

Le phénomène de Mascaret *

CEBILE Anne-Laure

10 septembre 2010



*sous la direction de David Lannes et Philippe Bonneton.

Table des matières

1	Introduction	4
2	Préliminaires	4
2.1	Équations de conservation en mécanique des fluides	4
2.2	Pose du problème	9
3	Ressaut hydraulique et formation de la vague	9
3.1	Formation d'un ressaut hydraulique	10
3.2	Nombre de Froude et ressaut hydraulique	12
4	Utilisation d'opérateurs linéaires pour la résolution d'équations non linéaires	17
4.1	Préliminaires	17
4.2	Paires de Lax	19
5	Ondes solitaires et comportement asymptotique	22
5.1	Ondes solitaires	22
5.2	Valeurs propres de l'opérateur de Schrödinger et vitesse des solitons	28
5.3	Équation de KdV et équation de Burgers	30
6	Etude expérimentale du mascaret de la Garonne	32
6.1	Présentation	32
6.2	Présentation du matériel de mesure	33
6.3	Conditions générales d'existence du mascaret	35
6.4	Influence du marnage sur le mascaret	36
6.5	Influence du nombre de Froude	37
6.6	Étude des éteules	38
6.7	Mascaret et transport sédimentaire	43
6.8	Equations de Green-Naghdi	46
7	Annexe	47
7.1	Opérateurs linéaires	47
7.2	Caractère dispersif des équations de Boussinesq	47

Remerciements

Je remercie chaleureusement David Lannes pour son aide précieuse et Philippe Bonneton ainsi que toute son équipe pour leur accueil chaleureux et leur aide. Je remercie en particulier Julien pour m'avoir fourni les courbes présentées ici ainsi que Marion pour les photos.

Notations physiques

A	m^2	aire de la section du fleuve
a	m	amplitude de la vague considérée
Fr	\emptyset	nombre de Froude en amont du ressaut hydraulique
Fr'	\emptyset	nombre de Froude en aval du ressaut hydraulique
g	$m.s^{-2}$	accélération de la pesanteur
h	m	hauteur d'eau en un point
H	m	hauteur d'eau a l'équilibre (ou a l'infini)
P	Pa	pression en un point
Q	$m^2.s^{-1}$	débit volumique
U	$m.s^{-1}$	vitesse moyenne du fluide sur une colonne d'eau
v	$m.s^{-1}$	vitesse du fluide selon x en un point
\vec{v}	$m.s^{-1}$	vitesse vectorielle d'un élément de fluide
η	$Kg.s^{-1}$	viscosité du fluide
λ	m	longueur d'onde des vagues
ρ	$kg.m^{-3}$	masse volumique du fluide
φ	m	potentiel vitesse d'un élément de fluide

Lexique

- *Affouillement* : creusement du fond et des berges par le courant
- *Coefficient de marée* : mesure l'ampleur d'une marée. Il prend des valeurs entre 20 et 120.
- *Eteules* : vagues secondaires suivant le front du mascaret.
- *Flot* : période pendant laquelle la marée est montante.
- *Jusant* : période pendant laquelle la marée est descendante.
- *Marnage* : différence des hauteurs d'eau entre une marée haute et une marée basse consécutives.
- *Transect* : ligne virtuelle transversale à la rivière où sont installés les appareils de mesure.
- *Turbidité* : teneur d'un liquide en matière qui le trouble (sédiments, plancton...).

1 Introduction

Le mascaret correspond à la remontée d'une vague de quelques mètres de hauteur le long d'un fleuve, sur une distance pouvant atteindre plus d'une centaine de kilomètres, et dont l'origine est un ressaut hydraulique qui se forme lorsque la marée commence à monter. Ce phénomène peut être observé sur de nombreux fleuves dans le monde (Amazone, Qiantiang en Chine, Dordogne...).

Mathématiquement, on peut interpréter ces vagues comme des ondes solitaires de l'équation de Korteweg-De Vries, qui régit le comportement d'un fluide et qui sera étudiée en troisième partie. On étudiera notamment comment on peut associer à une équation différentielle non linéaire un opérateur linéaire (dans le cas de KdV, celui de Schrödinger), dont les valeurs propres sont des intégrales de l'équation considérée.

2 Préliminaires

2.1 Équations de conservation en mécanique des fluides

On se place dans le cas d'un canal simplement connexe et on suppose que l'eau se comporte comme un fluide incompressible et que son écoulement est irrotationnel, i.e que $\vec{\text{rot}}(\vec{v}) = \vec{0}$, où \vec{v} est la vitesse du fluide.

Proposition 2.1 : *Dans ce cas, si φ est le potentiel dont dérive la vitesse, on a que :*

$$\Delta\varphi = 0.$$

DÉMONSTRATION : L'écoulement est irrotationnel, donc

$$\vec{\text{rot}}(\vec{v}) = \vec{0}.$$

Ainsi, on a qu'il existe φ tel que

$$\vec{v} = \vec{\text{grad}}(\varphi).$$

Or, d'après l'équation de conservation de la masse,

$$\text{div}(\rho\vec{v}) = \partial_t\rho.$$

$$\text{div}(\rho\vec{\text{grad}}(\varphi)) = \partial_t\rho.$$

On se place dans le cas d'un fluide incompressible, donc :

$$\rho\text{div}(\vec{\text{grad}}(\varphi)) = 0.$$

$$\Delta\varphi = 0.$$

□

Théorème 2.2 : Dans le cas d'un fluide incompressible, le débit $Q = hv$, où v est la vitesse du fluide selon x et h la profondeur du canal, est constant le long du canal.

DÉMONSTRATION :

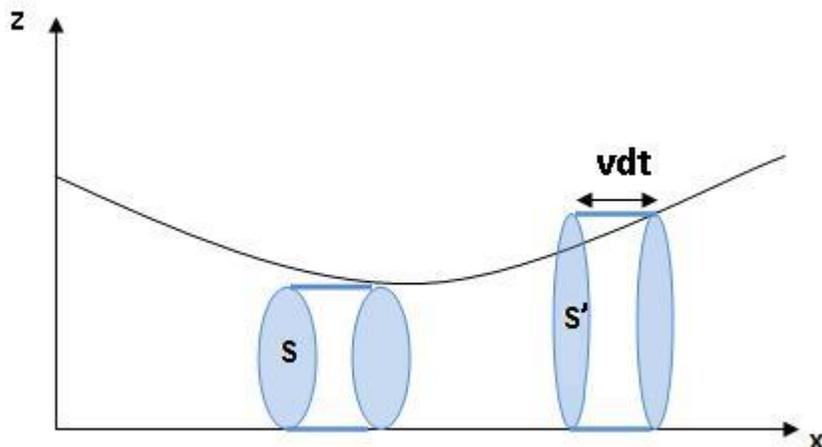


FIGURE 1 : canal se rétrécissant

On a :

$$Q(x) = S(x)v(x) = S(x)v(x)\frac{dt}{dt}.$$

Or $Sv(x)dt$ correspond au volume élémentaire de fluide qui va passer par S entre t et $t + dt$.

$$Q(x) = \frac{dV}{dt}.$$

Comme le volume entre les deux surfaces est constant (fluide incompressible) on a :

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV'}{dt}.$$

Et finalement,

$$Q = Q'.$$

Donc Q est bien constant le long du canal. □

Lemme 2.3 Equation de Navier-Stockes : Si l'écoulement est irrotationnel et en régime permanent, et si φ est le potentiel vitesse, on a la relation :

$$\frac{1}{2}v^2(x, z, t) + gh(x, t) + \frac{P(x, z, t)}{\rho} + \frac{\partial\varphi}{\partial t}(x, z, t) = cste,$$

où P est la pression, ρ la masse volumique et φ le potentiel vitesse et où la constante est la même pour l'air et pour l'eau.

DÉMONSTRATION : On commence par démontrer l'équation de Navier dans le cas général. On suppose que l'écoulement est laminaire (i.e que la vitesse d'écoulement assez faible). Cette hypothèse est vérifiée par l'expérience : dans le cas du mascaret, l'écoulement est relativement lent (quelques mètres par seconde au plus). On est alors dans la situation suivante :

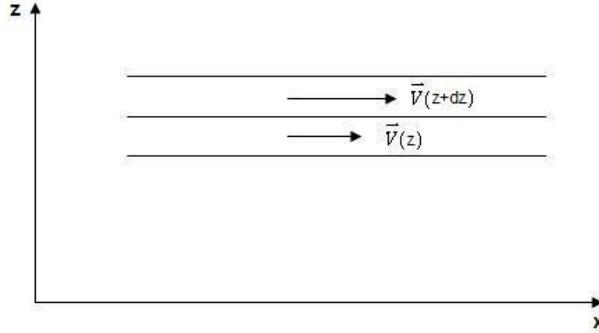


FIGURE 2

On suppose que $\vec{v} = v(z, t)\vec{e}_x$ et entre deux plans tangents, les forces de frottements par unité de longueur (selon z) s'appliquant sur le plan situé entre z et $z + dz$ s'expriment de la manière suivante :

$$\frac{\partial F_f}{\partial z} = \tau = \eta \frac{\partial v}{\partial z},$$

où η est la viscosité du fluide considéré. On a de plus des contraintes normales dues à des forces de pression en amont et en aval

$$F_p = (P(x, z, t) - P(x + dx, z, t)) dydz$$

s'appliquant sur la surface $dydz$. Pour calculer l'accélération, on effectue une dérivée particulaire :

$$a_x = \frac{Dv}{dt} = \vec{v} \cdot \vec{\text{grad}}(v) + \frac{\partial v}{\partial t}.$$

$$a_x = v_x \frac{\partial v}{\partial x} + v_y \frac{\partial v}{\partial y} + v_z \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial t}.$$

Or $\vec{v} = v(z, t)\vec{e}_x$, donc :

$$a_x = \frac{Dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t}.$$

On applique alors le Principe Fondamental de la Dynamique pour un élément de fluide situé entre $x + dx$, $y + dy$ et $z + dz$:

$$\rho dx dy dz \frac{Dv}{dt}(z, t) = P(x, z, t) dy dz - P(x + dx, z, t) dy dz + \eta \frac{\partial v}{\partial z} \Big|_{z+dz}(z, t) dx dy - \eta \frac{\partial v}{\partial z} \Big|_z(z, t) dx dy.$$

$$\rho dx dy dz \frac{Dv}{dt} = - \frac{\partial P}{\partial x} dx dy dz + \eta \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} dx dy dz,$$

où ρ est la masse volumique du fluide considéré. Donc,

$$\rho \frac{Dv}{dt} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \eta \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}.$$

Dans le cas général (l'écoulement ne se fait plus selon des plans qui glissent les uns par rapport aux autres), on a en généralisant la formule précédente et en rajoutant les forces de pesanteur :

$$\rho \vec{a} = \rho \frac{D\vec{v}}{dt} = \rho \vec{g} - \vec{\text{grad}}(P) + \eta \Delta \vec{v}.$$

Or pour l'eau comme pour l'air, on peut négliger les forces visqueuses. En effet, pour l'eau,

$$\frac{\eta \frac{\partial v}{\partial z}}{P} \lesssim \frac{10^{-3}}{10^5} \simeq 10^{-8}.$$

$$\frac{\eta \frac{\partial v}{\partial z}}{\rho g} \lesssim \frac{10^{-3}}{10^4} \simeq 10^{-7}.$$

Et pour l'air :

$$\frac{\eta \frac{\partial v}{\partial z}}{P} \lesssim \frac{10^{-5}}{10^5} \simeq 10^{-10}.$$

$$\frac{\eta \frac{\partial v}{\partial z}}{\rho g} \lesssim \frac{10^{-5}}{10} \simeq 10^{-6}.$$

On a alors :

$$\rho \frac{D\vec{v}}{dt} = \rho \vec{g} - \vec{\text{grad}}(P).$$

$$\frac{1}{2} \vec{\text{grad}}(v^2) + \frac{\partial \vec{\text{grad}}(\varphi)}{\partial t} = \vec{\text{grad}}(-gz) - \vec{\text{grad}}\left(\frac{P}{\rho}\right).$$

$$\vec{\text{grad}}\left(\frac{v^2}{2} + \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) = \vec{\text{grad}}\left(-gz - \frac{P}{\rho}\right).$$

$$\frac{v^2}{2} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} + gz + \frac{P}{\rho} = \text{cste}.$$

Or à l'interface eau/air on alors que l'eau et l'air sont sur la même ligne de courant, donc que les constantes sont égales à l'interface, c'est à dire que :

$$\begin{aligned} & \frac{v^2(h(x,t),t)}{2} + \frac{\partial \varphi}{\partial t}(h(x,t),t) + gh(x,t) + \frac{P(x,h(x,t),t)}{\rho} \\ = & \frac{v_{air}^2(h(x,t),t)}{2} + \frac{\partial \varphi_{air}}{\partial t}(h(x,t),t) + gh(x,t) + \frac{P_{air}}{\rho_{air}}. \end{aligned}$$

□

Théorème 2.4 (Théorème de Bernouilli) : *Lors d'un écoulement irrotationnel d'un fluide parfait (dont les effets visqueux sont négligeables) et incompressible, on a en régime permanent le long d'une ligne de courant :*

$$\frac{v^2(x, z, t)}{2g} + z + \frac{P(x, z, t)}{\rho g} = cste,$$

où v est la vitesse d'écoulement du fluide, P la pression et ρ la masse volumique.

DÉMONSTRATION : On a d'après l'équation de Navier-Stokes :

$$\frac{v^2(x, z, t)}{2} + \frac{\partial \varphi(x, z, t)}{\partial t} + gz + \frac{P(x, z, t)}{\rho} = cste.$$

On est en régime permanent, donc :

$$\frac{v^2(x, z, t)}{2} + gz + \frac{P(x, z, t)}{\rho} = cste.$$

□

Proposition 2.5 : *Soit V un élément de volume d'un fluide parfait en régime stationnaire et S la surface le délimitant. on a alors la relation :*

$$\begin{aligned} & \iint_S \rho \vec{v}(x, z, t) (\vec{v}(x, z, t) \cdot \vec{n}(x, y, z)) d^2S \\ & + \iint_S P(x, z, t) \vec{n}(x, y, z) d^2S - \iiint_V \rho \vec{g} dx dy dz = 0 \end{aligned}$$

avec $\vec{n}(x, y, z)$ le vecteur normal à la surface S en (x, y, z) orienté vers l'extérieur.

