s'obtient en remarquant que  $|1-z| \geq 1$ .

Les équations 10, 11 et 12 nous permettent de conclure la démonstration du lemme 4.  $\square$

On est donc ramené à montrer que

$$\lambda \left( \underbrace{\{\zeta \in \partial\mathbb{U}, M_f(\zeta) > \mu\}}_{E_\mu} \right) \leq \frac{3}{\mu} \|f\|_1 \tag{13}$$

Pour cela on va utiliser un lemme amusant :

**Lemme 5.** *Si  $\{I_j\}_j$  est une famille finie d'intervalles ouverts de  $\partial D$ , alors on peut trouver une sous-famille  $\{J_k\}_j$  d'ouverts disjoints deux à deux telle que <sup>4</sup>*

$$\sum \lambda(J_k) \geq \frac{1}{3} \lambda(\cup I_k)$$

*Démonstration.* Quitte à restreindre la famille, on suppose que  $\forall i, I_i \not\subseteq \cup_{j \neq i} I_j$ , et que les  $I_i$  sont paramétrés par des intervalles  $]a_i; b_i[$  où on prend  $0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_n < 2\pi$ , tels que  $I_i = \{e^{i\theta}, \theta \in ]a_i; b_i[ \}$ . On suppose aussi  $n > 1$ , sinon il n'y aurait rien à faire. On a alors  $b_{j+1} > b_j$  et  $b_{j-1} < a_{j+1}$  pour satisfaire les conditions  $I_{j+1} \not\subseteq I_j$  et  $I_j \not\subseteq I_{j-1} \cup I_{j+1}$ . De même  $b_n < b_1 + 2\pi$  et  $b_{n-1} < a_1 + 2\pi$ .

C'est à dire que  $I_j$  et  $I_{j+2}$  sont disjoints, et même que  $\forall k, I_j$  et  $I_{j+2k}$  sont disjoints. On peut partitionner  $\{I_j\}_j$  en trois groupes :

<sup>4</sup>C'est vrai pour une mesure borélienne quelconque, mais pour ne pas surcharger les notations déjà assez lourdes, on utilisera la mesure de Lebesgue.

1.  $I_1$ .
2.  $\{I_{2j}\}_{j \geq 1}$  (les intervalles d'indices pairs).
3.  $\{I_{2j+1}\}_{j \geq 1}$  (les intervalles d'indices impairs privés du premier).

Il ne reste plus qu'à remarquer que chacun de ces trois groupes est constitué d'intervalles disjoints deux à deux. L'un des trois a une mesure totale supérieure ou égale à un tiers de la mesure de  $\cup I_k$ , ce qui achève la preuve du lemme 5.  $\square$

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le lemme principal 3 :

Soit  $K \subset E_\mu$  un compact. Pour tout  $\zeta \in K$ , il existe un intervalle ouvert  $I_\zeta$  tel que

$$\frac{1}{\lambda(I_\zeta)} \int_{I_\zeta} |f| d\theta > \mu.$$

La compacité de  $K$  nous autorise à prendre un nombre fini de  $I_k$  qui recouvrent  $K$  et qui vérifient l'équation précédente. Une application du lemme 5 donne :

$$\begin{aligned} \lambda(K) &\leq \lambda(\cup_k I_k) \\ &\leq 3 \sum_k \lambda(J_k) \\ &\leq \frac{3}{\mu} \sum_k \int_{J_k} |f| \\ &\leq \frac{3}{\mu} \|f\|_1 \end{aligned} \tag{14}$$

La mesure de Lebesgue est régulière, c'est à dire que  $\lambda(E_\mu) = \sup \{\lambda(K), K \text{ compact } \subset E_\mu\}$ . Donc en passant à la limite dans 14, on obtient  $\lambda(E_\mu) \leq \frac{3}{\mu} \|f\|_1$ , ce qui était ce qu'on cherchait à montrer.  $\square$

### 3 Extension à $\Omega$ simplement connexe

**Définition 4.** Un domaine  $\Omega$  est dit simplement connexe s'il vérifie la propriété :  
Tout lacet  $\gamma$  dans  $\Omega$  est continûment déformable en le lacet nul.

Rappelons que si  $\Omega$  est simplement connexe, toute fonction  $f$  holomorphe sur  $\Omega$  possède une primitive  $F$  holomorphe sur  $\Omega$ . (Il suffit de définir  $F(x) = \int_\gamma f$  où  $\gamma$  est un chemin quelconque reliant  $x_0$  à  $x$ , où on a fixé  $x_0 \in \Omega$ ).

Dans cette partie, nous allons nous intéresser à la généralisation des définitions et résultats de la partie 2 à des domaines simplement connexes bornés. Pour cela, on se basera essentiellement sur le théorème de Riemann (3) et sur le *théorème de Carathéodory*, ci dessous page 12.

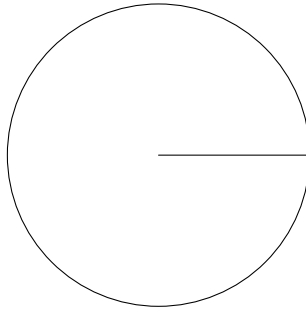
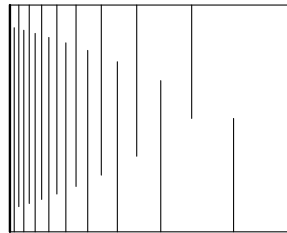
#### 3.1 Limites aux frontières de fonctions holomorphes

**Définition 5 (Point simple).** Si  $\Omega$  est un ouvert simplement connexe,  $\omega \in \partial\Omega$  est dit point frontière simple de  $\Omega$  si pour toute suite  $\alpha_n \in \Omega$  tq  $\alpha_n \rightarrow \omega$  il existe un arc continu  $\gamma : [0; 1] \rightarrow \overline{\Omega}$  tel que  $\gamma([0; 1]) \subset \Omega$ ,  $\gamma(1) = \omega$  et il existe  $(t_n)_n \in [0; 1]^{\mathbb{N}}$  une suite croissante telle que  $\forall n, \alpha_n = \gamma(t_n)$ .

Les figures 3 et 4 donnent des contre-exemples. Dans la figure 3, les points du rayon du disque peuvent être approchés de deux côtés, et un arc continu dans le disque privé de ce rayon devrait faire tout le temps des grands tours autour de 0.

Dans la figure 4, les points du côté gauche du contre-exemple sont encore plus vicieux : ils ne sont limites d'aucun arc dans  $\Omega$ .



FIG. 3 – 1<sup>er</sup> contre-exempleFIG. 4 – 2<sup>ème</sup> contre-exemple

On va chercher dans cette partie à montrer que des fonctions holomorphes suffisamment régulières sur des domaines suffisamment réguliers, peuvent être étendues continûment à la frontière de leur domaine de définition. On se basera sur deux lemmes qui permettent de montrer la continuité radiale de certaines fonctions définies sur  $\mathbb{U}$ .

**Lemme 6.** *Soit  $g$  une fonction holomorphe bornée sur  $\mathbb{U}$ .*

*Supposons que  $\Gamma$  est un chemin tel que  $\Gamma[0; 1[ \subset \mathbb{U}$  tel que  $|\Gamma(1)| = 1$  et tel que*

$$\lim_{t \rightarrow 1} g(\Gamma(t)) = \beta.$$

*Alors  $g$  admet une limite radiale en  $\Gamma(1)$  égale à  $\beta$ .*

*Démonstration.* On se ramène par translation, homothétie et rotation au cas où  $\beta = 0$ ,  $|g| < 1$  et  $\Gamma(1) = 1$ .

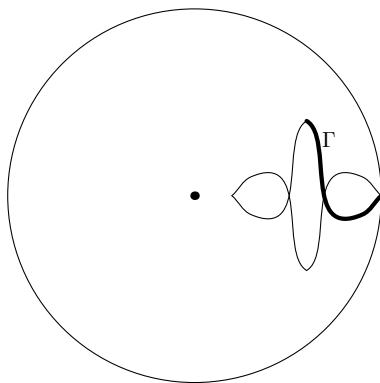
Soit  $\varepsilon > 0$ . Pour  $t$  assez grand (disons  $t \geq \delta$ ),  $|g(\Gamma(t))| < \varepsilon$  et  $Re(\Gamma(t)) > 1/2$ . Si on note  $r_0 = Re(\Gamma(\delta))$ , et en prenant  $t_0 = \max\{t > \delta, Re(\Gamma(t)) = r_0\}$ , on a aussi pour  $t > t_0$   $Re(\Gamma(t)) > Re(\Gamma(t_0)) > 1/2$ . On prend alors  $r > r_0$  et on définit la fonction  $h$  holomorphe sur  $\Omega = D(0; 1) \cap D(2r; 1)$  par

$$h(z) = g(z)\overline{g(\bar{z})}g(2r - z)\overline{g(2r - \bar{z})}. \quad (15)$$

Alors  $|h| < 1$ . On va montrer que  $|h(r)| < \sqrt{2}\varepsilon$  à l'aide du principe du maximum. Alors on aura fini car on a  $|h(r)| = |g(r)|^4$ .