DÉMONSTRATION : D'après la démonstration du lemme 2.3, on a la relation :

$$\rho \frac{D\vec{v}}{dt} = -\vec{\text{grad}} P - \rho \vec{g}.$$

D'où :

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho \vec{v} \cdot \vec{\text{grad}}(v_i) = -\frac{\partial P}{\partial x_i} - \rho g_i.$$

Or on a l'équation de conservation de la masse $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0$, et comme on est en régime permanent et que le fluide est incompressible, $\text{div}(\rho \vec{v}) = 0$. Alors :

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} &= -v_i \text{div}(\rho \vec{v}) - \rho \vec{v} \cdot \vec{\text{grad}}(v_i) - \frac{\partial P}{\partial x_i} - \rho g_i. \\ \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} &= -v_i \sum_j \frac{\partial(\rho v_j)}{\partial x_j} - \rho \sum_j v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial P}{\partial x_i} - \rho g_i. \end{aligned}$$

$$\iiint_V \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} dx dy dz = - \iiint_V \frac{\partial(\rho v_j v_i + P \delta_{ij})}{\partial x_j} dx dy dz - \iiint_V \rho g_i dx dy dz,$$

où $\delta_{i,j}$ désigne le symbole de Kronecker de i et de j . En appliquant le théorème de Green-Ostrogradski, on obtient :

$$\iiint_V \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} dx dy dz = - \iint_S (\rho v_j v_i + p \delta_{ij}) d^2 S - \iiint_V \rho g_i dx dy dz.$$

On écrit maintenant cette formule sous forme vectorielle, en prenant en compte le fait que le régime est stationnaire :

$$0 = - \iint_S (\rho \vec{v}(\vec{v} \cdot \vec{n}) + P \vec{n}) d^2 S - \iiint_V \rho \vec{g} dx dy dz.$$

□

2.2 Pose du problème

On se place à l'embouchure d'un fleuve. La profondeur du fleuve ne doit pas être trop élevée et les marées doivent être assez conséquentes, ce qui limite les moments et les endroits où on peut observer un mascaret. On est dans la situation suivantes :

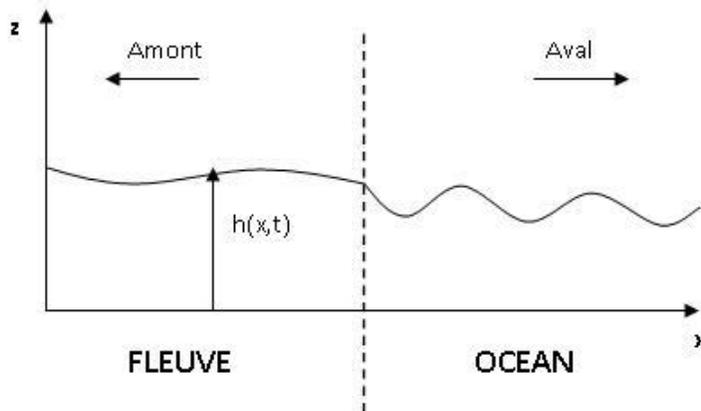


FIGURE 3 : Situation étudiée

3 Ressaut hydraulique et formation de la vague

Dans tout cet exposé, on se place dans un canal simplement connexe et on suppose que l'eau se comporte comme un fluide incompressible et que son écoulement est irrotationnel, i.e que $\vec{\text{rot}}(\vec{v}) = \vec{0}$.

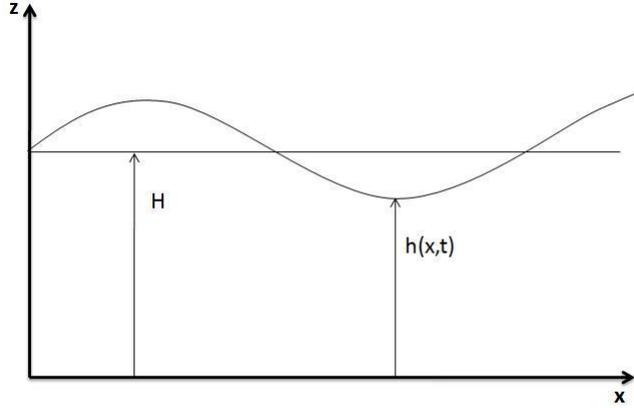


FIGURE 4 : schéma du canal

3.1 Formation d'un ressaut hydraulique

Proposition 3.1 : Dans un canal de profondeur faible devant la longueur d'onde des vagues, la vitesse de propagation des ondes surfaciques est proportionnelle au premier ordre à la racine carrée de la profondeur.

DÉMONSTRATION : On recherche des régimes ondulatoires (c'est-à dire des ondes de surface se propageant selon x), donc on a que :

$$\varphi(x, z, t) = A(z)e^{j(kx - \omega t)},$$

pour un certain $A(z)$, où ω est la pulsation et k le vecteur d'onde.

Or, on sait que $\Delta\varphi = 0$, donc on a l'équation pour A :

$$\partial_z^2 A(z) - k^2 A(z) = 0.$$

Et ainsi,

$$A(z) = a \exp(kz) + b \exp(-kz).$$

Or $v_z = \frac{\partial\varphi}{\partial z}$, Donc

$$v_z(x, z, t) = k(a \exp(kz) - b \exp(-kz)) \exp(j(kz - \omega t)).$$

Or on a la condition aux limites au fond du canal (de profondeur H) :

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, v_z(x, -H, t) = 0.$$

Donc on obtient que $\frac{dA}{dz} = 0$, et :

$$a \exp(-kH) = b \exp(kH).$$

D'où

$$A(z) = b(\exp(2kH) \exp(kz) + \exp(-kz)).$$

$$A(z) = \underbrace{2b \exp(kH)}_{B(H)} \cosh(k(z + H)).$$

Or pour l'air, on a la relation :

$$A'(z) = a' \exp(-kz),$$

car le potentiel vitesse s'annule à distance infinie de la surface de contact avec l'eau. Comme pour l'eau comme pour l'air, on a la relation :

$$\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} |_{(x, h(x, t), t)} + \rho g h(x, t) + P(x, h(x, t), t) = cste,$$

on a en écrivant $h(x, t) = s_0 \exp(j(kx - \omega t))$:

$$-j\rho B(H)\omega \cosh(kH) + P(0) + \rho g s_0 = cste = -j\rho' a' \omega + P'(0) + \rho' g s_0.$$

Or les conditions aux limites à la surface nous donnent la relation :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} |_{z=0} = \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial \varphi'}{\partial z} |_{z=0}.$$

D'où :

$$kB(H) \sinh(kH) = -j\omega s_0 = -ka'.$$

En prenant en compte le fait que $P(0) = P'(0)$, on a :

$$-j\rho B(H)\omega \cosh(kH) + \rho g s_0 = j\rho' a' \omega - \rho' g s_0.$$

$$\begin{aligned} -j\rho B(H)\omega \cosh(kH) + \rho g j k \frac{B(H)}{\omega} \sinh(kH) &= j\rho' \omega B(H) \sinh(kH) \\ &+ \rho' g j k \frac{B(H)}{\omega} \sinh(kH). \end{aligned}$$

$$-\rho \omega^2 \cosh(kH) + \rho g k \sinh(kH) = \rho' \omega^2 \sinh(kH) + g \rho' k \sinh(kH).$$

$$\omega^2 = gk \frac{(\rho - \rho') \tanh(kH)}{\rho + \rho' \tanh(kH)}.$$

Or ici on a $\rho \gg \rho'$, donc :

$$\omega^2 = gk \tanh(kH).$$

Et comme on suppose que la hauteur était petite devant la longueur d'onde de la vague, on a que $kH \ll 1$. Donc :

$$\omega^2 = gk^2 H.$$

$$c^2 = (gH)^{-1}.$$

$$c = \sqrt{gH}.$$

□

Ainsi, lorsque la marée monte, elle s'engouffre dans le canal, moins profond que la mer, ce qui provoque son ralentissement. Une discontinuité dans la hauteur de l'interface eau/air se produit alors avec une hauteur de fluide supérieure du côté de la mer, et on est dans les conditions d'un ressaut hydraulique.

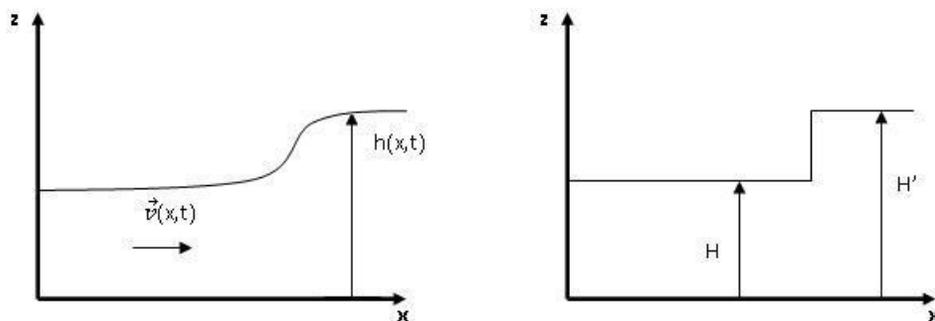


FIGURE 5 : Création d'une discontinuité

Ce ressaut se propage ensuite en vérifiant l'équation de KdV. Nous montrerons dans ce qui suit que cette équation a des solutions en solitons.

3.2 Nombre de Froude et ressaut hydraulique

Définition 3.2 : *Le nombre de Froude d'un fluide est défini par :*

$$Fr(x) = \frac{v(x)}{\sqrt{gh(x)}}$$

où V est la vitesse d'écoulement du fluide selon x , $h(x)$ la profondeur du canal en x et g l'accélération de la gravité.

Remarque 3.3 : *Dans le cas du mascaret ou plus généralement d'un ressaut hydraulique en translation, v est remplacée par $U = v - C$ où v est la vitesse du fluide selon la coordonnée x en amont du ressaut et C est la vitesse du ressaut. U est donc la vitesse relative du ressaut dans le référentiel se déplaçant à la vitesse du fluide en amont du ressaut.*

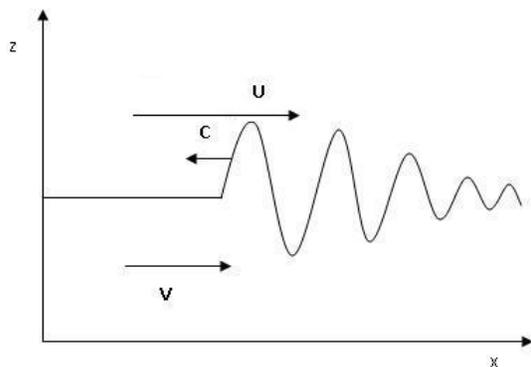


FIGURE 6 : Schéma du ressaut

Le comportement du fluide après un ressaut hydraulique dépend de son nombre de Froude : s'il est légèrement supérieur à 1, on observe une suite d'ondulations libres à la surface ; s'il est grand devant 1, l'écoulement est turbulent et se présente sous forme de rouleaux. Les deux situations sont possibles dans le cas du mascaret.

Théorème 3.4 : *Entre les nombres de Froude en amont et en aval de la discontinuité, on a la relation suivante où les ' désignent les grandeurs en aval :*

$$Fr^{2/3} Fr'^{2/3} (Fr^{2/3} + Fr'^{2/3}) = 2.$$

DÉMONSTRATION : On a d'après le théorème de Bernoulli :

$$cste = \frac{1}{2}\rho v(x)^2 + \rho gh(x) + P(x, z),$$

où $h(x)$ est la profondeur de l'eau. Or le débit $Q = h(x)v(x)$ est constant. On a alors :

$$\rho \frac{v^2}{2} + Q\rho \frac{g}{v} = \rho \frac{v'^2}{2} + Q\rho \frac{g}{v'},$$

où les ' désignent les grandeurs après la discontinuité. Comme on est à la surface, $P = P_{air}$ et les vitesses sont prises loin de la discontinuité, alors :

$$(v - v') \left[(v + v') - 2Qg \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{v'} \right) \right] = 0.$$

On suppose que $v \neq v'$, et alors :

$$gQ = \frac{1}{2}vv'(v + v').$$

En écrivant $Q = h^{2/3}v^{2/3}h'^{1/3}v'^{1/3} = h'^{2/3}v'^{2/3}h^{1/3}v^{1/3}$ et $v = Fr\sqrt{gh}$, on a :

$$2g = \frac{v^2v'}{h^{2/3}v^{2/3}h'^{1/3}v'^{1/3}} + \frac{v'^2v}{h'^{2/3}v'^{2/3}h^{1/3}v^{1/3}}.$$

D'où :

$$\frac{Fr^2ghFr'\sqrt{gh'}}{h^{2/3}Fr^{2/3}(gh)^{1/3}h'^{1/3}Fr'^{1/3}(gh')^{1/6}} + \frac{Fr'^2gh'Fr\sqrt{gh}}{h'^{2/3}Fr'^{2/3}(gh')^{1/3}h^{1/3}Fr^{1/3}(gh)^{1/6}} = 2g.$$

Et ainsi :

$$Fr^{2/3} Fr'^{2/3} (Fr^{2/3} + Fr'^{2/3}) = 2.$$

□

Ceci montre en particulier que $Fr > 1$ et $Fr' < 1$ ou $Fr < 1$ et $Fr' > 1$.

Théorème 3.5 : *On a la relation suivante entre les profondeurs en aval et en amont de la discontinuité où les ' désignent les grandeurs en aval de la discontinuité :*

$$\frac{H'}{H} = \frac{-1 + \sqrt{1 + 8Fr^2}}{2},$$

avec H et H' qui désignent la hauteur d'eau en amont et en aval respectivement.

DÉMONSTRATION :

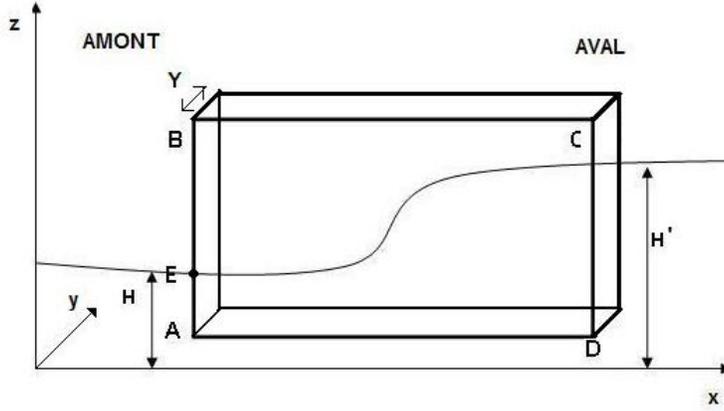


FIGURE 7 : Vague à un instant donné.

On applique le théorème 2.5 au pavé défini par la surface $ABCD$ et par un segment Y pris sur la droite (Oy) . On nomme $\vec{n}(x, y, z)$ le vecteur sortant normal à la surface S entourant le volume V au point (x, y, z) et on appelle v_x et n_x les composantes selon (Ox) de \vec{v} la vitesse d'écoulement du fluide et de \vec{n} . On a en projetant sur \vec{e}_x :

$$\iint_S \rho v_x(x) (\vec{v}(x) \cdot \vec{n}) d^2S + \iint_S P(x, z) n_x d^2S = 0.$$

Soit $U = v_x(x_A)$ et $U' = v_x(x_D)$. Comme on a un fluide incompressible :

$$\frac{\partial P}{\partial z}(z) = -\rho g.$$

$$P(x, z) = P_{air} + \rho g(h(x) - z),$$

où $h(x)$ est la profondeur du canal en x avec $h(x_A) = h(-\infty) = H$ et $h(x_D) = h(+\infty) = H'$. Donc comme on suppose que $\vec{v}(x) = v_x(x)\vec{e}_x$:

$$\iint_S \rho v_x(x) (\vec{v}(x) \cdot \vec{n}) d^2S = (\rho U'^2 H' - \rho U^2 H) Y.$$

De plus, comme on a projeté selon x , les seules intégrales non nulles sont celles selon un côté $x = cste$. De plus, entre E et C , $P = cste = P_{air}$. Donc :

$$\iint_S P(x, z) n_x d^2S = \left(P_{air}(H - H') - \int_0^H (P_{air} - \rho g(H - z)) dz + \int_0^{H'} (P_{air} + \rho g(H' - z)) dz \right) Y.$$

C'est-à-dire :

$$\iint_S P(x, z) n_x d^2S = \frac{\rho g}{2} (H'^2 - H^2) Y.$$

D'où :

$$U'^2 H' - U^2 H + \frac{g}{2}(H'^2 - H^2) = 0.$$

Or $U' H' = U H$ par conservation du débit.

$$U'^2 \left(H' - \frac{H'^2}{H} \right) + \frac{g}{2}(H'^2 - H^2) = 0.$$

$$(H - H') \left[U'^2 \frac{H'}{H} - \frac{g}{2}(H' + H) \right] = 0.$$

Comme $H \neq H'$,

$$U' = \sqrt{g \frac{H}{H'} \frac{H + H'}{2}}.$$

$$U = \sqrt{g \frac{H'}{H} \frac{H + H'}{2}}.$$

En développant la deuxième formule, on a :

$$gH'^2 + gHH' - 2U^2 H = 0.$$

$$\left(\frac{H'}{H} \right)^2 + \frac{H'}{H} - \frac{2U^2}{gH} = 0.$$

En résolvant cette équation de degré 2 en $\frac{H'}{H}$, on trouve :

$$\frac{H'}{H} = \frac{-1 + \sqrt{1 + 8Fr^2}}{2}.$$

□

On a ainsi relié la différence de hauteurs au niveau du ressaut hydraulique au nombre de Froude en amont du saut.

Proposition 3.6 : *En amont du ressaut hydraulique, la vitesse U du fluide est plus élevée que celle des ondes surfaciques, en aval elle est moins élevée. Ceci est équivalent au fait que $Fr > 1$ et $Fr' < 1$, on a donc un changement de régime au niveau du ressaut hydraulique.*

DÉMONSTRATION : On a :

$$U' = \sqrt{g \frac{H}{H'} \frac{H + H'}{2}}.$$

$$U = \sqrt{g \frac{H'}{H} \frac{H + H'}{2}}.$$

Et $H' > H$ donc :

$$U' < \sqrt{g \frac{2H'}{2}}.$$

$$U > \sqrt{gH}.$$

Et on a bien $Fr > 1$ et $Fr' < 1$.

□

Remarque 3.7 : Dans la nature, on observe deux types de mascaret, la transition entre les deux semblant dépendre du nombre de Froude si celui-ci est faible (inférieur ou de l'ordre de 1.3), une série de vagues se forme au niveau du ressaut, sinon la vague initiale se brise et c'est un front raide qui se propage, comme illustré sur la figure 4. Cependant, aucun calcul théorique ni simulation numérique n'aboutit à ces résultats aujourd'hui.

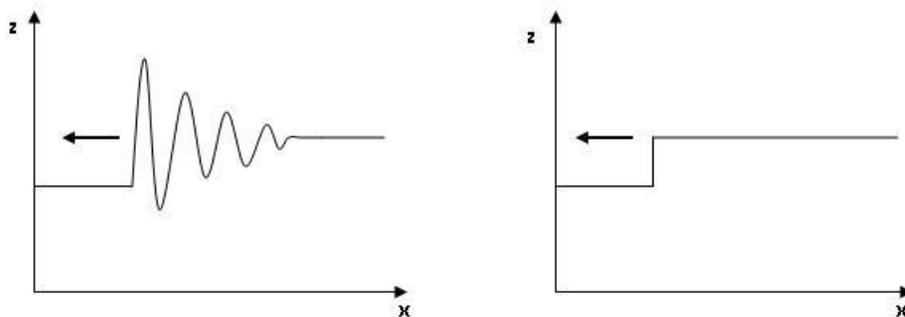


FIGURE 8 : Figure de gauche : propagation d'un ressaut avec un nombre de Froude $Fr < 1.2$; figure de droite, propagation d'un ressaut avec $Fr > 1.5$



FIGURE 9 : A droite : mascaret turbulent sur le Qiantang (Chine), a gauche : mascaret ondulant sur l'Amazone

Remarque 3.8 : Sur les schémas, l'amont est à gauche et même si la discontinuité se propage de droite à gauche, l'eau coule de gauche à droite. Sur les photos, c'est le contraire.

Le ressaut hydraulique va ensuite se propager en suivant l'équation de KdV, que nous allons étudier dans la suite de cet exposé.

Remarque 3.9 : L'expression du nombre de Froude proposée ici s'applique en réalité uniquement dans le cas d'un canal rectangulaire. Dans le cas général, la définition du nombre de Froude est :

$$Fr^2 = \frac{v^2}{gD},$$

avec $D = \frac{dA}{dh}$, où A est l'aire d'une coupe transverse de la rivière. Dans le cas d'un canal rectangulaire, on a $A = LH$ où L est la largeur du canal, et on retrouve bien que $Fr = \frac{v}{\sqrt{gH}}$.

4 Utilisation d'opérateurs linéaires pour la résolution d'équations non linéaires

Dans cette partie, nous étudierons des méthodes de résolution de l'équation de Korteweg-de Vries et montrerons que cette équation a des solutions qui se comportent comme une double vague aux temps grands.

4.1 Préliminaires

Définition 4.1 : *L'équation de Korteweg-de Vries (KdV) est une équation d'ordre 3 régissant le mouvement d'un fluide. Elle s'écrit :*

$$\partial_t u = -(u\partial_x u + \partial_x^3 u) = K(u).$$

Remarque 4.2 : *Cette équation est obtenue en effectuant un développement au deuxième ordre des équations d'Euler, obtenues en supposant le liquide incompressible, l'écoulement irrotationnel et, que $z = h(x, t)$ à la surface, que la composante verticale de la vitesse est nulle au fond du canal et en utilisant l'équation de Newton reliant accélération et forces exercées sur les particules du fluides :*

$$\begin{cases} \Delta\varphi = 0 & \text{pour } 0 < z < h(x, t). \\ \partial_z\varphi = 0 & \text{pour } x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}, z = 0. \\ \partial_z\varphi = \partial_t h + \partial_x\varphi\partial_x h & \text{pour } x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}, z = h(x, t). \\ \partial_t\varphi + \frac{1}{2}((\partial_x\varphi)^2 + (\partial_z\varphi)^2) + gh = 0 & \text{pour } x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}, z = h(x, t). \end{cases}$$

φ représente le potentiel vitesse et $h(x, t)$ la profondeur du canal en (x, t) . Au premier ordre, on obtient l'équation :

$$\partial_t h(x, t) + \sqrt{gH}\partial_x h(x, t) = 0,$$

où H est la profondeur moyenne du canal. Cette équation est celle d'une onde solitaire se déplaçant à la vitesse \sqrt{gH} . Au deuxième ordre, on obtient l'équation de KdV. Celle-ci reste valable dans la limite où le rapport de l'amplitude de l'onde qui se propage par la profondeur du canal est de l'ordre du rapport entre cette profondeur et la longueur d'onde au carré, celui-ci restant négligeable devant 1.

On étudiera pour certains théorèmes une classe plus générale d'équations, de la forme :

$$\partial_t u = K'(u)$$

avec K' un opérateur linéaire.

Hypothèse 4.3 : *On se place dans un espace de Hilbert \mathcal{H} . Nous étudions ici les solutions $(x, t) \mapsto u(x, t) \in C^\infty$, définies pour tout $t \in \mathbb{R}$ et qui tendent vers 0 quand $x \rightarrow \pm\infty$ ainsi que leurs dérivées. On suppose de plus que pour toute solution u , il existe $(C_k)_{k \in \mathbb{N}^2} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^2}$ tel que $\forall k \in \mathbb{N}^2, \forall t \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, |\partial_x^{k_1} \partial_t^{k_2} u(x, t)| < C_k$, où $k = (k_1, k_2)$. On suppose enfin que pour toute solution $(x, t) \mapsto u(x, t)$, il existe une fonction g intégrable sur \mathbb{R} ne dépendant que de la position et telle que $\forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, |u(x, t)| < g(x)$.*

Proposition 4.4 : De telles solutions de l'équation de KdV sont déterminées uniquement par leurs conditions initiales.

DÉMONSTRATION : Soit u et v deux solutions de l'équation de KdV, telles que $\forall x \in \mathbb{R}, u(x, 0) = v(x, 0)$. En soustrayant les deux équations et en posant $w = u - v$ on a :

$$\begin{aligned}\partial_t u + u\partial_x u + \partial_x^3 u - (\partial_t v + v\partial_x v + \partial_x^3 v) &= 0. \\ \partial_t w + u\partial_x w + w\partial_x v + \partial_x^3 w &= 0.\end{aligned}$$

On multiplie ensuite l'équation par w et on intègre sur tout \mathbb{R} en x . Alors :

$$w\partial_t w + uw\partial_x w + w^2\partial_x v + w\partial_x^3 w = 0.$$

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \left(\partial_t \left(\frac{1}{2} w^2 \right) (x, t) + u(x, t) \partial_x \left(\frac{1}{2} w^2 \right) (x, t) \right) dx \\ + \int_{\mathbb{R}} (w^2(x, t) \partial_x v(x, t) + w(x, t) \partial_x^3 w(x, t)) dx = 0\end{aligned}$$

Or :

$$\int_{\mathbb{R}} w(x, t) \partial_x^3 w(x, t) dx = [w\partial_x^2 w]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{\mathbb{R}} \partial_x w(x, t) \partial_x^2 w(x, t) dx$$

et comme w et $\partial_x^2 w$ tendent vers 0 quand $x \rightarrow \pm\infty$, on a :

$$\int_{\mathbb{R}} w(x, t) \partial_x^3 w(x, t) dx = - \int_{\mathbb{R}} \partial_x \left(\frac{1}{2} \partial_x (w^2) \right) (x, t) dx = \left[-\frac{1}{2} \partial_x (w^2) \right]_{-\infty}^{+\infty} = 0.$$

Et de même en effectuant une intégration par partie,

$$\int_{\mathbb{R}} u(x, t) w(x, t) \partial_x w(x, t) dx = - \int_{\mathbb{R}} \partial_x u(x, t) w^2(x, t) dx.$$

Comme on a supposé que u était majorée par une fonction ne dépendant que de x et intégrable sur \mathbb{R} , donc on peut appliquer le théorème de convergence dominée, et :

$$\int_{\mathbb{R}} \partial_t (w^2)(x, t) dx = \partial_t \int_{\mathbb{R}} w^2(x, t) dx.$$

Ainsi,

$$\partial_t \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2} w^2(x, t) dx + \int_{\mathbb{R}} \left(\partial_x v(x, t) - \frac{1}{2} \partial_x u(x, t) \right) w^2(x, t) dx = 0.$$

En notant $E(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} w^2(x, t) dx$ et $m = \sup_{(x,t) \in \mathbb{R}^2} |2\partial_x v(x, t) - \partial_x u(x, t)|$, on a $m < \infty$ par hypothèse, et on obtient l'inégalité :

$$\frac{dE}{dt}(t) \leq mE(t).$$

D'après le lemme de Grönwall, $0 \leq E(t) \leq E(0)e^{mt}$ et donc comme $E(0) = 0$, on a :

$$\forall t \in \mathbb{R}, 0 \leq \int_{\mathbb{R}} w^2(x, t) dx = 2E(t) = 0.$$

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, u(x, t) = v(x, t)$. □

4.2 Paires de Lax

Dans ce paragraphe, nous montrerons le théorème suivant :

Théorème 4.5 : Soit u solution de l'équation de KdV et $L_u = D + \frac{1}{6}u$ où D est l'opérateur différentiel. Supposons qu'il existe B opérateur antisymétrique dépendant de u tel que : $[B, L_u] = K(u)I$ où I désigne l'opérateur identité et $[A, A'] = AA' - A'A$. Alors les valeurs propres de L_u sont des intégrales de l'équation de KdV.

Proposition 4.6 : Les solutions de KdV respectant l'hypothèse 4.3 sont déterminées uniquement par leurs conditions initiales.

On peut donc a priori associer de manière unique à chaque solution un opérateur linéaire, celui-ci ne dépendant également que des conditions initiales.

Définition 4.7 : On considère une famille $(L(t))_{t \in \mathbb{R}}$ d'opérateurs linéaires. Les $(L(t))_{t \in \mathbb{R}}$ sont dits unitairement équivalents s'il existe une famille $(U(t))_{t \in \mathbb{R}}$ d'opérateurs unitaires ne dépendant que du temps telle que $(U(t)^{-1}L(t)U(t))_{t \in \mathbb{R}}$ ne dépende pas du temps.

Théorème 4.8 : Soit \mathcal{F} un espace de fonctions tel que $x \mapsto u(x, t)$ soit dans \mathcal{F} pour tout $t \in \mathbb{R}$. On suppose que l'on peut associer à chaque fonction u de \mathcal{F} un opérateur linéaire auto-adjoint $L = L_u$ appartenant à \mathcal{H} tel que si u vérifie $\partial_t u = K'(u)$ alors $(L_u(t))_{t \in \mathbb{R}}$ est unitairement équivalent. Alors, les valeurs propres de L_u sont des intégrales premières de l'équation considérée.

DÉMONSTRATION Soit $\lambda(0)$ une valeur propre de $L_u(0) = L(0)$ et $t \in \mathbb{R}$. Soit ψ tel que $L(0)\psi = \lambda\psi$. On pose $\varphi(t) = U(t)U(0)^{-1}\psi(t)$. C'est possible car $U(0)$ est unitaire donc inversible. Soit $V = U^{-1}(t)L(t)U(t)$. Alors :

$$L(t)\varphi(t) = U(t)U(0)^{-1}(U(0)VU(0)^{-1})U(0)U(t)^{-1}\varphi(t).$$

$$L(t)\varphi(t) = U(t)U(0)^{-1}L(0)\psi(t).$$

$$L(t)\varphi(t) = \lambda U(t)U(0)^{-1}\psi(t).$$

$$L(t)\varphi(t) = \lambda\varphi(t).$$

Donc λ est valeur propre de $L(t)$ pour tout t . Comme 0 ne joue pas de rôle particulier, on a alors que pour tous $t, t' \in \mathbb{R}$, toutes les valeurs propres de $L_u(t)$ sont valeurs propres de $L_u(t')$. Donc les valeurs propres de L_u sont constantes au cours du temps. \square

Lemme 4.9 : Toute famille d'opérateurs unitaires ne dépendant que du temps vérifie une équation de la forme :

$$\partial_t U = BU$$

où $\forall t \in \mathbb{R}, B(t)$ est antisymétrique. Réciproquement toute solution de $\partial_t U = BU$ forme une famille d'opérateurs telle que $((U^*U)(t))_{t \in \mathbb{R}}$ ne dépende pas du temps.