Pour montrer cette majoration de  $h$ , on se place sur un ouvert à la frontière intéressante constitué par la réunion des composantes connexes bornées de  $\mathbb{C}$  privé de  $\Gamma([t_1, 1])$  et ses trois symétriques par rapports à l'axe des abscisses et à la droite  $x = r$ , où  $t_1$  est le plus grand  $t$  tel que  $Re(\Gamma(t)) = r$  (cf l'image). La fonction  $h$  a été choisie de telle sorte que sur la frontière de cet ouvert (privé des points 1 et  $2r - 1$ ),  $|h| < \varepsilon$ . D'après le lemme 1 appliqué à  $Re(h)$  et  $Im(h)$ , on a donc  $|h(z)| < \sqrt{2}\varepsilon$  sur cet ouvert. En particulier,  $h(r) < \sqrt{2}\varepsilon$ . Ce qui conclut la démonstration.

□

FIG. 5 – La frontière du domaine de définition de  $h$ 

**Lemme 7.** Soit  $f : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorphe bornée.

- Alors, pour presque tout  $\theta$ ,  $f(re^{i\theta})$  admet une limite finie  $f^*(e^{i\theta})$  quand  $r$  tend vers 1.
- Si la limite radiale  $f^*(e^{i\theta})$  est constante égale à  $\beta$  presque partout sur un arc non trivial, alors  $f = \beta$  sur  $\mathbb{U}$ .

*Démonstration.* – Soit  $(r_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  une suite croissant vers 1, et soit  $g_n(e^{i\theta}) = f(r_n e^{i\theta})$ . La suite  $(g_n)$  est bornée dans  $L^\infty(\partial\mathbb{U})$ , qui est le dual de  $L^1(\partial\mathbb{U})$ . Donc par le théorème de Banach-Alaoglu, on peut en extraire une sous-suite convergeant faiblement vers  $g \in L^\infty(\partial\mathbb{U})$ . C'est à dire que pour toute fonction  $h \in L^1$ ,  $\int f g_n \rightarrow \int f g$ .

Les fonctions  $f(r_n e^{i\theta})$  sont solutions du problème du Dirichlet avec condition aux frontières  $g_n$ . Donc par unicité de la solution, elles sont égales aux intégrales de Poisson de  $g_n$ . Comme le noyau de Poisson est une fonction  $L^1$ , on a :

$$f(z) = \lim f(r_n z) = \lim \int_0^{2\pi} g_n(e^{i\theta}) P_z(\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} g(e^{i\theta}) P_z(\theta) d\theta$$

Donc  $f = P[g]$  On est ramené à montrer que  $P[g](re^{i\theta}) \xrightarrow{r \rightarrow 1} g(e^{i\theta})$  dès que  $g \in L^\infty$ . C'est le théorème 2.

- Si  $f^* = \beta$  sur tout  $\partial\mathbb{U}$ , alors par le principe du maximum,  $f$  est nulle sur tout  $\mathbb{U}$ .  
Maintenant si on prend  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $\frac{2\pi}{n}$  soit plus petit que la longueur de  $I$ , et si on pose  $\alpha = \exp\left(\frac{2i\pi}{n}\right)$ , alors la fonction  $F(z) = \prod_{k=1}^n f(\alpha^k z)$  est holomorphe bornée et est nulle sur  $\partial\mathbb{U}$ . Elle est donc nulle. Si l'ensemble  $Z(f)$  des zéros de  $f$  étaient en nombre au plus dénombrable dans  $\mathbb{U}$ , alors il en serait de même pour les zéros de  $F$ , ce qui n'est pas le cas. En particulier  $Z(f) \cap D(0; r)$  est infini pour un  $r < 1$ .  $Z(f)$  a donc un point d'accumulation dans  $D(0; r)$ .  $f$  est donc constante et nulle sur  $\mathbb{U}$ .

□

### 3.2 Le théorème de l'application conforme de Riemann

On dit que deux domaines sont conformément équivalents lorsqu'il existe une application holomorphe bijective entre ces deux domaines. On s'intéresse ici aux domaines  $\Omega$  conformément équivalents à  $\mathbb{U}$ .

Cette condition implique en particulier que  $\Omega$  est simplement connexe et différent de  $\mathbb{C}$ , du fait que  $\mathbb{U}$  est lui-même simplement connexe. En effet si on a un lacet  $\gamma$  dans  $\Omega$  et si  $\varphi$  est une bijection holomorphe de  $\mathbb{U}$  sur  $\Omega$ , alors  $\varphi^{-1} \circ \gamma$  est un lacet de  $\mathbb{U}$ . Il se déforme donc continûment en le lacet

nul dans  $\mathbb{U}$ . Cette déformation se transporte dans  $\mathbb{U}$  via  $\varphi$ , et notre lacet  $\gamma$  se déforme bien en le lacet nul dans  $\Omega$ .

Le fait que  $\mathbb{C}$  n'est pas conformément équivalent à  $\mathbb{U}$  est clair, car une fonction holomorphe sur  $\mathbb{C}$  à valeurs dans  $\mathbb{U}$  est constante par le théorème de Liouville.

Le théorème de l'application conforme énonce la réciproque de ce théorème : un domaine simplement connexe différent de  $\mathbb{C}$  est conformément équivalent à  $\mathbb{U}$ .

**Lemme 8.** *Soit  $F$  une famille de fonctions holomorphes sur  $\Omega$  uniformément majorées sur tout compact. Alors  $F$  est relativement compacte (pour la topologie de la convergence uniforme sur les compacts).*

*Démonstration.* Il suffit de valider le théorème d'Ascoli sur une suite  $K_n$  de compacts tels que  $K_n \subset K_{n+1}$  et  $\cup K_n = \Omega$ . Pour cela il ne nous manque que l'équicontinuité des éléments de  $F$  sur les compacts  $K_n$ . Ensuite un procédé d'extraction diagonale nous permet de conclure.

$\forall n$ , soit  $\delta_n > 0$  tel que  $\forall z \in K_n, D(z; 2\delta_n) \subset K_{n+1}$ . Alors si  $z', z'' \in K_n$  sont tels que  $|z' - z''| \leq \delta_n$  et si on note  $\gamma = S(z'; 2\delta_n)$  le cercle de centre  $z'$  de rayon  $2\delta_n$  alors  $\forall f \in F$ , la formule de Cauchy nous donne :

$$f(z') - f(z'') = \frac{z' - z''}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z')(\xi - z'')} d\xi$$

D'où une majoration de  $|f(z') - f(z'')|$  en se rappelant que  $|z' - \xi| = 2\delta_n$  et  $|z'' - \xi| > \delta_n$  :

$$|f(z') - f(z'')| \leq \frac{M(K_{n+1})}{\delta_n} |z' - z''|$$

Ceci nous fournit l'équicontinuité recherchée.  $\square$

**Remarque.** *On a pris ici des fonctions holomorphes, mais la même démonstration s'applique pour des fonctions harmoniques quelconques, puisqu'elles vérifient également l'égalité de la moyenne. Ce résultat montre au passage qu'une limite simple de fonctions harmoniques uniformément bornées est harmonique. En effet si  $u_n \xrightarrow{s} u$ , et que  $u_n$  est harmonique, alors par le lemme précédent, on peut en extraire une sous-suite qui converge uniformément sur les compacts. Une limite uniforme de fonctions harmoniques restant harmonique, on a le résultat.*

**Théorème 3 (Théorème de l'application conforme de Riemann).** *Un domaine  $\Omega$  est conformément équivalent au disque unité si, et seulement si il est simplement connexe et différent de  $\mathbb{C}$ .*

*Démonstration.* Le sens direct a été traité au début de cette section.

Pour l'autre sens, on n'utilisera de la simple connexité de  $\Omega$  que l'existence d'une racine carrée, qui est donnée par le lemme suivant :

**Lemme 9.** *Si  $\Omega$  est un domaine simplement connexe et  $g \in H(\Omega)$  ne s'annule pas sur  $\Omega$ , alors  $g$  possède une racine carrée dans  $H(\Omega)$ , i.e.  $\exists g \in H(\Omega)$  tel que  $f^2 = g$ .*

*Démonstration.* Si on note  $\varphi$  une primitive de  $\frac{g'}{g}$  telle que  $\exp \varphi(z_0) = g(z_0)$ , alors la fonction  $g \exp(-\varphi)$  est de dérivée nulle et donc  $g = \exp(\varphi)$ .  $f = \exp \frac{\varphi}{2}$  convient alors.  $\square$

Considérons  $\Sigma = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{U} \text{ holomorphe injective}\}$ .

-  $\Sigma \neq \emptyset$  : Soit  $\omega \notin \Omega$  (on a supposé que  $\Omega$  n'est pas égal à  $\mathbb{C}$  tout entier) et  $f$  tel que  $f^2(z) = z - \omega$ . (Remarquons que  $f$  est injective). Comme  $f$  est ouverte, son image contient un disque  $D(a; r)$ , et donc elle est d'intersection vide avec  $D(-a; r)$ . En effet, si on avait  $z'$  tel que  $f(z') \in D(-a; r)$ , alors pour  $z$  tel que  $f(z) = -f(z')$ , on aurait  $f^2(z) = f^2(z')$ , d'où  $z = z'$ . L'application  $h = \frac{r}{f+a}$  est donc holomorphe injective et  $|h| < 1$ . C'est donc un élément de  $\Sigma$ .

- Soit  $z_0 \in \Omega$ . Si  $h \in \Sigma$  n'est pas surjective, alors on peut trouver  $h_1 \in \Sigma$  tel que  $|h'(z_0)| < |f'(z_0)|$ .

En effet, notons, pour tout  $\alpha \in \mathbb{U}$ ,  $\varphi_\alpha(z) = \frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}$ . (on se souvient que  $\varphi_\alpha$  est une bijection holomorphe du disque dans lui-même d'inverse  $\varphi_{-\omega}$ , et qu'elle s'étend par continuité au disque fermé).

Pour  $\omega \in \mathbb{U} \setminus h(\Omega)$ , alors  $\varphi_\omega \circ h$  ne s'annule pas, et a donc une racine carrée holomorphe :  $g$ . Alors,  $h_1 = \varphi_{g(z_0)} \circ g \in \Sigma$ . En notant  $c$  la fonction  $z \rightarrow z^2$ , on a :

$$h = \underbrace{\varphi_{-\omega} \circ c \circ \varphi_{-g(z_0)}}_F \circ h_1 = F \circ h_1$$

(Le lemme de Schwartz, lemme 2) nous donne que  $|F'(0)| < 1$ . Comme  $h$  est injective,  $h'(z_0) \neq 0$  et donc  $|h'(z_0)| = |h'_1(z_0)F'(0)| < |h'_1(z_0)|$ .

Cela montre donc qu'une fonction  $h \in \Sigma$  maximisant  $|h'(z_0)|$  sera bijective.

- $\Sigma$  possède un élément maximisant  $|h'(z_0)|$ . Si  $h_n$  est tel que

$$|h'_n(z_0)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sup_{\psi \in \Sigma} \psi'(z_0)$$

alors quitte à prendre une sous suite on peut supposer d'après le lemme 8 que  $h_n$  converge uniformément (vers  $h$ ) sur tout compact, car  $\Sigma$  est uniformément majoré sur tout compact par 1. Alors  $h$  est à valeur dans  $\overline{\mathbb{U}}$  et même dans  $\mathbb{U}$  car une fonction holomorphe est ouverte. De plus,  $h'_n$  converge uniformément sur tout compact donc  $h'_n(z_0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} h'(z_0)$ . Il ne reste donc plus qu'à voir que  $h$  reste injective.

Soit donc  $z_1$  et  $z_2$  dans  $\mathbb{U}$ . Notons  $\alpha_n = h_n(z_1)$  et  $\alpha = h(z_1)$ . Prenons  $\overline{D}$  un disque centré en  $z_2$ , ne contenant pas  $z_1$  et tel que  $h - \alpha$  ne s'annule pas sur  $\partial D$  (c'est possible puisque les zéros de  $h - \alpha$  ne possèdent pas de point d'accumulation dans  $\Omega$ ). Pour  $n$  tel que :

$$\sup_{z \in \partial D} \left| \underbrace{(h_n(z) - \alpha_n)}_{f(z)} - \underbrace{(h(z) - \alpha)}_{g(z)} \right| \leq \frac{1}{2} \inf_{z \in \partial D} |(h(z) - \alpha)|$$

on a :  $|f(z) - g(z)| < |g(z)|$  pour  $z \in \partial D$ .

Par le théorème de Rouché<sup>5</sup>,  $f$  et  $g$  ont donc le même nombre de zéros dans  $\overline{D}$ , i.e. aucun. En particulier  $h(z_1) - h(z_2) \neq 0$ . □

### 3.3 Le théorème de Carathéodory

Les lemmes démontrés dans la partie précédente vont nous permettre de démontrer le théorème principal de cette partie :

**Théorème 4 (Théorème de Carathéodory).** *Soit  $\Omega$  un domaine simplement connexe borné, et  $\varphi$  une représentation conforme  $\Omega \rightarrow \mathbb{U}$ .*

1. *Si  $\beta$  est un point frontière simple, alors  $\varphi$  se prolonge continûment à  $\beta$ .*
2. *Si de plus tous les points frontières de  $\Omega$  sont simples, alors  $\varphi$  se prolonge en un homéomorphisme de  $\overline{\Omega}$  dans  $\overline{\mathbb{U}}$ .*

*Démonstration.* 1. On raisonne par l'absurde : Si  $\varphi$  ne se prolonge pas en  $\beta$ , alors on aurait une suite  $\alpha_n \rightarrow \beta$  telle que  $\varphi(\alpha_{2n}) \rightarrow \omega_1$  et  $\varphi(\alpha_{2n+1}) \rightarrow \omega_2$ . Soient  $\gamma$  comme dans la définition 5

<sup>5</sup>Le théorème de Rouché affirme que si  $\gamma$  est un chemin tel que  $\forall z \notin \Omega, \text{Ind}_\gamma(z) = 0$  et tel que  $\text{Ind}_\gamma = 0$  ou 1, et si  $f$  et  $g$  sont holomorphes tels que  $|f(z) - g(z)| < |g(z)|$  pour  $z \in \text{Im}(\gamma)$ , alors  $f$  et  $g$  ont le même nombre de zéros dans  $\{z, \text{Ind}_\gamma(z) = 1\}$

et  $\Gamma = \varphi \circ \gamma$ . Alors  $\forall r < 1$ , pour  $t$  assez proche de 1,  $\gamma(t)$  n'est pas dans le compact  $K_r = \varphi^{-1}(\overline{D}(0, r))$ . C'est à dire que  $|\Gamma(t)| \xrightarrow{t \rightarrow 1} 1$ . On a donc  $|\omega_1| = |\omega_2| = 1$ .

L'un des deux arcs *ouverts*  $\widehat{\omega_1 \omega_2}$  est tel que tout rayon du cercle unité qui en est issu coupe  $\Gamma([t; 1[)$  une infinité de fois  $\forall t$ . En effet supposons que ce n'est pas le cas : on a un rayon issu de chaque arc qui ne serait plus coupé par  $\Gamma([t; 1[)$  pour  $t$  assez grand. Le disque privé de ces deux arcs n'est pas connexe, et  $\omega_1$  et  $\omega_2$  ne sont pas dans le même composante (cf la figure 6). Ce qui contredirait la connexité de  $\Gamma([t; 1[)$ , puisque  $\Gamma$  est continu. Notons  $J$  cet arc :

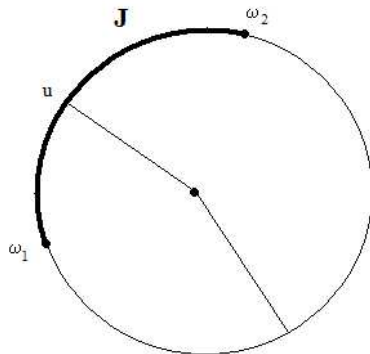


FIG. 6 – schéma

L'inverse  $\varphi^{-1}$  de  $\varphi$  est holomorphe bornée et est définie sur  $\mathbb{U}$ , donc d'après le lemme 7, elle admet des limites radiales presque partout. Si on prend  $u \in J$ , et  $t_1 < t_2 < \dots < t_n < \dots$  tels que  $t_n \rightarrow 1$  et  $\Gamma(t_k) \in [0; 1]u = \{\lambda u, \lambda \in [0; 1]\}$ , comme on sait que  $|\Gamma(t_k)| \rightarrow 1$ , on a presque sûrement :

$$\varphi^{-1}(u) = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi^{-1}(\Gamma(t_k)) = \lim_{k \rightarrow \infty} \gamma(t_k) = \beta$$

Cela implique, toujours par le lemme 7, que  $\varphi^{-1}$  est constante sur  $\mathbb{U}$ . C'est absurde. On peut donc prolonger  $\varphi$  en  $\beta$ . Notons toujours  $\varphi(\beta)$  sa limite en  $\beta$ .