DÉMONSTRATION : On considère une famille $(U(t))_{t \in \mathbb{R}}$ d'opérateurs unitaires. Comme U est inversible, on peut poser pour tout t :

$$B(t) = (\partial_t U U^{-1})(t).$$

Alors :

$$\partial_t U^*(t) = (U^* B^*)(t).$$

Or on a :

$$\partial_t U^{-1} = -U^{-1} \partial_t U U^{-1} = -U^{-1} B.$$

Comme U est unitaire, on a finalement :

$$\partial_t (U^*)(t) = \partial_t (U^{-1})(t).$$

Et ainsi :

$$U^* B^* = -U^{-1} B.$$

Finalement :

$$B^*(t) = -B(t).$$

En particulier, B est antisymétrique. Réciproquement si $U(t)$ vérifie l'équation, on a :

$$\partial_t U^* U = U^* \partial_t U + \partial_t U^*.$$

Or $\partial_t (U^*) = U^* B^* = -U^* B$. Ainsi :

$$\partial_t (U^* U) = U^* B U - U^* B U = 0.$$

Donc $U^* U = M$, avec M constante au cours du temps. □

Théorème 4.10 : Si u vérifie l'équation $\partial_t u = K'(u)$ et si $L(t)$ vérifie une équation du type :

$$\partial_t L = [B, L]$$

avec B tel que $B^* = -B$, alors les valeurs propres de L sont des intégrales premières de l'équation $\partial_t u = K'(u)$.

DÉMONSTRATION : On suppose qu'on a B tel que $\partial_t L = [B, L]$ et $B^* = -B$. Soit alors $t \mapsto U(t)$ telle que $\partial_t U = BU$. Alors on sait que $U^* U = M$ avec M constante au cours du temps et inversible. Comme M est inversible et symétrique, quitte à multiplier U par l'inverse de la racine de M , on peut supposer que $M = Id$ et donc que U est unitaire. On pose $P(t) = U(t)^{-1} L(t) U(t)$. Montrons que $\partial_t P = 0$. On aura alors que les $(L(t))_{t \in \mathbb{R}}$ sont unitairement équivalents et d'après le théorème 4.8 on aura le résultat souhaité. Or :

$$\partial_t P = -U^{-1} \partial_t U U^{-1} L U + U^{-1} \partial_t L U + U^{-1} L \partial_t U.$$

$$\partial_t P = -U^{-1} (B L + \partial_t L + L B) U.$$

Donc par définition de L et de B ,

$$\partial_t P = 0.$$

□

Proposition 4.11 : Soit u solution de KdV. Soit $L = D^2 + \frac{1}{6}uI$ et $B = 24(D^3 + \frac{1}{8}uD + D\frac{1}{8}u)$. Alors $[B, L] = K(u)I$.

DÉMONSTRATION : Soient $b = \frac{1}{8}u$ et $U = uI$. Alors :

$$[B, L] = 24(D^3(\frac{1}{6}Ut) + \frac{1}{6}bDU + bD^3 + DbD^2 - Db\frac{1}{6}u - D^2bD - D^3b - \frac{1}{6}ubD - \frac{1}{6}uDb - \frac{1}{6}uD^3).$$

$$[B, L] = 24(\frac{1}{6}(\partial_x^3u + 3\partial_x^2uD + 3\partial_xuD^2 + uD^3) + \frac{1}{6}b(\partial_xu + uD) + bD^3 + \partial_xbD^2 + bD^3 + \frac{1}{6}(\partial_xb)u + \frac{1}{6}b\partial_xu - bD^3 - 2\partial_xbD^2 - \frac{1}{6}uD^3 - (\partial_x^2b)D - (\partial_x^3b + 3\partial_x^2bD + 3\partial_xbD^2 + bD^3) - \frac{1}{6}ubD - \frac{1}{6}ubD - \frac{1}{6}u\partial_xb).$$

$$[B, L] = 24\left(\frac{1}{6}\partial_x^3u + \frac{1}{2}\partial_x^2uD + \frac{1}{2}\partial_xuD^2 + \frac{1}{3}b\partial_xu - 4\partial_xbD^2 - 4\partial_x^2bD - \partial_x^3b\right).$$

Soit, d'après la définition de b :

$$[B, L] = (\partial_x^3u + u\partial_xu)I.$$

□

Ainsi, comme $D^* = -D$, on a également $B^* = -B$ et d'après le théorème 4.10, les valeurs propres de L l'opérateur de Schrödinger sont des intégrales premières de KdV.

Remarque 4.12 : Si on généralise ce processus en posant $B_q = D^{2q+1} + \sum_{j=1}^q (b_j D^{2j-1} + D^{2j-1} b_j)$, qui est bien antisymétrique avec les b_j choisis de telle sorte que $[B_q, L]$ n'ait que des termes d'ordre 0 en D (ce qui est possible car $[B_q, L]$ est symétrique), alors l'équation $\partial_t u = [B_q, L] = K_q(u)$ a aussi pour intégrales les valeurs propres de l'opérateur de Schrödinger.

On peut généraliser ce qui a été fait pour l'équation de KdV de la manière suivante :

Théorème 4.13 : Soit L un opérateur auto-adjoint tel que $L_u = L_0 + M_u$ où L_0 est indépendant du temps et M_u dépend linéairement de u . Supposons qu'il existe B antisymétrique tel que $[B, L_u] = M_{K'(u)}$. Alors les valeurs propres de L_u sont des intégrales de l'équation $\partial_t u = K'(u)$.

DÉMONSTRATION : Soit u telle que $\partial_t u = K'(u)$ et $L = L_0 + M_u$ où L_u dépend linéairement de u et L_0 est indépendant du temps. Alors $\partial_t L_u = \partial_t M_u = M_{\partial_t u} = M_{K'(u)}$. Ainsi, si il existe B antisymétrique tel que $[B, L_u] = M_{K'(u)}$ alors $[B, L_u] = \partial_t L_u$. On est donc dans les hypothèses du théorème 4.10 et les valeurs propres de L sont bien des intégrales de l'équation considérée. □

Ces opérateurs B et L forment ce qu'on appelle une paire de Lax pour la fonction u .

Remarque 4.14 : Dans le cas de KdV on a bien que L s'écrit $L_u = L_0 + M_u$ avec $L_0 = D^2$ et $M_u = \frac{1}{6}u$. Le théorème 4.5 est donc un cas particulier du théorème ci-dessus.

Ainsi, dans le cas où un fluide vérifie l'équation de KdV, on peut trouver des constantes du mouvement.

5 Ondes solitaires et comportement asymptotique

Dans ce paragraphe, nous étudierons en particulier les solutions de KdV qui se comportent comme une vague solitaire allant à la vitesse c .

5.1 Ondes solitaires

Proposition 5.1 : Pour tout $c > 0$, l'équation de KdV a un unique soliton se propageant à la vitesse c et disparaissant quand $x \rightarrow \pm\infty$.

DÉMONSTRATION : Montrons que KdV possède des solutions de la forme $u(x, t) = s(x - ct)$, c étant la vitesse de la vague. Si u est une telle solution, alors on a :

$$-c\partial_x s + s\partial_x s + \partial_x^3 s = 0.$$

En intégrant par rapport à x et en tenant compte du fait que $\forall k \in \mathbb{N}, \lim_{x \rightarrow \infty} \partial_x^k s = 0$, on a :

$$-cs + \frac{1}{2}s^2 + \partial_x^2 s = 0.$$

En multipliant par $2\partial_x s$ et en intégrant à nouveau on obtient :

$$-cs^2 + \frac{1}{3}s^3 + \partial_x s^2 = 0.$$

On suppose que $\partial_x s(0) = 0$. Soit $s : x \mapsto 3c \operatorname{sech}^2(\frac{1}{2}x\sqrt{c})$ où $\operatorname{sech} = \frac{1}{\operatorname{ch}}$. Montrons que s est solution de KdV :

$$(\partial_x s)^2 = 9c^2 \left(-2\frac{1}{2}\sqrt{c} \operatorname{sh} \left(\frac{1}{2}x\sqrt{c} \right) \operatorname{sech}^3 \left(\frac{1}{2}x\sqrt{c} \right) \right)^2.$$

$$(\partial_x s)^2 = 9c^3 \left(\operatorname{sh} \left(\frac{1}{2}x\sqrt{c} \right) \operatorname{sech}^3 \left(\frac{1}{2}x\sqrt{c} \right) \right)^2.$$

$$-cs^2 + \frac{1}{3}s^3 = -9c^3 \operatorname{sech}^4 \left(\frac{1}{2}x\sqrt{c} \right) + \frac{1}{3}27c^3 \operatorname{sech}^6 \left(\frac{1}{2}x\sqrt{c} \right).$$

$$-cs^2 + \frac{1}{3}s^3 = -9c^3 \operatorname{sech}^4 \left(\frac{1}{2}x\sqrt{c} \right) \left[1 - \operatorname{sech}^2 \left(\frac{1}{2}x\sqrt{c} \right) \right].$$

$$-cs^2 + \frac{1}{3}s^3 = -9c^3 \operatorname{sech}^4\left(\frac{1}{2}x\sqrt{c}\right) \operatorname{th}^2\left(\frac{1}{2}x\sqrt{c}\right).$$

$$-cs^2 + \frac{1}{3}s^3 = -9c^3 \operatorname{sech}^6\left(\frac{1}{2}x\sqrt{c}\right) \operatorname{sh}^2\left(\frac{1}{2}x\sqrt{c}\right).$$

Donc on a bien que $-cs^2 + \frac{1}{3}s^3 + \partial_x s^2 = 0$, et s est solution de KdV. \square

Définition 5.2 : Soit u solution de KdV. On pose $u_\varepsilon(x, 0) = u(x, 0) + \varepsilon f(x)$ où f est une fonction quelconque. Ainsi, on peut définir une famille de solutions u_ε dont la valeur initiale dépend de ε .

Définition 5.3 : On suppose que K est différentiable. On pose alors :

$$\frac{\partial K(u + \varepsilon v)}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} = V(u)v.$$

V est appelé variation de K .

Définition 5.4 : On appelle équation variationnelle l'équation

$$\partial_t v = V(u)v$$

avec $v = \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0}$, obtenue en différentiant $\partial_t u = K(u)$ par rapport à ε .

Lemme 5.5 : Soient u une solution de l'équation $\partial_t u = K(u)$, v solution de l'équation $\partial_t v = V(u)v$. Alors si I est une intégrale de $\partial_t u = K(u)$ et G son gradient, on a que :

$$\langle G(u), v \rangle$$

est indépendant du temps, où \langle, \rangle désigne un produit scalaire sur \mathcal{H} .

DÉMONSTRATION : Soit $I(u)$ une intégrale de l'équation en question qu'on suppose différentiable au sens de Fréchet, c'est-à-dire que

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} I(u + \varepsilon v)$$

existe et est linéaire en v . D'après le théorème de Riesz-Fréchet, on peut alors écrire

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} I(u + \varepsilon v) = \langle G(u), v \rangle$$

avec un produit scalaire adapté. Alors si u_ε est une famille correspondant à la définition 5.2 on a que $I(u_\varepsilon(t))$ est indépendant du temps. On différencie par rapport à ε :

$$0 = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \frac{\partial}{\partial t} I(u_\varepsilon).$$

Donc par linéarité de $\frac{\partial}{\partial \varepsilon} I(u + \varepsilon v)$:

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} I(u_\varepsilon).$$

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} (u + \varepsilon \frac{u_\varepsilon - u}{\varepsilon}). \\
0 &= \frac{\partial}{\partial t} \langle G(u), \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \varepsilon} |_{\varepsilon=0} \rangle. \\
0 &= \frac{\partial}{\partial t} \langle G(u), v \rangle.
\end{aligned}$$

□

Lemme 5.6 : *Soit s une onde solitaire solution de $\partial_t u = K'(u)$ où $K'(u)$ est différentiable et où l'équation est invariante par translation. Soit $I(u)$ une intégrale première de l'équation. Alors si G le gradient de $I(u)$ s'annule quand $x \rightarrow \pm\infty$ et V la variation de K on a :*

$$(-cD + V^*(s))G(s) = 0.$$

DÉMONSTRATION : On prend v solution de l'équation variationnelle et on pose

$$w(x, t) = v(x + ct, t).$$

Alors d'après le lemme 5.5

$$\langle G(s(x - ct)), v(x, t) \rangle$$

ne dépend pas du temps. Par invariance par translation, $\langle G(s(x)), w(x, t) \rangle$ ne dépend pas non plus du temps. En différentiant par rapport à t on obtient :

$$\langle G(s), \partial_t w \rangle = 0.$$

Or d'après la définition de w on a :

$$\partial_t w = c\partial_x v + \partial_t v.$$

Comme $\partial_t u = K(u)$ est invariante par translation, si T est un opérateur de translation, il commute avec K et on a :

$$T\partial_t v = TVv = VTv = Vw.$$

D'où

$$\partial_t w = (cD + V(s))w.$$

Ainsi :

$$\langle G(s), (cD + V(s))w \rangle = 0.$$

Or par hypothèse, l'équation est invariante par translation. Donc :

$$\partial_x \langle G(s), cw \rangle = 0 = \langle \partial_x G(s), cw \rangle + \langle G(s), \partial_x w \rangle.$$

$$\langle -\partial_x G(s), cw \rangle = \langle G(s), \partial_x w \rangle.$$

Donc on a $-D = D^*$, et :

$$\langle (cD^* + V^*)G(s), w \rangle = 0.$$

$$\langle (-cD + V^*)G(s), w \rangle = 0.$$

On peut choisir n'importe quelle valeur pour $w(., t)$ d'après la proposition 2.2. Ainsi :

$$(-cD + V^*(s))G(s) = 0.$$

□

Lemme 5.7 : *Si s est une onde solitaire solution de $\partial_t u = K(u)$ et si cette équation préserve l'énergie, i.e si $\langle u(t), u(t) \rangle$ est constant au cours du temps alors*

$$(cD - V^*(s))s = 0.$$

DÉMONSTRATION : Comme on a supposé que l'énergie était conservée au cours du temps on a :

$$0 = 2 \langle u, \partial_t u \rangle = 2 \langle u, K(u) \rangle .$$

En différentiant par rapport à ε on trouve :

$$\langle v, K(u) \rangle + \langle u, V(u)v \rangle = 0.$$

$$\langle v, K(u) + V^*(u)u \rangle = 0.$$

v étant arbitraire on a à nouveau :

$$K(u) + V^*(u)u = 0.$$

Or s est une onde solitaire donc :

$$0 = c\partial_x s + K(s).$$

En utilisant le résultat précédent on a que :

$$(cD - V^*(s))s = 0.$$

□

Théorème 5.8 : *On suppose que l'équation $\partial_t u = K'(u)$ a les propriétés suivantes :*

1. $K(u)$ est différentiable. On notera sa variation $V(u)$.
2. L'équation $\partial_t u = K'(u)$ est invariante par translation et préserve l'énergie, i.e si u est solution de l'équation, $\langle u, u \rangle$ ne dépend pas du temps pour un certain produit scalaire.
3. L'équation $\partial_t u = K'(u)$ a une solution en onde solitaire s .

4. Toutes les fonctions appartenant au noyau de $(cD - V^*)(s)$ et s'annulant en $\pm\infty$ sont multiples de s , où s est une onde solitaire solution de KdV voyageant à vitesse c .

Soit de plus $I(u)$ une intégrale de l'équation telle que :

5. $I(u)$ est différentiable.

6. Si G est le gradient de I pour le même produit scalaire que l'énergie, G s'annule en $\pm\infty$,

Alors :

$$G(s) = ks$$

où k dépend de I et de c .

DÉMONSTRATION : Les conditions 1, 2, 3 et 5 nous permettent d'utiliser le lemme 5.6. On a donc que :

$$(cD + V^*(s))G(s) = 0.$$

Les conditions 4 et 6 montrent alors que :

$$G(s) = ks.$$

k dépend de s et de I et comme s ne dépend que de c on a ce qu'on voulait. Le lemme 5.7 assure que s se trouve également dans le noyau de $cD - V^*$. \square

Il existe donc des solitons solutions de KdV et au premier ordre ceux-ci ne se déforment pas. Cependant, le mascaret étant formé de plusieurs vagues, il reste à voir comment celles-ci sont créées et évoluent.

Initialement, on est dans la situation représentée sur la figure 2. Or on peut prolonger et translater cette fonction de manière à ce qu'elle soit paire et 2π -périodique.

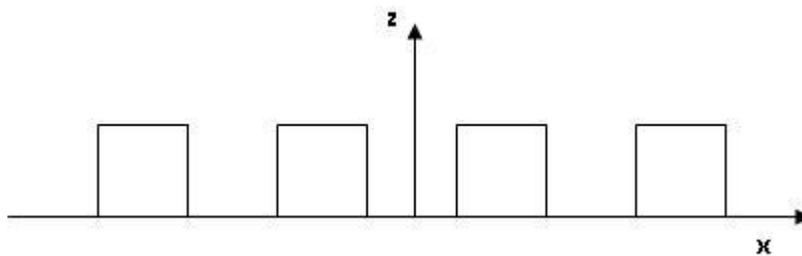


FIGURE 10

On peut alors décomposer cette fonction en somme de cosinus ayant chacun une amplitude différente d'après la théorie de Fourier. Si les ondes solitaires formées par chaque sinus n'interagissent pas, comme la vitesse d'une onde dépend de son amplitude, la discontinuité initiale va se déformer pour former une série de solitons se déplaçant d'autant plus vite qu'ils sont hauts.

Or, on peut montrer que pour une condition initiale $u(x, t = -\infty)$ formée de deux vagues $s_1(x)$ et $s_2(x)$ assez éloignées pour que leurs queues ne se chevauchent pas et telle que si $c_1 > c_2$, la vague 1 soit plus loin que la vague 2. Alors les deux vagues vont se rapprocher l'une de l'autre, interagir, puis se séparer et finalement elles auront juste échangé leurs places (à une phase près).

Ceci peut être résumé dans le théorème suivant (dont on explicitera seulement les grandes étapes de la démonstration) :

Théorème 5.9 : *Pour tout couple de vitesses c_1 et c_2 il existe une onde double, c'est-à-dire une solution d de KdV telle qu'il existe $\theta_1^+, \theta_1^-, \theta_2^+, \theta_2^-$ tels que :*

$$d(x, t) - s_1(x - c_1 t - \theta_1^\pm) - s_2(x - c_2 t - \theta_2^\pm)$$

tend uniformément vers 0 quand $x \rightarrow \pm\infty$.

DÉMONSTRATION :

1. On commence par prendre une solution en onde double s'écrivant :

$$d(x, t) = s_1(x - c_1 t - \theta_1, c_1) + s_2(x - c_2 t - \theta_2, c_2) + \text{erreur}(t)$$

On peut alors montrer en utilisant des arguments physiques que l'erreur est en $O(e^{-t})$ quand $t \rightarrow -\infty$.

2. On trouve trois intégrales du mouvement I_1, I_2, I_3 . Comme on sait que si s est une onde solitaire et G le gradient d'une intégrale du mouvement on a $G(s) = k(I, s)s$, on peut alors trouver une combinaison linéaire de I_1, I_2, I_3 tel que son gradient (noté G) annule s_1 et s_2 .
3. Comme $G(s_1) = G(s_2) = 0$, on a aussi $G(d) = 0$ et donc pour tout v solution de l'équation variationnelle, en moins l'infini :

$$\langle G(d), v \rangle = 0.$$

Comme $\langle G(d(t)), v(t) \rangle$ ne dépend pas du temps et que l'on peut prendre n'importe quelle valeur pour $v(t)$, on a que $\forall t, G(d(t)) = 0$.

4. Si on explicite ces calculs, on obtient une série d'équations différentielles non linéaires qui nous permettent d'étudier le comportement des maximums locaux de $d(x, t)$. On montre ainsi que : $\forall t \in \mathbb{R}, d(x, t)$ a exactement 2 maximums dans le cas où $\frac{c_1}{c_2} < \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.
5. On pose $y(t) = \text{maximum global de } d \text{ à l'instant } t$. On a grâce aux équations vérifiées par s_1, s_2 et d que les conditions de Cauchy de d en $x = y(t)$ tendent vers celles de s_1 quand $t \rightarrow \infty$ et de même elle tendent vers celles de s_2 quand $t \rightarrow -\infty$. Donc par dépendance continue des solutions en fonction de leurs données de Cauchy, on a que :

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} d(x - y(t), t) = s_{1,2}(x).$$

6. On a alors que $d(x, t)$ tend vers la superposition de deux vagues solitaires voyageant à des vitesses différentes.

7. Dans le cas où $\frac{c_1}{c_2} > \frac{3+\sqrt{5}}{2}$, on montre d'abord que le maximum global reste dans un certain intervalle $[n_2, n_1]$ puis on peut procéder comme précédemment.

□

5.2 Valeurs propres de l'opérateur de Schrödinger et vitesse des solitons

Conjecture 5.10 : Soit u une solution de KdV définie sur \mathbb{R}^2 , et qui s'annule en $x = \pm\infty$. Alors il existe N nombres c_1, c_2, \dots, c_N , appelés vitesses propres de u , et $2N$ nombres $\theta_j^\pm, j \in \{1..N\}$ tels que :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u(x + ct, t) = \begin{cases} s(x - \theta_j^\pm, c_j) & \text{si } c = c_j. \\ 0 & \text{si } c \neq c_j. \end{cases}$$

On va désormais montrer le théorème suivant :

Théorème 5.11 : Si $\lambda_1(u), \dots, \lambda_N(u)$ sont les valeurs propres de l'opérateur de Schrödinger associé à u , solution de KdV et si c_1, \dots, c_N sont les vitesses propres associées à u , alors on a la relation : $c_j = 4\lambda_j$.

Proposition 5.12 : L'équation de KdV vérifie les propriétés nécessaires à l'application du théorème 5.8. Ses ondes solitaires sont donc valeurs propres du gradient de ses intégrales différentiables si ce gradient s'annule quand $x \rightarrow \pm\infty$.

DÉMONSTRATION 1. $K(u) = u\partial_x u + \partial_x^3 u$ et comme on étudie les solutions \mathcal{C}^∞ , $K(u)$ est bien différentiable.

2. K ne dépendant pas de la position, l'équation $\partial_t = K(u)$ est invariante par translation. De plus si $E(t) = \frac{1}{2} \int u^2(x, t) dx$, on a :

$$\frac{dE}{dt}(t) = \int_{\mathbb{R}} u(x, t) \partial_t u(x, t) dx.$$

$$\frac{dE}{dt}(t) = \int_{\mathbb{R}} u(x, t) (u(x, t) \partial_x u(x, t) + \partial_x^3 u(x, t)) dx.$$

$$\frac{dE}{dt}(t) = \int_{\mathbb{R}} u^2(x, t) \partial_x u(x, t) + u(x, t) \partial_x^3 u(x, t).$$

$$\frac{dE}{dt}(t) = \int_{\mathbb{R}} \left(\partial_x \left(\frac{u^3}{3} \right) (x, t) + \partial_x (u \partial_x^2 u) (x, t) - \partial_x u(x, t) \partial_x^2 u(x, t) \right) dx.$$

$$\frac{dE}{dt}(t) = \int_{\mathbb{R}} \partial_x \left(\frac{u^3}{3} + u \partial_x^2 u - (\partial_x u)^2 \right) (x, t) dx.$$

Et comme u et toutes ses dérivées tendent vers 0 en $\pm\infty$, on a bien que $E(t)$ est indépendant du temps.

3. On a déjà montré en proposition 5.1 que KdV a des solutions en ondes solitaires.

4.

$$K(u + \varepsilon v) = -((u + \varepsilon v)\partial_x(u + \varepsilon v) + \partial_x^3(u + \varepsilon v)).$$

D'où

$$-\frac{\partial(u + \varepsilon v)}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} = v\partial_x u + u\partial_x v + \partial_x^3 v.$$

Ainsi

$$V(u) = -Du - D^3.$$

$$V^*(u) = uD + D^3$$

car $D^* = -D$. Or, on peut montrer que toute les fonctions qui sont dans le noyau de

$$(c - s)D - D^3$$

et s'annulant à l'infini sont multiples de s .

□

DÉMONSTRATION Preuve du théorème 5.11 On applique le théorème 5.8 aux $\lambda(u)$, les valeurs propres de l'opérateur $L = D + \frac{1}{6}u$ et qui sont bien des intégrales premières du mouvement. On a alors : $Lw = \lambda(u)w$ pour un certain w . On note $u_\varepsilon = u + \varepsilon v$. Alors $L(u_\varepsilon)w = \lambda(u_\varepsilon)w$. On différencie par rapport à ε et on obtient :

$$L\partial_\varepsilon w + \frac{1}{6}vw = \lambda\partial_\varepsilon w + \partial_\varepsilon \lambda w.$$

On a alors :

$$\langle L\partial_\varepsilon w, w \rangle + \langle \frac{1}{6}vw, w \rangle = \langle \lambda\partial_\varepsilon w, w \rangle + \langle \partial_\varepsilon \lambda w, w \rangle.$$

Or L est symétrique et donc :

$$\langle L\partial_\varepsilon w, w \rangle = \langle \partial_\varepsilon w, Lw \rangle = \langle \partial_\varepsilon w, \lambda w \rangle.$$

$$\langle L\partial_\varepsilon w, w \rangle = \langle \partial_\varepsilon \lambda w, w \rangle.$$

D'où :

$$\frac{1}{6} \langle vw, w \rangle = \partial_\varepsilon \lambda \langle w, w \rangle.$$

On peut supposer $\langle w, w \rangle = 1$ et on a alors :

$$\partial_\varepsilon \lambda = \langle \frac{1}{6}vw, w \rangle = \langle \frac{1}{6}w^2 \rangle.$$

où \langle, \rangle désigne le produit scalaire canonique sur L^2 . Or on sait que

$$\partial_\varepsilon \lambda = \langle G(u), v \rangle,$$

et ainsi $G(u) = \frac{1}{6}w^2$. Comme par hypothèse, les fonctions propres s'annulent à l'infini, on peut utiliser le théorème 5.8, et $G(s) = ks$. D'où si w est une fonction propre de L , $w = k's^{1/2}$, où k' est constant au cours du temps. On peut supposer que cette constante vaut un (cela revient à prendre un w particulier), et on a alors :

$$\begin{aligned}\partial_x w &= \frac{1}{2}\partial_x s s^{-1/2}. \\ \partial_x^2 w &= \frac{1}{2}\partial_x^2 s s^{-1/2} - \frac{1}{4}(\partial_x s)^2 s^{-3/2}.\end{aligned}$$

Or, pour les ondes solitaires, on a :

$$-cs + \frac{1}{2}s^2 + \partial_x^2 s = 0$$

et

$$-cs^2 + \frac{1}{3}s^3 + (\partial_x s)^2 = 0.$$

D'où

$$\partial_x^2 w = \frac{1}{2}\left(cs - \frac{1}{2}s^2\right)s^{-1/2} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}s^3 - cs^2\right)s^{-3/2}.$$

Or $Lw = \partial_x^2 w + \frac{1}{6}sw$, donc :

$$\begin{aligned}Lw &= \frac{1}{2}cs^{1/2} - \frac{1}{4}s^{3/2} + \frac{1}{12}s^{3/2} - \frac{c}{4}s^{1/2} + \frac{1}{6}s^{3/2}. \\ Lw &= \frac{1}{4}cs^{1/2}.\end{aligned}$$

Donc comme $Lw = \lambda w = \lambda s^{1/2}$, on obtient :

$$c(s) = 4\lambda(s).$$

□

5.3 Équation de KdV et équation de Burgers

Définition 5.13 : L'équation de Burgers est définie sur l'espace de Schwartz \mathcal{S} par :

$$\forall t \in [0, T], \forall x \in \mathbb{R}, \partial_t u + u\partial_x u = 0.$$

où $T > 0$. C'est l'équation de KdV sans le terme visqueux.

Proposition 5.14 : Cette équation n'admet pas de solitons non constants.

DÉMONSTRATION : Supposons que u soit solution de cette équation et telle que $u(x, t) = f(x - ct)$. Alors :

$$\begin{aligned}\partial_t u + u\partial_x u &= -c\partial_x f + f\partial_x f. \\ 0 &= (-c + f)\partial_x f.\end{aligned}$$

Donc f est constante sur tout \mathbb{R} .

□

Définition 5.15 : Soit $\varepsilon > 0$. On appelle KdV_ε l'équation suivante :

$$\forall t \in [0, T], \forall x \in \mathbb{R}, \partial_t u + u \partial_x u + \varepsilon \partial_x^3 u = 0.$$

Proposition 5.16 : KdV_ε admet des solutions en ondes solitaires. De plus, si u est solution de KdV , $(x, t) \mapsto \varepsilon^{1/3} u(\varepsilon^{-1/3} x, t)$ vérifie KdV_ε .

DÉMONSTRATION : Soit u une solution de KdV et $w : (x, t) \mapsto \varepsilon^{1/3} u(\varepsilon^{-1/3} x, t)$. Alors on a :

$$\partial_t w + w \partial_x w + \varepsilon \partial_x^3 w = \varepsilon^{1/3} u + \varepsilon^{1/3} u \partial_x u + \varepsilon \varepsilon^{-2/3} \partial_x^3 u.$$

$$\partial_t w + w \partial_x w + \varepsilon \partial_x^3 w = \varepsilon^{1/3} (u + u \partial_x u + \partial_x^3 u) = 0.$$

Donc w est bien solution de KdV_ε , et si $x \mapsto s(x)$ est un soliton de l'équation de KdV , $x \mapsto \varepsilon^{1/3} s(\varepsilon^{-1/3} x)$ est un soliton de KdV_ε . \square

Comme l'équation de Burgers et la limite quand ε tend vers 0 de l'équation de KdV , on peut se demander pourquoi celle-ci n'admet pas de solution en onde solitaire.

Théorème 5.17 : Soit $c > 0$. On appelle $x \mapsto s_{c,\varepsilon}(x)$ l'onde solitaire solution de KdV_ε se propageant à la vitesse c . Alors on a que les $s_{c,\varepsilon}$ tendent uniformément vers 0 sur tous les intervalles de la forme $I =]-\infty, -\alpha] \times [\alpha, +\infty[$, où $\alpha > 0$.