2. On définit comme ci-dessus  $\varphi(\beta) \forall \beta \in \overline{\Omega}$ . On ne sait pas encore que  $\varphi$  est continue sur  $\partial\Omega$ . Soit donc  $(\beta_n)$  une suite de  $\partial\Omega$  tendant vers  $\beta$ . Par continuité de l'extension point par point, on peut trouver,  $\forall n$ , un point  $\alpha_n \in \Omega$  tel que  $|\alpha_n - \beta_n| < \frac{1}{n}$  et  $|\varphi(\alpha_n) - \varphi(\beta_n)| < \frac{1}{n}$ . Comme  $\beta_n \rightarrow \beta$ , on a  $\alpha_n \rightarrow \beta$ , et donc par 1,  $\varphi(\alpha_n) \rightarrow \varphi(\beta)$ . La conclusion  $\varphi(\beta_n) \rightarrow \varphi(\beta)$  s'en suit.  $\varphi$  est donc bien continue sur tout  $\overline{\Omega}$ . La compacité de  $\overline{\Omega}$  entraîne la compacité de  $\varphi(\overline{\Omega})$ , et donc  $\varphi(\overline{\Omega}) = \overline{\mathbb{U}}$ . Supposons que  $\varphi$  n'est pas injective. Comme  $|\varphi| = 1$  sur  $\partial\Omega$  et  $|\varphi| < 1$  sur  $\Omega$  et comme  $\varphi$  est injective sur  $\Omega$ , c'est donc que l'on a  $\beta_1$  et  $\beta_2 \in \partial\Omega$  tels que :  $\beta_1 \neq \beta_2$  et  $\varphi(\beta_1) = \varphi(\beta_2) = u \in \partial\mathbb{U}$ . Quitte à multiplier  $\varphi$  par une constante de module 1, on peut même supposer que l'on a  $\varphi(\beta_1) = \varphi(\beta_2) = 1$ .

Comme  $\beta_1$  et  $\beta_2$  sont deux points frontières simples, on peut trouver  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  deux arcs dans  $\overline{\Omega}$  paramétrés par  $[0; 1]$  tels que  $\gamma_i([0; 1[) \subset \Omega$  et  $\gamma_i(1) = \beta_i$ . Posons  $\Gamma_i = \varphi \circ \gamma_i$ . C'est un arc continu dans  $\mathbb{U}$  tel que  $\Gamma_i(1) = \varphi(\beta_i) = \varphi(u)$ . Pour  $i = 1$  et 2,

$$\lim_{t \rightarrow 1} \varphi^{-1} \circ \Gamma_i(t) = \lim_{t \rightarrow 1} \gamma_i(t) = \beta_i$$

On applique le lemme 6 à  $\varphi^{-1}$ , qui est bornée sur  $\mathbb{U}$  :  $\varphi^{-1}$  a une limite radiale en 1 égale à la fois à  $\beta_1$  et  $\beta_2$ . C'est absurde car on a supposé  $\beta_1 \neq \beta_2$ .

La fonction  $\varphi$  est donc continue et bijective sur le compact  $\overline{\Omega}$ . C'est donc bien un homéomorphisme de  $\overline{\Omega}$  sur  $\overline{\mathbb{U}}$ . □

**Corollaire 1.** *Si tous les points frontières de  $\Omega$  sont simples, alors  $\partial\Omega$  est une courbe de Jordan (i.e. homéomorphe au cercle unité).*

**Proposition 1.** *La réciproque est aussi vraie, c'est à dire si un domaine  $\Omega$  simplement connexe à pour frontière un arc de Jordan  $\Gamma$  alors sa frontière est constituée de points simples.*

*Démonstration.* Si  $\zeta$  est un point frontière, on va définir  $(O_p)_p$  base de voisinages connexes de  $\zeta$ .

Soit  $\gamma$  un paramétrage de  $\Gamma$ . On suppose que  $\gamma$  est paramétré par  $[0; 1]$  avec  $\gamma(0) = \gamma(1) = \zeta$ . On donne à un sens  $\gamma(t)$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$  par  $\gamma(t) = \gamma(t \bmod 1)$ . Pour  $a \neq b \in \Gamma \setminus \{\zeta\}$ , notons  $\widehat{ab}_\Gamma = \widehat{ba}_\Gamma$  l'arc ouvert contenu dans  $\Gamma \setminus \zeta$ , c'est-à-dire, par exemple si  $t_a = \gamma^{-1}(a) < t_b = \gamma^{-1}(b)$ , alors  $\widehat{ab}_\Gamma = \{\gamma(t), t_a < t < t_b\}$ .

On trace d'abord le cercle  $S_p$  de centre  $\zeta$  et de rayon  $\frac{1}{p}$  paramétré par  $\theta \in [0; 2\pi]$ , et on note  $D_p$  le disque le contenant. L'idée est de définir  $O_p \subset D_p$  comme l'intérieur d'une «bonne» courbe de Jordan. Intuitivement, cette courbe s'obtient en concaténant des bouts de  $S_p$  et des bouts de  $\Gamma$  pour rester le maximum à l'intérieur de  $D_p$ .

Soit  $t_m = \min\{t : \gamma(t) \notin D_p\}$  et  $t_M = \max\{t : \gamma(t) \notin D_p\}$ . (Si  $\forall t, \gamma(t) \in D_p$ , c'est un cas favorable :  $\Omega \subset D_p$ , et  $O_p = \Omega$  convient). Notons  $\sigma$  un des deux arcs du cercle  $S_p$  reliant  $\gamma(t_M)$  à  $\gamma(t_m)$ .

De même que pour  $\Gamma$ , notons  $\widehat{ab}_\sigma$  l'arc de  $S_p$  reliant  $a$  à  $b$  et restant dans  $\sigma$  pour  $a, b \in \sigma$ . Soit  $A = \sigma \cap \Gamma$ . Soit  $B = \{(z, z') \in A^2 : \widehat{zz'}_\Gamma \subset D_p\}$ .

Remarquons que les éléments de  $B$  vérifient alors la propriété :

Si  $(z_1, z'_1)$  et  $(z_2, z'_2) \in B$ , alors ou bien  $\widehat{z_1 z'_1}_\sigma \subset \widehat{z_2 z'_2}_\sigma$ , ou bien  $\widehat{z_2 z'_2}_\sigma \subset \widehat{z_1 z'_1}_\sigma$ , ou bien  $\widehat{z_1 z'_1}_\sigma \cap \widehat{z_2 z'_2}_\sigma = \emptyset$  car la courbe  $\Gamma$  n'a pas de points d'intersections.

Si  $(z_0, z'_0) \in B$ , alors par uniforme continuité de  $\gamma$  il n'y a qu'un nombre fini d'autres  $(z, z') \in B$  tels que  $\widehat{z_0 z'_0}_\sigma \subset \widehat{zz'}_\sigma$ . Il y a donc un  $(z, z') \in B$  maximal contenant  $(z_0, z'_0)$ .

Par la remarque ci-dessus, les arcs  $\widehat{zz'}_\sigma$  pour  $(z, z')$  maximaux sont disjoints deux à deux. En prenant l'ensemble de ces arcs maximaux, on peut alors construire un arc de Jordan obtenu par concaténation de tous ces arcs maximaux, de bouts de  $\sigma$  et de  $\gamma([1 - t_M; t_m])$ . Pour être plus précis, on peut proposer la construction suivante :

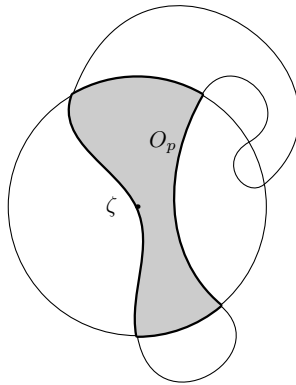
on ordonne les  $z \in \sigma$  tels que  $\exists z', (z, z') \in B$  sur  $\sigma$  dans le sens de parcours allant de  $\gamma(t_m)$  à  $\gamma(t_M)$ , en leur ajoutant  $\gamma(t_m)$  et  $\gamma(t_M)$ . Appelons  $C \subset \sigma$  l'ensemble de ces points. Pour  $z \in C \setminus \{\gamma(t_M)\}$ , soit  $z' = \inf\{z_1 \in C : z_1 > z\}$ . Si  $(z, z') \in B$ , posons  $l_z =$  la longueur de  $\gamma^{-1}(\widehat{zz'}_\Gamma)$ , sinon posons  $l_z =$  la longueur de l'arc  $\widehat{zz'}_\sigma$ , et posons  $l_{\gamma(t_M)} = \gamma^{-1}([1 - t_M; t_m])$ . Alors ce qui fait marcher la construction, c'est que  $\sum_{z \in C} l_z \leq \frac{2\pi}{p} + 1 < \infty$ . Pour  $z \in C \setminus \{\gamma(t_M)\}$ , si on reprend le  $z'$  défini ci-dessus, alors on peut donc paramétrer notre courbe sur  $[\sum_{z_1 < z} l_{z_1}; l_z + \sum_{z_1 < z} l_{z_1}]$ , par  $\widehat{zz'}_\Gamma$  si  $(z, z') \in B$  et par  $\widehat{zz'}_\sigma$  sinon. On clos notre arc en parcourant l'arc  $\gamma([1 - t_M; t_m])$ . Cet arc est homéomorphe au cercle unité par construction.

On construit ainsi deux ouverts connexes, pour chacun des deux choix possibles de  $\sigma$ . Par construction de ces ouverts, ils ne rencontrent pas  $\Gamma$ . Ils sont donc ou bien contenus dans  $\Omega$ , ou bien dans son complémentaire. Comme  $\Gamma$  sépare le plan en  $\Omega$  et son complémentaire, un de ces ouverts est contenu dans  $\Omega$ , notons le  $O_p$ , et l'autre est contenu dans  $\mathbb{C} \setminus \Omega$ .

Alors  $O_p$  est un ouvert connexe de  $\Omega$ , de plus  $O_p$  est voisinage de  $\zeta$  car  $(\Omega \cap S_p) \setminus O_p$  est à distance strictement positive de  $\zeta$  (sa frontière est contenue dans  $\gamma([t_m; t_M]) \cup S_p$ , qui est à distance  $> 0$  de  $\zeta$ ). Enfin, c'est une base de voisinage car inclus dans une base de voisinage.

Donc, si  $z_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \zeta$  alors pour tout  $p$  il existe un  $N_p > N_{p-1}$  tel que tous les  $z_n$  avec  $n > N_p$  soient dans  $O_p$ . Alors on définit  $\sigma_p$  : on relie les  $z_n$  avec  $N_{p-1} < n \leq N_p + 1$  en restant dans  $O_p$ . Alors  $\sigma$  obtenu par concaténation des  $\sigma_p$  est l'arc cherché. (On paramètre par exemple  $\sigma$  par  $t \in [0; 1]$  de telle sorte que sur  $[1 - \frac{1}{p}; 1 - \frac{1}{p+1}]$ ,  $\sigma = \sigma_p$ . Alors par construction,  $\sigma$  est continu sur  $[0; 1[$ , et le fait que pour  $t \geq 1 - \frac{1}{p}$ ,  $\sigma(t) \in O_p$  nous donne la continuité de  $\sigma$  en 1.)

□

FIG. 7 – Une configuration possible et la construction de  $O_p$ 

### 3.4 Résolution du problème de Dirichlet et mesure harmonique

On suppose dans tout ce paragraphe que  $\Omega$  est un domaine simplement connexe borné dont la frontière est constituée de points simples.

Le théorème 4 va nous permettre de conclure facilement à l'aide du cas  $\Omega = \mathbb{U}$

Soit  $\varphi$  une application conforme  $\Omega \rightarrow \mathbb{U}$ . On sait par le théorème 4 que  $\varphi$  s'étend en un homéomorphisme  $\overline{\Omega} \rightarrow \overline{\mathbb{U}}$ .

**Définition 6.** Pour  $z \in \Omega$ , on définit la mesure harmonique  $\omega(z, \cdot, \Omega)$  en  $z$  relativement à  $\Omega$  comme la mesure image de par  $(\varphi_{\partial\Omega})^{-1}$ . C'est à dire que pour  $E \subset \partial\Omega$  :

$$\omega(z, E, \Omega) = \omega(\varphi(z), \varphi(E), \mathbb{U}) = \int_{\varphi(E)} \frac{1 - |\varphi(z)|^2}{|e^{i\theta} - \varphi(z)|} \frac{d\theta}{2\pi} \quad (16)$$

On note également cette mesure  $d\omega(z, \cdot, \Omega)$

Cette notion n'est au premier abord pas définie de manière claire, car elle pourrait dépendre de la représentation  $\varphi$  choisie. Mais le théorème 5, en plus de justifier l'appellation de mesure harmonique, va nous permettre de montrer que cette définition ne dépend pas du choix de  $\varphi$ .

**Théorème 5.** Avec les hypothèses rappelées ci-dessus, si  $f$  est une fonction continue (par morceaux) sur  $\partial\Omega$ , alors

$$u(z) = \int_{\partial\Omega} f(\psi) d\omega(z, \psi, \Omega) \quad (17)$$

est solution du problème de Dirichlet dans  $\Omega$  avec conditions aux frontières données par  $f$ .

*Démonstration.* En effet, par définition de  $d\omega(z, \cdot, \Omega)$  comme la mesure image de  $d\omega(z, \cdot, \mathbb{U})$  par  $\varphi^{-1}$ , on a :

$$u(z) = \int_0^{2\pi} f \circ \varphi^{-1}(e^{i\theta}) \frac{1 - |\varphi(z)|^2}{|e^{i\theta} - \varphi(z)|} \frac{d\theta}{2\pi} \quad (18)$$

Et donc  $u(z)$  est l'intégrale de Poisson de  $f \circ \varphi^{-1}$  en  $\varphi(z)$ . Donc par le théorème 1,  $u \circ \varphi^{-1}$  résout le problème de Dirichlet avec conditions au bord données par  $f \circ \varphi^{-1}$ . En particulier, comme  $\varphi$  est continue sur  $\overline{\Omega}$ , pour  $\beta \in \partial\Omega$  un point de continuité de  $f$  :

$$\lim_{z \rightarrow \beta} u(z) = \lim_{z \rightarrow \beta} u \circ \varphi^{-1}(\varphi(z)) = \lim_{z \rightarrow \varphi(\beta)} u \circ \varphi^{-1}(z) = f \circ \varphi^{-1}(\varphi(\beta)) = f(\beta)$$

L'harmonicité de  $u$  peut ˆtre vue de la mˆme manière que dans le cas  $\Omega = \mathbb{U}$  : si  $f$  est ˆ valeurs réelles, on a simplement :

$$u(z) = \operatorname{Re} \left( \int_0^{2\pi} f \circ \varphi^{-1}(e^{i\theta}) \frac{1 + \varphi(z)e^{i\theta}}{1 - \varphi(z)e^{i\theta}} \frac{d\theta}{2\pi} \right)$$

$u$  est donc, par dérivation sous le signe  $\int$ , la partie réelle d'une fonction holomorphe. Sinon,  $f = \operatorname{Re}(f) + i\operatorname{Im}(f)$ . □

Ce théorème nous permet maintenant d'éclaircir la définition de la mesure harmonique en montrant que sa définition ne dépend pas du choix de  $\varphi$ . Supposons que l'on a défini deux «mesures harmoniques»  $d\omega_1(z, \cdot)$  et  $d\omega_2(z, \cdot)$  sur  $\Omega$  ˆ l'aide de  $\varphi_1$  et de  $\varphi_2$ . Alors par unicité de la solution au problème de Dirichlet, l'intégrale de toute fonction continue par rapport ˆ l'une de ces mesures est égale ˆ son intégrale par rapport ˆ l'autre. Cela implique que ces deux mesures sont égales.

## 4 Généralisation ˆ un domaine de Jordan finiment connexe

Prenons ici  $\Omega$  un domaine borné dont la frontière est une réunion disjointe et finie de courbes de Jordan. On dit que  $\Omega$  est un domaine de Jordan finiment connexe. Alors la proposition montr e 1 nous dit que les points de  $\partial\Omega$  sont simples. On va déduire très joliment du cas simplement connexe la résolution du problème de Dirichlet dans ce cas. On aura quand mˆme besoin de quelques lemmes.

### 4.1 Un peu de topologie

**Lemme 10.** *On peut construire un arc continu  $\sigma : ]0; 1] \rightarrow \mathbb{C}$ , qui vérifie les conditions :*

- $|\sigma(t)| \xrightarrow{t \rightarrow 0} \infty$  et  $\sigma(1) = a \notin \overline{\Omega}$ .
- $\sigma \cap \partial\Omega$  est fini.
- $\Omega_1 = \Omega \setminus \sigma$  est simplement connexe.