DÉMONSTRATION : Soit $s_{c,\varepsilon}$ comme dans l'énoncé du théorème. Alors $s_{c,\varepsilon}$ est positive, paire et :

$$\partial_x s_{c,\varepsilon} = -3c\sqrt{c} \operatorname{sh}\left(\frac{x\sqrt{c}}{2\varepsilon^{1/3}}\right).$$

Donc s est strictement croissante pour $x < 0$, strictement décroissante pour $x > 0$ et admet un maximum global en 0, qui vaut $3c\varepsilon^{1/3}$. On a donc :

$$\sup_{x \in I} |s_{c,\varepsilon}| = s_{c,\varepsilon}(\alpha) = 3c\varepsilon^{1/3} \frac{1}{\operatorname{ch}^2\left(\frac{x\sqrt{c}}{2\varepsilon^{1/3}}\right)}.$$

Or

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (s_{c,\varepsilon}(\alpha)) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 3c\varepsilon^{1/3} \frac{1}{\operatorname{ch}^2\left(\frac{x\sqrt{c}}{2\varepsilon^{1/3}}\right)} = 0.$$

Donc on a le résultat voulu. \square

Ainsi, l'équation de Burgers ne peut avoir des solutions en onde solitaires non nulles.

6 Etude expérimentale du mascaret de la Garonne

6.1 Présentation

Le laboratoire EPOC de Bordeaux, où s'est déroulée une partie de mon stage, étudie l'évolution des milieux aquatiques en associant recherche scientifique multidisciplinaire et observation des milieux marin et estuarien. C'est dans ce cadre qu'a été mis en place un programme de recherche sur le mascaret afin de mieux comprendre son évolution et son impact sur la rivière (transport de sédiments, affouillement des rives...). Les mesures ont plusieurs objectifs : la validation d'un système de modélisation à partir des équations de Green-Naghdi qui pourrait à terme être utilisé dans la simulation de la propagation d'un tsunami, la détermination des conditions d'existence du mascaret et l'impact du passage de la vague sur les sédiments de la rivière ainsi que l'étude des vagues secondaires, les éteules, et des turbulences causées par le passage du mascaret, pour évaluer l'éventuel impact biologique et écologique de ce phénomène. Ces mesures pourront être utilisées afin de prévoir l'impact qu'à l'homme sur le mascaret lorsqu'il modifie la rivière : en effet plusieurs mascarets, dont celui de la Seine, ont disparu à la suite de travaux humains. L'écosystème étant modifié par les changements du mascaret, il est important de mesurer l'impact que l'homme a sur celui-ci. Ce paragraphe a donc pour but d'expliquer les mesures expérimentales qui ont été faites sur la Garonne, près de Podensac, en Aquitaine. Ces mesures sont les plus importantes jamais réalisées dans le cadre de l'étude du mascaret. En effet, ce phénomène est assez peu étudié, en grande partie parce qu'il condense de nombreux problèmes encore ouverts (propagation de la marée, déferlement des vagues...).



FIGURE 11 : Lieu des mesures expérimentales.

Ce site a été choisi pour diverses raisons, soit d'ordre pratique (proximité du laboratoire, faible présence de surfeurs...), soit relatives à la topographie du

site (portion de rivière droite, ce qui évite les perturbations liées aux virages, profondeur relativement faible...). Les mesures ont été faites en septembre car c'est le mois où l'on peut observer les plus beaux mascarets.

6.2 Présentation du matériel de mesure

Les mesures qui seront présentées dans la suite de l'exposé ont été faites en mars 2010 dans le cadre d'une campagne de pré-mesure qui préparait celle de septembre 2010. Les mêmes appareils ont été utilisés pour les deux séries de mesures. Trois types d'instruments ont été mouillés pendant cette campagne :

ADCP (Acoustic Doppler Current Profiler) : c'est un appareil de mesure de la famille des sonars qui permet de mesurer la vitesse d'un écoulement pour une gamme de profondeurs donnée. Il envoie 4 faisceaux d'ultrasons à une fréquence pré-programmée. L'un mesurera la vitesse de l'écoulement en hauteur, le deuxième selon l'Ouest, le troisième selon le Nord et le dernier permet de contrôler l'erreur par une double mesure selon une direction. Ces faisceaux sont alors diffusés dans toutes les directions par les matières en suspension dans l'eau, et qui suivent le courant. Une partie de ces faisceaux revient donc vers les capteurs et l'appareil en déduit la vitesse des particules par effet Doppler. Comme certaines particules peuvent avoir une vitesse relative par rapport à l'eau, il moyenne ensuite les différentes vitesses trouvées dans une "cellule" de taille pré-programmée. L'ADCP répète cette opération à différentes profondeurs afin d'obtenir un profil complet de la vitesse de l'écoulement. Ces mesures permettent alors d'avoir un aperçu global de l'évolution des courants dans la rivière. L'ADCP contient également un capteur de pression. Dans le cas de la campagne de septembre, deux ADCP ont été mouillés, les deux étaient réglés sur une fréquence d'acquisition de 2Hz, mais l'un avait une résolution (taille des cellules) de 5cm alors que l'autre en avait une de 20 cm. Le premier enregistrera donc des mesures plus fines que le second, mais la mémoire embarquée étant limitée, ces mesures s'étaleront sur un temps plus court. Ainsi, ces deux appareils mesureront des données complémentaires.



FIGURE 12 : ADCP prêt à être mouillé.

ADV (Acoustic Doppler Velocimetry) : Son fonctionnement est similaire à celui d'un ADCP. Cependant sa résolution et donc sont utilisation sont différentes. En effet, l'ADV prend des mesures de vitesse quasiment ponctuelles (cube de 6mm d'arrête), et il est donc utilisé pour mesurer les turbulences. Comme la puissance du signal réfléchi vers l'ADV est proportionnelle au nombre de particules en suspension dans l'eau, cet appareil permet également de connaître la turbidité de l'eau. Pour les mesures, l'ADV a été réglé à 32Hz afin d'avoir une mesure fine de la vitesse (mesure des turbulences liées au passage des éteules).



FIGURE 13 : ADV prêt à être mouillé.

Capteurs de pression : Pour avoir une idée générale de la formation et de l'évolution du mascaret, il est important de connaître son profil. Cependant, la profondeur en fonction de la position et du temps n'est pas une donnée facilement accessible. Pour avoir quand même accès à celle-ci, on a fait l'hypothèse hydrostatique. On a alors que :

$$h = \frac{P(z = h_0) - P_{atm}}{\rho g} + h_0,$$

où h est la hauteur d'eau et h_0 la hauteur du capteur. On peut donc déterminer la hauteur d'eau grâce à la pression mesurée par le capteur. Deux capteurs (P1 et P2) ont été immergés près des berges.

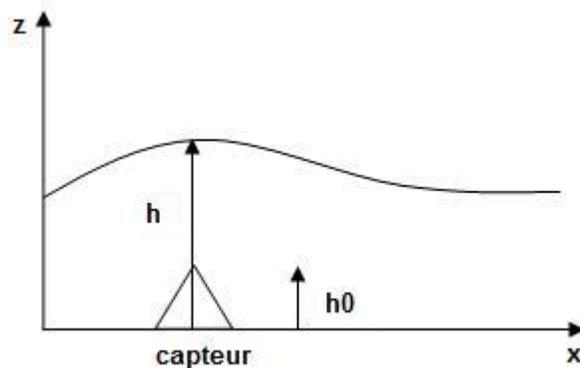


FIGURE 14 : fonctionnement du capteur.

Remarque 6.1 : *Il est important de mesurer la pression atmosphérique chaque jour : entre la tempête Xynthia et l'anticyclone qui a suivi, on a mesuré une différence de pression atmosphérique de 50 millibars, soit une différence de hauteur d'eau théorique de 50 cm, qui a en effet été mesurée.*

Remarque 6.2 : *Malgré le fait que les éteules ne correspondent pas à un comportement hydrostatique, cette hypothèse sera faite dans une première approximation, bien qu'elle puisse entraîner jusqu'à 10 % d'erreur.*

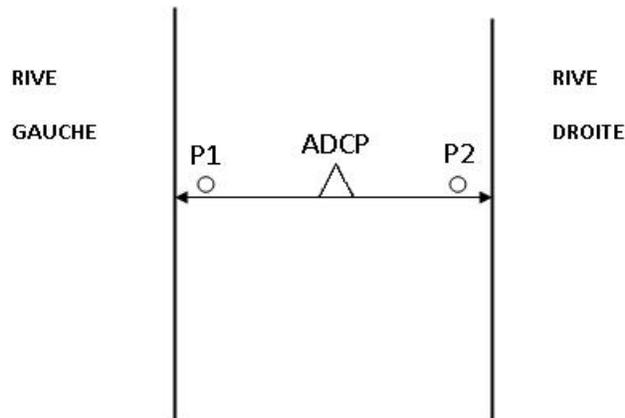


FIGURE 15 : Schéma de la zone expérimentale.

6.3 Conditions générales d'existence du mascaret

Il existe seulement une centaine de mascarets dans le monde, alors que le nombre d'estuaires est significativement plus important. De plus, ces mascarets sont de taille variable selon le lieu et la saison. On peut donc se demander quels sont les paramètres qui influent sur l'existence et la taille de cette vague.

Conditions générales d'apparition du mascaret : Expérimentalement, on remarque que les paramètres suivants semblent déterminants dans le processus de formation du mascaret :

- la profondeur du fleuve (qui doit être relativement faible)
- le marnage à l'embouchure du fleuve (qui doit être important)
- le débit des eaux (qui doit être assez faible)
- les coefficients de marée (qui doivent être forts).

Ces conditions sont réunies sur la Garonne aux alentours du mois de septembre, car les marées sont fortes (marées d'équinoxe) et le fleuve est bas au sortir de l'été.

Les relevés de l'ADCP et des capteurs de pression ont permis d'avoir les mesures de hauteur d'eau suivantes :

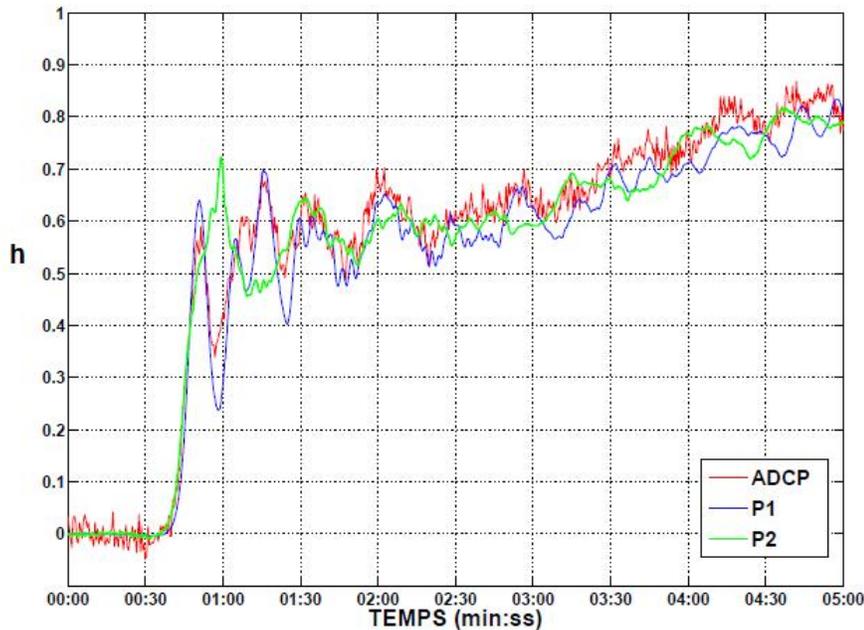


FIGURE 16 : Relevé de l'ADCP et des capteurs de pression.

Sur ces relevés, on voit très nettement le ressaut qui arrive environ 40s après le début de la mesure. La hauteur d'eau s'élève alors brutalement d'une cinquantaine de centimètres, soit environ un quart du marnage total. Le deuxième aspect important de ces mesures est la cohérence du front : les trois capteurs, placés sur le même transect, mesurent les vagues presque au même moment et le front a sensiblement la même hauteur que ce soit au milieu du fleuve (mesures de l'ADCP) que près des rives (P1 et P2). Cependant, les éteules semblent de plus faible amplitude au milieu du fleuve, ce qui indiquerait une plus forte atténuation des ondes secondaires en milieu plus profond. Quant au léger décalage temporel qui apparaît dans les mesures prises par P2, il est probable qu'il soit dû à un phénomène de réflexion de la vague sur la berge.

6.4 Influence du marnage sur le mascaret

Un des éléments prédominants dans le processus de formation du mascaret semble être le marnage ainsi que le rapport entre marnage et hauteur d'eau. Les données expérimentales des mesures de mars 2010 semblent confirmer cette hypothèse. Les figures suivantes montrent en effet les relevés de marnage (pris par le capteur de pression) et un tableau récapitulatif des fois où le mascaret a pu être observé sur la Garonne.

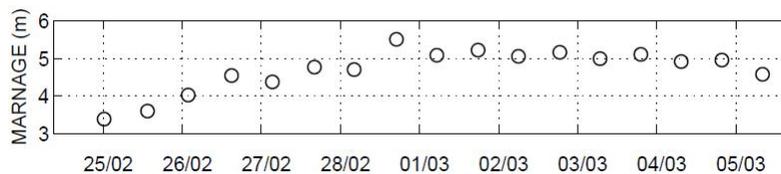


FIGURE 17a : Evolution temporelle du marnage.

NUMERO MAREE	DATE	COEFFICIENT	AMPLITUDE (cm)	FROUDE
0	24/02	38	-	-
1	25/02	42	-	-
2	25/02	57	-	-
3	26/02	66	-	-
4	26/02	76	-	-
5	27/02	86	14	1.01
6	27/02	94	22	1.017
7	28/02	102	28.5	1.026
8	28/02	108	41	1.038
9	01/03	113	42	1.047
10	01/03	115	43.5	1.047
11	02/03	116	43	1.044
12	02/03	115	40.5	1.043
13	03/03	113	41	1.042
14	03/03	108	44	1.047
15	04/03	102	43.5	1.047
16	04/03	95	42	1.052
17	05/03	87	30	1.031

FIGURE 17b : Coefficients de marée et observation du mascaret.

On observe donc que les forts marnages (correspondants aux forts coefficients de marée) ont lieu les mêmes jours que les mascarets importants. Ainsi, c'est au alentours du 1er mars que les coefficients de marée ont été les plus forts (115), et que les mascarets les plus importants ont pu être observés (amplitude de plus de 40 cm).

Ces résultats semblent bien en accord avec la théorie : plus le marnage est important comparé à la profondeur du fleuve, plus le ressaut hydraulique formé est important. Il se propagera donc mieux et sera plus visible (vague d'une amplitude supérieure).

6.5 Influence du nombre de Froude

On sait déjà (partie II) que le nombre de Froude est relié aux hauteurs d'eau avant et après ressaut. Il doit donc y avoir un lien entre la forme du ressaut et le nombre de Froude. En effet, si on regarde l'évolution temporelle de la surface libre, on remarque de très fortes similarités pour des mascarets ayant des nombres de Froude proches.

Sur le graphique suivant, on voit que 9 des 12 ressauts enregistrés se superposent presque entièrement : ce sont ceux liés aux marées 8 à 16, et dont le nombre de Froude varie entre 1.038 et 1.052. Il y a donc un lien entre nombre de Froude et forme de la vague.