*Démonstration.* – *Géométrie du domaine :*

Montrons d'abord que la frontière est formée d'un arc de Jordan (appelons le  $\Gamma_0$ ) ˆ l'intérieur duquel vivent les autres : considérons un arc maximal pour la relation d'ordre « tre ˆ l'extérieur de». S'il n'était pas maximum alors on pourrait trouver plusieurs arcs maximaux. Or,  $\Omega$  vit dans la réunion de l'intérieur de ces arcs (sinon en prenant un point hors il serait reliable ˆ l'infini), on a donc une partition ouverte :  $\Omega = \bigcup_{\gamma \text{ arc maximal}} (\Omega \cap \text{intérieur de } \gamma)$ . Contradiction.

De plus, les autres arcs vivent les uns ˆ coté des autres (ils ne sont pas comparables pour la relation d'ordre). Sinon, on en prend un maximal (appelons le  $\Gamma_1$ ) parmi les plus petits que  $\Gamma$  et un maximal ( $\Gamma_2$ ) parmi les plus petits que  $\Gamma_1$ . Alors une partie de  $\Omega$  vit entre  $\Gamma_0$  et  $\Gamma_1$  et une autre entre  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ , ce qui contredit la connexité.

- Numérotons les arcs-frontière  $\Gamma_i$  avec  $\Gamma_0$  comme précédemment. On va se servir de la connexité par arcs :

Pour  $\Gamma_0$ , prenons un arc  $\sigma$  qui va jusqu'ˆ l'infini, traverse  $\Gamma_0$  et ne s'enfonce pas trop dans  $\Omega$  et reste injectif dans  $\Omega$  c-ˆ-d qui ne coupe aucun des arcs.  $\Omega \setminus \sigma$  est resté connexe.

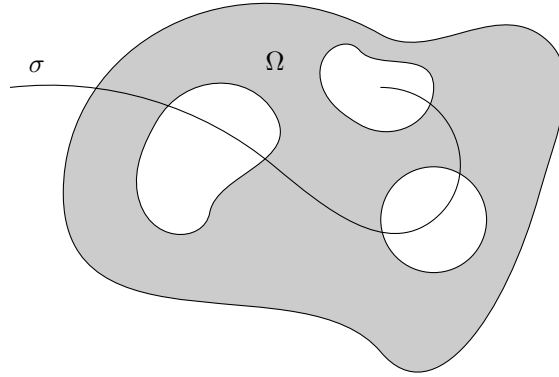
Pour  $\Gamma_1$ , on prend deux points ˆ l'intérieur on les relie puis on le premier relie ˆ  $\Omega$  sans que couper  $\sigma$  puis le deuxième ˆ l'extrémité de  $\sigma$  sans couper l'autre morceau, en restant injectif dans  $\Omega$ . Alors  $\Omega \setminus \sigma$  est resté connexe.

Puis on itère.

Comme  $(\Omega \setminus \sigma)^c$  est connexe, tout arc dans  $\Omega \setminus \sigma$  donne un indice nul aux points de  $(\Omega \setminus \sigma)^c$ . Cela implique que le domaine est simplement connexe. <sup>6</sup>

<sup>6</sup>En effet intégrales sur les arcs fermés sont nulles, on peut donc définir les primitives, donc les racines carrées, puis appliquer exactement la mˆme preuve que dans le théorème de l'application conforme de Riemann. 3



FIG. 8 – Construction de  $\sigma$ 

□

Ce domaine  $\Omega_1$  commence à être plus agréable. Mais il n'est pas encore assez régulier. En effet les points de  $\partial\Omega \cap \sigma$  n'ont aucune raison d'être des points frontières simples de  $\Omega_1$  :  $\sigma$  «découpe  $\Omega_1$  en deux localement». Mais on possède un moyen pratique de résoudre cet obstacle, donné par le lemme 9. Intuitivement, en effet une fonction  $\varphi(z) = \sqrt{z-a}$  va ajouter une phase à la traversée de  $\sigma$ , et donc transformer la frontière de  $\Omega_1$  est un arc de Jordan. Cette idée est précisée dans le lemme suivant :

**Lemme 11.**  $\varphi(\Omega_1)$  est un domaine simplement connexe dont la frontière est une courbe de Jordan.

*Démonstration. (partielle)*

La racine carrée étant à dérivée bornée, elle admet une limite aux points frontières simples ie  $\partial\Omega \setminus \sigma$  et deux limites aux points frontières doubles ie  $\overline{\Omega} \cap \sigma$  : ces limites sont opposées car on peut obtenir la racine carrée en prenant  $\varphi$  une primitive de  $z \rightarrow \frac{1}{z-a}$  alors la racine carrée s'obtient par  $\exp \frac{\varphi}{2}$  or en faisant le tour pour relier les deux cotés du point frontière considéré  $\varphi$  augmente de  $2i\pi$  donc la racine carrée se change en son opposé.

Si on montre une continuité de la racine carrée à la frontière, la frontière devient un arc de Jordan.

□

## 4.2 Résolution du problème de Dirichlet

Reprenons les notation de la partie précédente.

On peut alors résoudre le problème de Dirichlet sur  $\Omega_1$ , en transportant le problème via  $\varphi$  au domaine sympathique  $\varphi(\Omega)$ .

**Lemme 12 (Principe de Harnack).** Soit  $u_n$  une suite croissante de fonctions harmoniques sur  $\Omega$ , où dans ce lemme  $\Omega$  est un domaine quelconque. Alors ou bien  $u_n(z) \rightarrow \infty$  pour tout  $z \in \Omega$ , ou bien  $u_n(z)$  converge uniformément sur tout compact vers une limite  $u$  harmonique.

*Démonstration.* – Supposons que  $u_n \geq 0$  (Quitte à remplacer  $u_n$  par  $u_n - u_0$ ). Posons  $u$  la limite de  $u_n$  ( $u$  peut être infinie).

Si  $a \in \Omega$ , et si  $R > 0$  est tel que  $\overline{D}(a; R) \subset \Omega$ , alors toute fonction harmonique  $v$  est égale en tout point de  $D(a; R)$  à son intégrale de Poisson sur le bord de  $D(a; R)$ <sup>7</sup>. Des inégalités

<sup>7</sup>On peut voir cette propriété par unicité de la solution du problème de Dirichlet dans  $D(a; R)$  avec conditions aux frontières données pas  $v|_{\partial D(a; R)}$  :  $v$  en est solution, et son intégrale de Poisson aussi. Ces deux fonctions coïncident donc.

sur le noyau de Poisson vont donc nous permettre de limiter localement les variations de toute fonction harmonique. De l'inégalité  $(R - |z|) \leq |R e^{i\theta} - z| \leq (R + |z|)$ , on déduit les inégalités, utiles pour  $z + a \in D(a; R)$  :

$$\frac{R - |z|}{R + |z|} \leq \frac{R^2 - |z|^2}{|R e^{i\theta} - z|^2} \leq \frac{R + |z|}{R - |z|}$$

En multipliant par  $u_n(a + R e^{i\theta})$  puis en intégrant de 0 à  $2\pi$ , on obtient les inégalités :

$$\frac{R - |z|}{R + |z|} u_n(a) \leq u_n(a + z) \leq \frac{R + |z|}{R - |z|} u_n(a) \quad (19)$$

Cette inégalité, valable encore en remplaçant  $u_n$  par toute fonction harmonique positive, s'appelle *inégalité de Harnack*.

Cela montre donc que si  $u_n(a) \rightarrow \infty$ , alors  $u_n(a + z)$  aussi pour tout  $a + z \in D(a; R)$ , et que réciproquement si  $u_n$  reste bornée en  $a$ , alors elle le reste sur tout le voisinage  $D(a; R)$  de  $a$ . L'ensemble des points où  $u_n$  diverge est donc un ouvert de  $\Omega$ , tout comme son complémentaire. La connexité de  $\Omega$  nous permet de conclure que ou bien  $u$  est infinie partout, ou elle ne l'est nulle part.

- Dès lors, si on suppose que  $u_n(z)$  ne tend pas vers  $\infty$ , alors on écrit, en tout point  $a \in \Omega$ , tout  $R$  tel que  $D(a; R) \subset \Omega$  et pour tout  $n$ , l'égalité de la moyenne :

$$u_n(a) = \int_0^{2\pi} u_n(a + R e^{i\theta}) \frac{d\theta}{2\pi} \quad (20)$$

Tout ce qui est intégré est positif, on applique donc le théorème de convergence monotone en faisant tendre  $n$  vers l'infini. On obtient donc que  $u$  vérifie encore la propriété de la moyenne, elle est donc harmonique.

- Pour finir, il suffit de se souvenir du théorème de Dini<sup>8</sup> qui affirme qu'une suite croissante de fonctions  $f_n$  continues convergeant simplement vers une fonction  $f$  continue converge en fait uniformément sur les compacts. Cela s'applique parfaitement ici et donne la convergence uniforme sur les compacts de  $u_n$  vers  $u$ .

□

**Théorème 6 (Solution au problème de Dirichlet).** *Si  $f$  est une fonction continue par morceaux sur  $\Omega$ , alors il existe une unique fonction  $u(z)$  harmonique bornée sur  $\Omega$  qui satisfait le problème de Dirichlet avec conditions aux bords données par  $f$ .*

*Démonstration.* Quitte à lui ajouter une constante, supposons  $f$  positive. On commence par construire deux arcs  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  d'intersection nulle comme dans le lemme 10. Notons  $\Omega_1 = \Omega \setminus \sigma_1$  et  $\Omega_2 = \Omega \setminus \sigma_2$ . On a vu qu'on pouvait résoudre le problème de Dirichlet sur  $\Omega_1$  et sur  $\Omega_2$ . L'idée de cette démonstration est de construire une suite de solutions «partielles» au problème de Dirichlet et de conclure par le lemme de Harnack.

Si  $E$  est l'ensemble (fini) des points de discontinuité de  $f$ , alors posons  $F = E \cup (\sigma_1 \cap \partial\Omega) \cup (\sigma_2 \cap \partial\Omega)$ . Commençons par définir  $u_1$  comme étant la solution au problème de Dirichlet sur  $\Omega_1$  avec conditions aux frontières données par :

$$u_1(\zeta) = \begin{cases} f(\zeta) & \text{si } \zeta \in \partial\Omega \\ \max_{\partial\Omega} f & \text{si } \zeta \in \sigma \end{cases} .$$

<sup>8</sup>Pour le montrer, on suppose que les fonctions  $f_n$  vivent dans un compact  $K$ . En notant  $(U_n)$  la suite croissante d'ouverts  $U_n = \{x \in K, |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon\}$  (car  $f$  continue), alors  $\cup_{n \in \mathbb{N}} U_n = K$ , donc par propriété de Borel-Lebesgue, un de ces ouverts recouvre tout  $K$ .

Alors  $u_1$  est continue et positive sur  $\overline{\Omega} \setminus F$  et harmonique sur  $\Omega_1$ . De plus  $u_1 \leq \max_{\partial\Omega} f$  par le principe du maximum de Lindelöf, lemme 1. L'idée est alors de définir une fonction plus petite harmonique sur  $\Omega_2$ . Pour cela, on prend la solution  $v_1$  du problème de Dirichlet sur  $\Omega_2$  avec condition au bord donnée par  $u_1$ .  $v_1$  est égale à  $f$  sur  $\partial\Omega \setminus F$ . Comme  $v_1 = u_1$  sur  $\partial\Omega_2 \setminus F$  et que  $u_1 \leq \max_{\partial\Omega} f$ , on a  $v_1 \leq \max_{\partial\Omega} f$  sur  $\partial\Omega_2 \setminus F$ . Par le principe du maximum de Lindelöf,  $v_1 \leq \max_{\partial\Omega} f$  sur tout  $\Omega_2$ , et en particulier sur  $\sigma \cap \Omega$ . Donc  $v_1 \leq u_1$  sur  $\partial(\Omega \setminus (\sigma_1 \cup \sigma_2)) \setminus F$ . Le principe de Lindelöf appliqué cette fois-ci à l'ouvert  $\Omega \setminus (\sigma_1 \cup \sigma_2)$  nous donne  $v_1 \leq u_1$  sur tout  $\Omega$ . On définit ensuite, de même, une fonction  $u_2$  harmonique sur  $\Omega_1$  et avec condition au bord donnée par  $v_1$ . Le même raisonnement donne que  $0 \leq u_2 \leq v_1$  et que toujours,  $u_2 = f$  sur  $\partial\Omega \setminus F$ . En itérant ce procédé, on obtient une suite décroissante de fonctions positives, harmoniques une fois sur  $\Omega_1$ , une fois sur  $\Omega_2$  :

$$u_1 \geq v_1 \geq u_2 \geq v_2 \geq u_3 \geq \dots \geq 0$$

Par le principe de Harnack, la limite commune  $u$  de  $\{u_n\}_n$  et de  $\{v_n\}_n$  est harmonique sur  $\Omega_1$  et sur  $\Omega_2$ , donc sur  $\Omega$ .

Il ne reste plus qu'à montrer que  $u$  se prolonge continûment à  $\partial\Omega \setminus E$  par  $f$ . Soit donc  $\zeta \in \partial\Omega \setminus E$ . Quitte à échanger  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$ , on peut supposer  $\zeta \notin \sigma_1$ .

Remarquons déjà que cette continuité n'est *a priori* pas évidente, et que ce n'est pas parce que toutes les fonctions  $u_n$  ont cette continuité en  $\zeta$  que  $u$  l'a immédiatement.

On peut trouver un voisinage  $V$  de  $\zeta$  tel que  $V \cap (E \cup \sigma_1) = \emptyset$  et que  $W = V \cap \Omega$  soit un domaine de Jordan (pour une construction de  $V$ , voir le lemme 13).

Par le théorème de Carathéodory (théorème 4), si  $\psi$  est une représentation conforme  $\mathbb{U} \rightarrow W$ , alors  $\psi(\partial\mathbb{U}) = \partial W$ . On peut écrire, pour  $\omega = \psi(z) \in W$ , par propriété de la moyenne de la fonction harmonique  $u_n \circ \psi^{-1}$ , en se rappelant que  $u_n = f$  sur  $\partial\Omega$ .

$$u_n(\omega) = \int_{\psi^{-1}(\partial\Omega \cap \partial W)} P_z(\theta) f \circ \psi(e^{i\theta}) d\theta + \int_{\psi^{-1}(\partial W \setminus \partial\Omega)} P_z(\theta) u_n \circ \psi(e^{i\theta}) d\theta$$

Or  $\psi$  étant un homéomorphisme,  $\psi^{-1}(\partial\Omega \cap \partial W)$  est un voisinage de  $\psi^{-1}(\zeta)$ , et donc le premier terme tend vers  $f \circ \psi(z) = f(\zeta)$  quand  $z \rightarrow \psi(\zeta)$ , *i.e.* quand  $\omega \rightarrow \zeta$ .

Le deuxième terme, lui, est inférieur à  $(\sup u_n) \int_{\psi^{-1}(\partial W \setminus \partial\Omega)} P_z(\theta) d\theta$ .  $u_n$  étant majorée par  $\max_{\partial\Omega} f$ , ce deuxième terme tend uniformément vers 0 quand  $\omega \rightarrow \zeta$ .

$u_n(\omega)$  converge donc uniformément vers  $f(\zeta)$  quand  $\omega \rightarrow \zeta$ . Donc  $u(\omega)$  tend aussi vers  $f(\zeta)$ .

Et ceci conclut la preuve.  $\square$

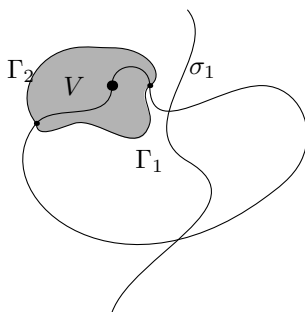
**Lemme 13.** *Avec toutes les notations comme dans la démonstration du théorème 6, alors on peut construire un tel voisinage  $V$  de  $\zeta$ .*

*Démonstration.* Une construction possible pourrait être :

Soit  $\Gamma_0 \subset \partial\Omega$  la courbe de Jordan contenue dans  $\partial\Omega$  à laquelle appartient  $\zeta$ , supposons qu'elle est paramétrée par  $\gamma(t)$ ,  $t \in [-1; 1]$  et que  $\gamma(0) = \zeta$ . On prend deux points  $\zeta_1 = \gamma(t_1)$ ,  $t_1 < 0$  et  $\zeta_2 = \gamma(t_2)$ ,  $t_2 > 0$  « proches de  $\zeta$  » tels que l'arc  $\{\gamma(t), t_1 \leq t \leq t_2\} \cap (E \cup \sigma_1) = \emptyset$ .