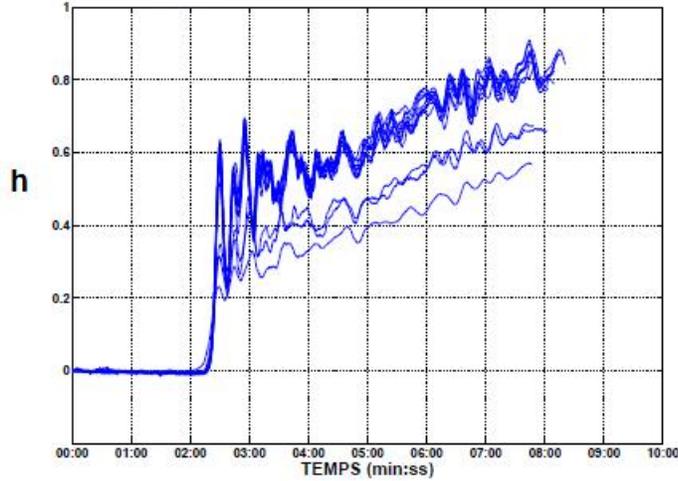


FIGURE 18 : Superposition des signaux de hauteur lors du passage du mascaret.

Enfin, les nombres de Froude calculés ici à partir de H et H' semblent être en accord avec ceux calculés lors d'expérience en laboratoire sur des ressauts oscillants se déplaçant dans un canal trapézoïdal.

6.6 Étude des éteules

Après le passage de la première vague, on observe une série de vagues secondaires, les éteules. Leur apparition ne peut pas être expliquée par un modèle hydrostatique, ce qui rend leur étude théorique difficile. Un des buts de la campagne de mesure était donc de mieux comprendre leur évolution et leur dynamique.

Amplitude et longueur d'onde des éteules : Afin de comparer les données recueillies sur le terrain avec des résultats théoriques, on utilise les relations d'Andersen (1978), qui donnent une bonne approximation de la longueur d'onde et de l'amplitude des éteules pour un nombre de Froude proche de 1, ce qui est le cas ici. Ces relations sont les suivantes :

$$\frac{a}{H} = 0.741Fr^{2/3}(Fr - 1)^{1.028}$$

$$\frac{\lambda}{H} = Fr^{2/3} \frac{3.15}{(Fr - 1)^{0.45}},$$

où a est l'amplitude des éteules, λ leur période spatiale et Fr le nombre de Froude en amont du ressaut.

Lors de la campagne de mesure, on a mesuré l'amplitude des éteules grâce aux capteurs de pression ainsi que leur période temporelle. Leur célérité ayant été estimée, on peut alors en déduire leur période spatiale. Ces données ont été comparées avec les résultats théoriques donnés par les relations d'Andersen, et, dans le cas de la période, avec des résultats d'expériences faites en laboratoires dans des canaux rectangulaire et trapézoïdal.

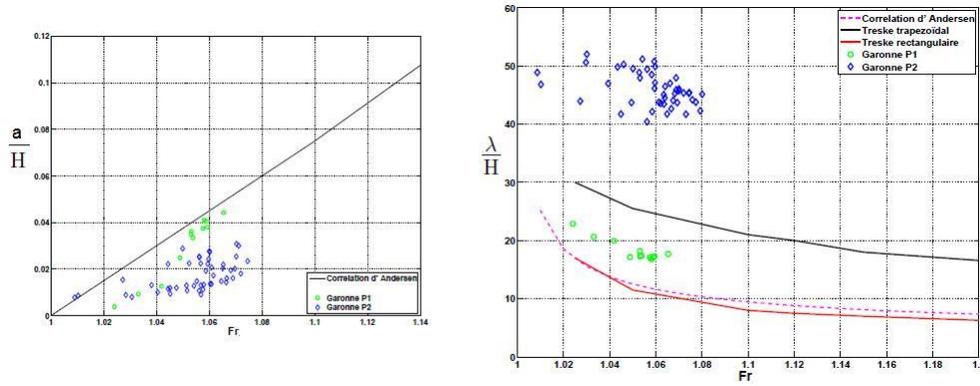


FIGURE 19 : A gauche, évolution de l'amplitude en fonction du nombre de Froude ; à droite, évolution de la longueur d'onde en fonction du nombre de Froude.

Bien que les résultats enregistrés par P2 semblent assez éloignés de la théorie, ceux enregistrés par P1 s'accordent relativement bien aux relations d'Andersen, que se soit pour l'amplitude ou pour la longueur d'onde. Le fait que la longueur d'onde soit 2 fois plus élevée sur la rive droite (P2) que sur la rive gauche (P1) semble indiquer encore une fois un processus de réflexion des ondes sur l'un des deux bords.

Asymétrie des éteules : sur les relevés de hauteur d'eau, on remarque que les courbes tracées ne sont pas symétriques entre les périodes de jusant et de flots.

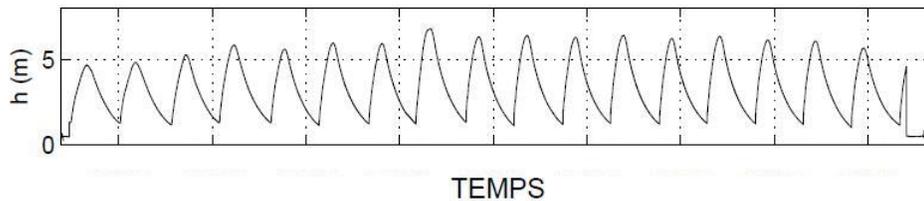


FIGURE 20 : Relevé de la hauteur d'eau en fonction du temps.

L'équation de KdV ne permettant pas de décrire ce phénomène, on rajoute un terme dispersif en s''' à l'équation de KdV pour les ondes stationnaires. Les conditions au limites sont les suivantes :

1. $h(-\infty) = 1, h'(-\infty) = h''(-\infty) = 0$
2. $h(+\infty) = 0, z'(+\infty) = h''(-\infty) = 0$

En intégrant une fois et en normalisant, on obtient l'équation suivante :

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - m \frac{\partial h}{\partial x} + h^2 - h = 0,$$

où h est la hauteur d'eau, x la position et m un facteur proportionnel à la viscosité et à l'inverse de la racine du nombre de $Fr - 1$, $m \frac{\partial h}{\partial x}$ étant le nouveau terme.

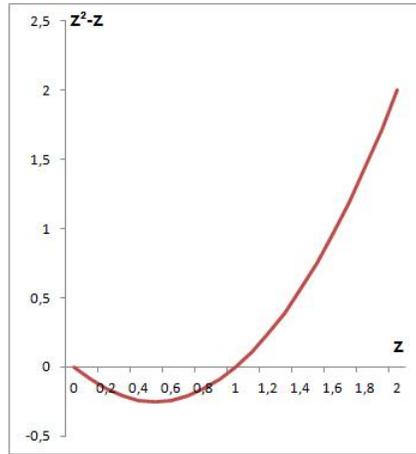


FIGURE 21 : Tracé de la fonction $d(h) = h^2 - h$.

Tout d'abord, si z a un minimum pour $x = x_0$, on a :

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x_0) > 0,$$

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x_0) = 0.$$

Par conséquent, $h^2 - h < 0$ et donc $h(x_0) \in [0; 1]$. De même si h a un maximum en x_1 , $h(x_1) > 1$. Ceci montre que h ne peut pas descendre en dessous de 0 (car étant continue et n'ayant pas de minimum en dessous de 0, elle ne pourrait pas tendre vers 0 à l'infini).

Pour h proche de 1, on pose alors $h(x) = 1 + g(x)$ et en faisant un développement limité, on a l'équation :

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - m \frac{\partial g}{\partial x} + g = 0.$$

La solution est donc proportionnelle à $\exp(\sigma x)$, avec $\sigma = \frac{1}{2}(m \pm \sqrt{m^2 - 4})$. Des oscillations apparaissent donc si $m < 2$, ce qui donne des conditions d'apparition du mascaret en fonction du nombre de Froude et de la viscosité. De même, on peut montrer que quand h est proche de zéro, $h(x)$ décroît exponentiellement vers 0.

On se place donc dans le cas où $m < 2$, où on peut observer des oscillations. On sait donc qu'il existe un minimum, et on suppose qu'il existe également un maximum. Or entre deux extremums, on sait que la dérivée seconde s'annule au moins une fois. On va donc rechercher où peuvent se trouver les points d'inflexion. Dans un premier temps, on cherche le point d'inflexion lors du flot ($\frac{\partial h}{\partial x} > 0$). Alors :

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x_2) = 0 \ \& \ \frac{\partial h}{\partial x}(x_2) > 0 \Rightarrow (h^2 - h)(x_2) > 0.$$

On a donc que $h(x_2) > 1$.

Dans le cas du jusant, on trouve de la même manière que $h(x_3) < 1$ si $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x_3) = 0$.

On trouve donc une asymétrie de comportement qui explique la forme enregistrée pour les éteules. Cette asymétrie est également visible lors d'expériences en laboratoire (Chanson, 2005 [Cha]).

Dynamique non hydrostatique des éteules : Dans le cadre des mesures, l'hypothèse hydrostatique a souvent été faite, notamment pour convertir des données de pression en données de hauteur d'eau. Cependant, si l'on se place dans ce cadre, il est impossible de prévoir de manière théorique l'apparition des éteules et seul le premier ressaut est expliqué. Des expériences ont donc été menées en laboratoires, et une explication qualitative de la manière dans se forment ces vagues est possible.

On considère une vague de longueur d'onde élevée dans un canal de faible profondeur. Grâce aux équations de Navier-Stokes, on peut décrire convenablement la première phase de déplacement, c'est à dire la période durant laquelle le changement de niveau d'eau est faible, et où la pression est donc presque hydrostatique. Cependant, comme on l'a vu dans la première partie de ce rapport, la célérité de l'eau augmente avec la profondeur. Le sommet de la vague augmente donc plus vite que la base, et la courbure de la vague augmente donc, jusqu'à arriver à un point où la distribution de pression affecte de manière significative son évolution.

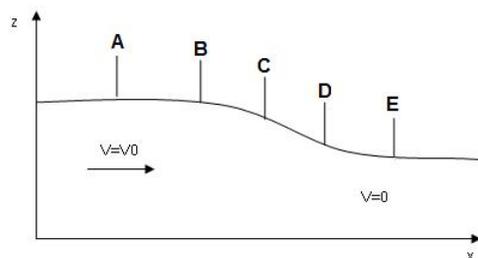


FIGURE 22 : Vague au point où l'on ne peut plus négliger son caractère non-hydrostatique. A, B, C, D et E sont des points remarquables.

Les points B et D sont les points où la courbure de la vague est la plus élevée, et donc représentent les endroits où la distribution de pression s'écarte le plus de la distribution hydrostatique (par ajout d'une pression capillaire). En B la pression est inférieure à la pression hydrostatique, en D elle est supérieure. Un gradient de pression horizontal va donc apparaître (théorème de Bernoulli) et va générer de nouveaux courants horizontaux. Il va donc y avoir de plus en plus d'eau aux endroits où la pression est plus faible et de moins en moins là où la pression est forte. La surface va alors se modifier : elle va s'élever en B et s'abaisser en D. Ces résultats ont été confirmés par des expériences en laboratoire (H.Chanson, 2005).

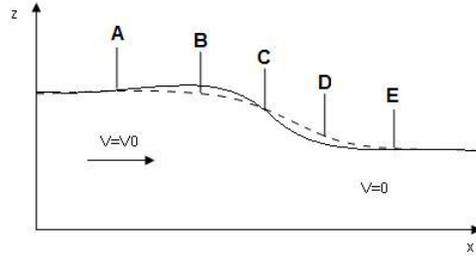


FIGURE 23 : Apparition des creux et bourrelets.

Ce processus va continuer jusqu'à ce qu'une série de vague soit formée et celles-ci vont croître jusqu'à trouver un équilibre ou se briser.

D'une manière plus théorique, Sandra Soares et Yves Zech ([soa]) ont proposé une modélisation numérique à partir d'une expression proposée par Boussinesq en 1877 :

$$\frac{\partial(Uh)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(U^2 h + g \frac{h^2}{2} \right) = \frac{h^3}{3} \left[\frac{\partial^3 U}{\partial t \partial x^2} + U \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} \right],$$

où h est la hauteur d'eau et U la vitesse moyennée sur toute la hauteur h .

Habituellement, ces équations sont ensuite traitées selon la méthode des volumes finis (qui consiste en une approximation d'une intégrale). Cependant, cette méthode ne peut être appliquée que dans le cas d'équations conservatives, ce qui n'est pas le cas ici (on peut montrer que son caractère dispersif dans le cas de vagues de faible amplitude, Cf annexe). On applique donc la méthode des volumes finis aux termes conservatifs de l'équation (membre de gauche) et la méthode des différences finies (discrétisation des opérateurs de dérivation, par exemple à l'aide de polynômes de Taylor) au membre de droite, non-hydrostatique. Ce modèle semble reproduire de manière très satisfaisante ce qui se passe en laboratoire (figure suivante).

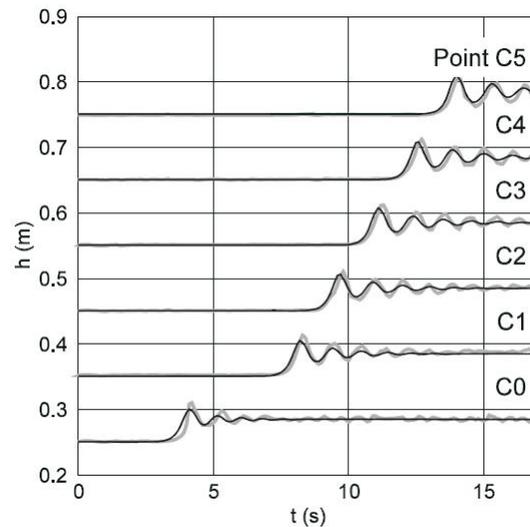


FIGURE 24 : Comparaison entre l'expérience (courbe claire) et la simulation numérique (courbe sombre).

Les point C1, C2, C3, C4 et C5 correspondent à des capteurs placés en différents endroits du canal.

6.7 Mascaret et transport sédimentaire

Quelques minutes après le passage du mascaret, le courant s'inverse dans le fleuve (l'eau coule de l'aval vers l'amont) et de nombreuses turbulences se forment. Ce processus pourrait avoir un très gros impact sur le transport sédimentaire, sur l'évolution des rives et sur la faune fluviale (en Amazonie, les piranhas se nourrissent des sédiments mis en suspension par le passage du mascaret). Leur étude est donc très importante, et il est notamment primordial de mieux comprendre les processus de transports sédimentaires en jeu. En effet, lorsque la vague passe, des sédiments sont déposés sur le sol, mais les turbulences qui se forment après provoquent leur re-suspension, et il est faut donc déterminer quel est le phénomène dominant.

Renverse du courant :sur le site de Podensac, l'eau coule de l'amont vers l'aval environ 3/4 du temps, à une vitesse d'environ 1.3m/s à marée basse et 0.5m/s à marée haute. Cependant 5 à 10 minutes après le passage du mascaret, le courant s'inverse lorsque le mascaret est assez important. Expérimentalement, on observe que ce phénomène commence par le fond du fleuve, ce qui est contre-intuitif au vue de l'apport d'eau en surface dû à la marée.