Le fait que les points de  $\Gamma_0$  sont des points simples (d'après la proposition 1), appliqué à chacun des deux « côtés »<sup>9</sup> de la courbe nous permet de relier tout d'abord un point de  $\Omega$  suffisamment proche de  $\zeta_i$  à  $\zeta_i$  par un arc restant dans  $\Omega_1$  (en l'appliquant à la composante de  $\mathbb{C} \setminus \Gamma_0$  contenant  $\Omega_1$ ), puis un point quelconque de la composante ne contenant pas  $\Omega$  à  $\zeta_i$  par un arc restant dans  $\mathbb{C} \setminus \Omega$ . Quitte à tronquer les boucles que l'on a éventuellement obtenues dans ce patouillage, on peut supposer que l'on a un arc de Jordan  $\Gamma_1$  dans  $\mathbb{C} \setminus \Omega$  reliant  $\zeta_1$  à  $\zeta_2$ . De même, la connexité de  $\Omega_1$  nous assure l'existence d'un arc de Jordan  $\Gamma_2$  dans  $\Omega_1$  reliant  $\zeta_1$  à  $\zeta_2$ . (voir le dessin 9). La réunion de ces deux arcs est un arc de Jordan. Par le théorème de Jordan il y a deux composantes connexes. Appelons  $V$  celle qui contient  $\zeta$ , et notons  $W = V \cap \Omega$ . Il ne reste plus qu'à voir que  $W$

<sup>9</sup>c'est à dire chacune des deux composantes connexes de  $\mathbb{C}$  délimitées par  $\Gamma_0$

FIG. 9 – construction de  $V$ 

ne rencontre pas  $\sigma$ , et que  $\partial W = \Gamma_2 \cup \{\gamma(t), t_1 \leq t \leq t_2\}$  pour avoir fini.

Le deuxième point se voit de la façon suivante : soit  $W'$  la composante connexe bornée délimitée par la courbe de Jordan  $\Gamma_2 \cup \{\gamma(t), t_1 \leq t \leq t_2\}$ . Si  $\partial W'$  était une courbe  $\mathcal{C}^1$ , alors en calculant l'indice de tout point  $z$  de  $\mathbb{C} \setminus \bar{\Omega}$  ou de  $\sigma_1$  par rapport à cette courbe, et par simple connexité de  $\Omega_1$ , tous ces points seraient d'indice nul, *i.e.* ne seraient pas dans  $W'$ . Sinon, si on doit pouvoir déformer un tout petit peu notre courbe en restant loin de  $z$  pour la rendre assez régulière et appliquer l'argument précédent. D'où  $W' \subset \Omega_1$ . Et on a montré au passage le premier point. On a également  $W' \subset V$  par connexité de  $W'$  et car  $\partial W' \subset \partial V$ . En a donc  $W' \subset W$ . L'inégalité inverse se remarque par connexité de  $W$ .  $\square$

Notons, pour  $f$  continue sur  $\partial\Omega$ ,  $u_f$  l'unique solution au problème de Dirichlet sur  $\Omega$  avec condition au bord donnée pas  $f$ .

### 4.3 Définition de la mesure harmonique

**Définition 7 (Mesure harmonique sur  $\Omega$  «finiment connexe»).** À  $z \in \Omega$  fixé, l'application  $f \rightarrow u_f(z)$  est linéaire (par unicité de la solution de Dirichlet), continue (par le principe du maximum) et positive (toujours par le principe du maximum). Par un *théorème de représentation de Riesz*, il existe une mesure positive et *régulière*<sup>10</sup>, que l'on notera  $\omega(z, \cdot, \Omega)$ , telle que pour toute fonction  $f$  continue,  $u_f(z) = \int_{\partial\Omega} f d\omega(z, \Omega)$ . On appelle encore cette mesure mesure harmonique en  $z$  relativement à  $\Omega$ .

**Remarque.** Cette définition est cohérente avec celle que l'on avait déjà pour des domaines simplement connexes, toujours par unicité de la solution au problème de Dirichlet.

**Proposition 2.** Fixons  $z_0 \in \Omega$ . On peut définir, pour toute fonction  $f$  borélienne dans  $L^1(\partial\Omega, \omega(z_0, \cdot, \Omega))$ , la fonction  $u_f(z) = \int_{\partial\Omega} f d\omega(z, \Omega)$ .

De plus si  $f$  est bornée, cette fonction est encore harmonique.

*Démonstration.* – Remarquons tout d'abord que toutes les mesures  $\omega(z, \cdot, \Omega)$  pour  $z \in \Omega$  sont «comparables». En effet l'inégalité de Harnack (équation 19, page 18) nous donne l'existence, pour tout point  $a \in \Omega$ , d'une constante  $C$  et d'une boule  $D$  autour de  $a$  telle que pour toute fonction harmonique sur  $\Omega$ , et tous points  $z_1, z_2 \in D$ ,  $\frac{1}{C} \leq \frac{h(z_1)}{h(z_2)} \leq C$ . Et par recouvrement

<sup>10</sup>une mesure  $\mu$  est dite régulière si pour tout borélien  $A$ ,

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \inf \{ \mu(U) : U \text{ ouvert}, A \subset U \} \\ &= \sup \{ \mu(F) : F \text{ compact}, F \subset A \} \end{aligned}$$

fini, on a une inégalité du même type pour  $z_1$  et  $z_2$  parcourant un compact connexe  $K$  quelconque, :

$$\exists C_K > 0, \forall z_1, z_2 \in K, \forall h \text{ harmonique}, \frac{1}{C_K} \leq \frac{h(z_1)}{h(z_2)} \leq C_K. \quad (21)$$

Cette inégalité est en particulier valable pour  $h = u_{\mathbb{1}_I} = \omega(\cdot, I, \Omega)$ , pour tout intervalle  $I$  de  $\partial\Omega$ . (la fonction  $\mathbb{1}_I$  est continue par morceaux). Par un argument de classe monotone, on a pour tout compact  $K^{11}$ , pour  $z_1, z_2 \in K$  et pour tout borélien  $A$ ,

$$\omega(z_1, A, \Omega) \leq C_K \omega(z_2, A, \Omega). \quad (22)$$

Ce qui montre que  $L^1(\omega(z_1, \cdot, \Omega)) = L^1(\omega(z_2, \cdot, \Omega))$  pour tous  $z_1$  et  $z_2$  dans  $\Omega$ , et ce qui justifie donc la définition de  $u_f$  pour  $f \in L^1(\partial\Omega, \omega(z_0, \cdot, \Omega))$ .

On veut maintenant montrer que  $u_f$  est harmonique pour toute fonction  $f$  bornée.

- Commençons par le vérifier pour  $f = \mathbb{1}_A$ , pour  $A$  un borélien de  $\partial\Omega$ .

Si  $A$  est ouvert, c'est le principe de Harnack 12. En effet, on peut trouver une suite  $\{f_n\}$  croissante de fonctions continues qui tendent vers  $\mathbb{1}_A$  presque partout. Par le principe du maximum, la suite  $u_n = u_{f_n}$  est croissante et majorée par 1 (qui est la solution du problème de Dirichlet pour la condition au bord donnée par 1). Sa limite est donc harmonique. Et cette limite est bien  $u_{\mathbb{1}_A}$  par théorème de convergence monotone.<sup>12</sup> Donc  $u_{\mathbb{1}_A}$  est harmonique.

Sinon, par régularité de la mesure, à  $z_0 \in \Omega$  fixé, on peut trouver une suite d'ouvert  $U_n$  contenant  $A$  tels que  $\omega(z_0, U_n, \Omega) \rightarrow \omega(z_0, A, \Omega)$ . Par l'inégalité 22, on a également que  $\omega(z, U_n, \Omega) \rightarrow \omega(z, A, \Omega)$  pour tout  $z \in \Omega$ . Par théorème de convergence dominée,  $u_n(z) =_{\text{def}} u_{\mathbb{1}_{U_n}}(z) \rightarrow u_{\mathbb{1}_A}(z)$  pour tout  $z$ . Par le lemme 8 et la remarque qui suit,  $u_{\mathbb{1}_A}$  est harmonique.

- Pour  $f$  positive quelconque, on peut trouver une suite croissante  $\{f_n\}$  de fonctions étagées tendant simplement vers  $f$ .

$\forall n$ ,  $f_n$  est une combinaison linéaire d'indicatrices, donc par le point précédent,  $u_{f_n}$  est harmonique. Par convergence monotone, on a également  $\forall z \in \Omega, u_{f_n}(z) \rightarrow u_f(z)$ . La suite  $u_{f_n}$  est une suite croissante de fonctions harmoniques, sa limite n'est pas infinie car c'est l'intégrale de la fonction  $L^1 f$ . Par le lemme de Harnack, sa limite  $u_f$  est harmonique. □

## Références

- [1] Lars Valerian Ahlfors. *Complex analysis an introduction to the theory of analytic fonctions of one complex variable*. McGraw-Hill, 1953.
- [2] John B. Garnett and Donald E. Marshall. *Harmonic Measure*. Pas encore publié, 2004.
- [3] Walter Rudin. *Real and Complex Analysis. Third Edition*. McGraw-Hill, 1987.

<sup>11</sup> tout compact de  $\Omega$  peut être inclus dans un compact de  $\Omega$  qui est connexe

<sup>12</sup> en effet, pour tout  $z \in \Omega$ , le théorème de convergence monotone nous dit que  $u_n(z)$  a pour limite  $\int_{\partial\Omega} \mathbb{1}_A d\omega(z, \Omega)$ .