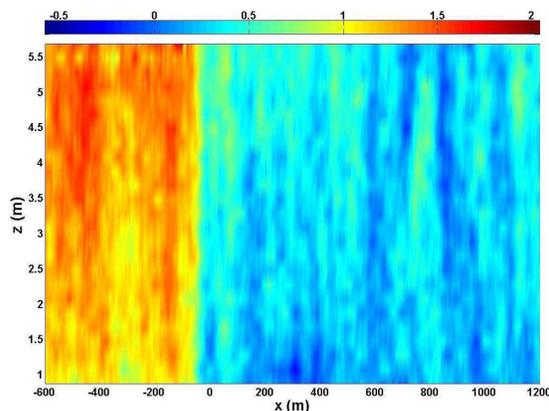


FIGURE 25 : Profil de la vitesse de l'eau selon x. La vitesse est comptée positive lorsque l'eau s'écoule vers la mer.

On voit très nettement sur ce profil de vitesse le front du passage du mascaret (transition couleurs chaudes/ couleurs froides). A ce moment survient une baisse brutale de la vitesse selon x. On observe également (en bleu sombre, notamment vers $x=300\text{m}$), le début de l'inversion du courant.

Turbulences : d'après les premières données expérimentales (qui seront complétées par celles de septembre), l'écoulement est laminaire avant le ressaut (lignes de courant parallèles) et turbulent après. Certaines lignes de courant s'arrêtent même brutalement, ce qui traduit le fait qu'elles changent de plan de représentation choisi. L'écoulement est alors tridimensionnel, ce qui traduit de très fortes turbulences. Ces turbulences semblent également d'autant plus fortes que le mascaret les précédant l'était.

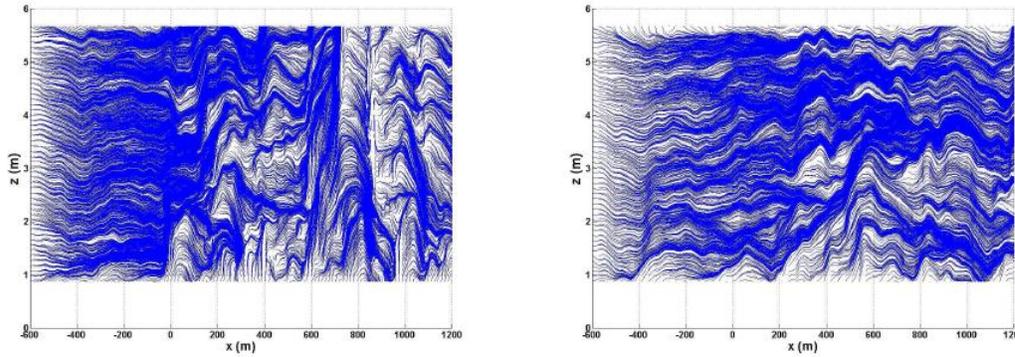


FIGURE 26 : Lignes de courant. A gauche : marée 14 (fort coefficient), à droite : marée 6 (petit coefficient).

On voit assez nettement sur les deux figures le passage du ressaut ($x=0$), et le passage d'un régime quasiment laminaire à un régime turbulent. Les turbulences sont d'autant plus importantes que la marée est forte (on observe même l'aspect tridimensionnel de l'écoulement car des lignes de courants semblent s'arrêter en $x=700\text{m}$ sur la figure de gauche).

Expériences en laboratoires : des expériences de laboratoire ont été menées par H.Chanson [Cha] afin de mieux comprendre les processus sédimentaires ayant lieu après le passage du ressaut. Un canal rectangulaire de 3.2m de long, 0.5m de large et 0.3m de haut a été construit à cet effet. Plusieurs paramètres ont été mesurés, dont la profondeur de l'eau, sa pression, sa vitesse, les contraintes exercées sur le fond du canal. Ces mesures ont été prises à différentes longitudes et plusieurs sections transversales ont été installées afin de vérifier que l'écoulement était bidimensionnel et symétrique. Les résultats montrent qu'à part à proximité immédiate des bords, l'écoulement est effectivement bidimensionnel. Le second résultat important est que pour toutes les expériences on a observé une grande cellule de recirculation sous la première crête. Cette cellule pourrait avoir un effet déterminant dans le transport sédimentaire car elle est la source de contraintes importantes sur le sol. Elle semble également modifier de manière très significative la vitesse de la première ondulation, alors que pour les autres crêtes l'expérience semble mieux coller à la théorie. De plus, on observe des maximums de contraintes sur le sol au moment de chaque creux et des minimums à chaque bosse, le premier maximum étant très largement supérieur aux suivants.

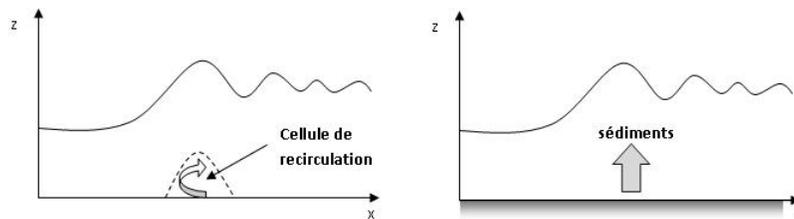


FIGURE 27 : Mécanisme de mise en suspension des sédiments.

D'après ces résultats, lors du passage d'un mascaret les sédiments seraient "arrachés" du sol par le passage de la première vague grâce à la cellule de recirculation. Les courants ascendants causés par l'alternance entre creux et crêtes emporteraient ensuite ces sédiments plus en hauteur. Des matériaux légers seraient donc déplacés vers l'amont du fleuve.



FIGURE 28 : Passage du mascaret provoquant l'affouillement des rives

Expériences sur le terrain : Cependant, les expériences en laboratoire ne peuvent mimer parfaitement les conditions naturelles : rives moins droites, sol différent (donc plus ou moins de frottements), caractère non-stationnaire de l'onde... Il est donc important de mener une étude sur le terrain. Une campagne de mesure est en cours à Bordeaux, dont les résultats bruts devraient être connus fins septembre. Lors de cette campagne, des turbidimètres optiques et des altimètres à ultrasons ont été immergés afin d'enregistrer respectivement les concentration des particules en suspension ainsi que les flux d'érosion, et la hauteur du sédiment (pour connaître les événements d'érosion/ dépôt). Cependant, ces mesures n'étant pas encore disponibles, je présenterais ici celles réalisées sur l'estuaire de la Daly (Australie) par l'équipe formée de E.Wolanski, D.Williams, S.Spagnol et H.Chanson [Wol].

Ces résultats montrent que le passage du ressaut ne provoqua pas directement de resuspension des sédiments, et aucune cellule de recirculation n'a été observée (pas de variations dans la vitesse verticale). Cependant, une resuspension importante se produit quelques minutes après le passage du ressaut (30s dans le cas d'un ressaut de 1.26m, 2 minutes dans le cas d'un ressaut de 0.45m). Ce délai est probablement dû au temps nécessaire pour que les sédiments commencent à se déplacer vers le haut. Ainsi, un pic dans la concentration de sédiments en suspension dans l'eau a été observé à chaque marée haute. Ces résultats sont valables dans le cas d'un mascaret ondulant. Dans le cas d'un mascaret déferlant, plusieurs études montrent que la resuspension est quasiment immédiate. (Wolanski et al., 2001). L'étude menée en Australie montre également que lorsque les vagues du mascaret se brisent le long des berges, elles entraînent des sédiments avec elles, ce qui augmente l'érosion des berges.

Enfin, des micro-tourbillons apparaissent une vingtaine de minutes après le passage du ressaut et semblent avoir un rôle important dans la continuation du phénomène de suspension des sédiments. Ces tourbillons se forment probablement lorsque la marée est trop haute pour que les frottements avec le fond de la rivière puisse dissiper l'énergie cinétique et que le flux devient instable.

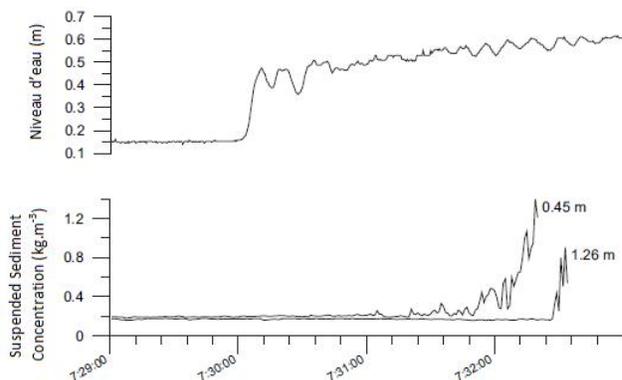


FIGURE 29 : Hauteur d'eau et concentration en sédiment lors du passage du mascaret.

Cependant, le mascaret observé pour cette étude était de faible ampleur, contrairement à celui étudié en laboratoire, les différences observées ne sont donc peut-être pas toute liées à la différence entre le laboratoire et l'estuaire naturel.

6.8 Equations de Green-Naghdi

Actuellement, on ne dispose d'aucun système d'équations capables de décrire intégralement le processus de formation puis de déferlement des vagues. En effet, les équations de Boussinesq permettent de décrire assez précisément la dynamique du ressaut ondulé, mais reste impuissante face aux déferlement des vagues (processus non linéaire et dispersif). Le mascaret déferlant, peut lui être approché par une modélisation à partir des équations de Saint-Venant. Mais celles-ci étant basées sur une approximation hydrostatique, il n'est pas possible de l'étendre de manière satisfaisante au mascaret ondulant, car les vagues secondaires (éteules) ont une dynamique non-hydrostatique. C'est dans ce cadre qu'une équipe du laboratoire tente de développer une modélisation à partir des équations de Green-Naghdi, qui comportent des termes dispersifs, et de mesures expérimentales (introduites sous forme de conditions aux limites du système étudié). Ce système a déjà fait ses preuves dans le cas de la propagation des vagues en milieu littoral, et sa validation dans le cas du mascaret dépendra des résultats de la campagne de mesures expérimentales.

7 Annexe

7.1 Opérateurs linéaires

Définition 7.1 : Soit A un opérateur linéaire de domaine de définition $D(A)$. On appelle adjoint de A l'unique opérateur A^* défini sur

$$D(A^*) = \{v \in \mathcal{H}/u \mapsto \langle au, v \rangle \in \mathcal{L}(D(A), \mathbb{C})\}$$

et tel que :

$$\forall u \in D(A), \forall v \in D(A^*), \langle Au, v \rangle = \langle u, A^*v \rangle .$$

Définition 7.2 : Un opérateur A de domaine $D(A)$ dense dans \mathcal{H} est dit symétrique si

$$\forall u, v \in D(A), \langle Au, v \rangle = \langle u, Av \rangle .$$

Définition 7.3 : Un opérateur fermé de domaine dense est dit auto-adjoint s'il coïncide avec son adjoint, c'est-à-dire s'il est symétrique et si de plus $D(A) = D(A^*)$.

Proposition 7.4 : Si A est un opérateur linéaire de domaine $D(A)$, alors :

$$(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*,$$

où A^{-1} est défini sur \mathcal{H} .

DÉMONSTRATION :

$$(A^{-1})^* A^* = (AA^{-1})^* = I.$$

De même $A^*(A^{-1})^* = I$, donc on a bien $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$. □

7.2 Caractère dispersif des équations de Boussinesq

On considère le système d'équations différentielles suivant :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(Uh)}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{h^2}{3} \left[\frac{\partial^3 U}{\partial t \partial x^2} + U \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} \right] = 0,$$

où h représente la hauteur d'eau et $Uh = \int_0^h u dz$ avec u la vitesse en un point (x, z) .

On pose alors $h = H + \eta$, où H est la hauteur d'eau moyenne. On suppose que $\eta \ll H$ et $H \ll \lambda$, où λ est la longueur d'onde de la vague. Ces approximations sont vérifiées dans le cas du mascaret ou d'un tsunami par exemple. La

dernière inégalité équivaut au fait que la vitesse de la vague est très supérieure à la vitesse de l'eau, et on a donc aussi :

$$U \frac{\partial}{\partial x} \ll \frac{\partial}{\partial t}.$$

On a alors :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + h \frac{\partial(U)}{\partial x} + U \frac{\partial(h)}{\partial x} \approx \frac{\partial(H + \eta)}{\partial t} + (H + \eta) \frac{\partial U}{\partial x} \approx \frac{\partial \eta}{\partial t} + H \frac{\partial U}{\partial x} = 0$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{h^2}{3} \left[\frac{\partial^3 U}{\partial t \partial x^2} + U \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} \right] &\approx \frac{\partial U}{\partial t} + g \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{h^2}{3} \frac{\partial^3 U}{\partial t \partial x^2} \\ &\approx \frac{\partial U}{\partial t} + g \frac{\partial(H+\eta)}{\partial x} - \frac{(H+\eta)^2}{3} \frac{\partial^3 U}{\partial t \partial x^2} \\ &\approx \frac{\partial U}{\partial t} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{H^2}{3} \frac{\partial^3 U}{\partial t \partial x^2} = 0. \end{aligned}$$

Le terme hydrostatique correspond au dernier terme de la deuxième équation. Le système final d'équations admet une solution en onde plane composée d'un terme du développement en série de Fourier d'une vague oscillante :

$$\begin{pmatrix} \eta \\ U \end{pmatrix} = \Re \left[\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} e^{i \frac{2\pi}{\lambda}(x-ct)} \right] = \Re \left[\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} e^{i(kx-\omega t)} \right].$$

A et B sont des constantes complexes, c la vitesse de la vague, k le nombre d'onde et ω la fréquence temporelle. En introduisant cette solution dans les équations précédemment trouvées, on a :

$$\begin{bmatrix} -i\omega & ikH \\ ikg & -i\omega(1 + \frac{1}{3}k^2H^2) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Cette dernière équation n'a une solution non triviale que si la matrice n'est pas inversible. On trouve donc la relation de dispersion suivante :

$$\omega^2 \left(1 + \frac{1}{3}k^2H^2 \right) = k^2gH$$

i.e $c = \frac{\omega}{k} = \frac{\sqrt{gH}}{\sqrt{1 + \frac{1}{3}k^2H^2}}$. On voit donc que le terme non-hydrostatique ($\frac{1}{3}k^2H^2$) est responsable du caractère dispersif des solutions. D'ailleurs, si on retire ce terme, on retrouve la célérité de ondes en faible profondeur calculée plus haut : $c = \sqrt{gH}$.

Références

- [Cha] H. Chanson, *Current knowledge in hydraulic jumps and related phenomena. A survey of experimental results*, European Journal of Mechanics B/Fluids 28, 2009, 191-210.
- [Cha] H. Chanson, *Physical Modelling of the flow field in an undular tidal bore*, Journal of Hydraulic Research, Vol. 43, No 3, 2005, 234-244.
- [Guy] E. Guyon, J.P Hulin et L. Petit, *Hydrodynamique physique*, Savoirs actuels, CNRS édition, EDP sciences, 2001.
- [Lan] L.D Landau, E.M Lifchitz, *Mécanique des fluides*, édition Mir, 1989.
- [Lax] P.D Lax, *Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves*, Communication on pure and applied mathematics 21, 1968, 467-490.
- [Soa] S. Soares Frazão, Y. Zech, *Undular bores and secondary waves-Experiments and hybrid finite-volume modelling*.
- [Sme] D. Smets, *Méthodes mathématiques pour la mécanique des fluides*, poly de cours.
- [Whi] G.B Whitham, *Linear and nonlinear waves*
- [Wol] E. Wolanski, D. Williams, S. Spagnol, H. Chanson, *Undular tidal bore dynamics in the Daly Estuary, Northern Australia*, Estuarine, Coastal and Shelf Science 60, 2004, 629-636