Algèbres de cohomologie et cycles des variétés algébriques et kähleriennes

François Charles, sous la direction de Claire Voisin

27 novembre 2007

1 Introduction

Ce texte se veut une courte introduction à certains problèmes de géométrie algébrique complexe. On essaie de décrire la topologie de certaines variétés et de montrer la richesse des structures qu'elle fait intervenir. Par souci de concision, on n'abordera que deux thèmes, la description des algèbres de cohomologie des variétés projectives et kähleriennes, et la conjecture de Hodge. En particulier, on n'abordera pas le sujet de l'équivalence rationnelle des cycles et les conjectures de Bloch-Beilinson.

Je voudrais remercier Claire Voisin de m'avoir introduit au monde de la géométrie complexe et m'avoir fait découvrir à quel point structures de Hodge et groupes de Chow sont des objets fascinants.

2 Topologie de certaines variétés complexes

2.1 Géométrie kählerienne et géométrie projective

La notion de variété kählerienne est une généralisation de celle de variété projective complexe lisse. Soit donc V une variété projective complexe, c'est-à-dire un sous-ensemble de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ défini par des équations polynômiales, que l'on suppose lisse (par exemple comme variété différentielle réelle) et connexe[1]. La variété V est munie d'une structure naturelle de variété (analytique) complexe compacte : elle est recouverte par des ouverts qui sont chacun biholomorphes à des ouverts de $\mathbb{C}^d$ pour un certain d, la dimension de V. De même que la condition d'holomorphie, pour une fonction de variables complexes, est bien plus restrictive que la condition analogue de différentiabilité pour une fonction de variables réelles, la notion de variété analytique complexe est beaucoup plus rigide que celle de variété différentielle réelle. Une manifestation frappante de ce phénomène est le théorème suivant.

Théorème 1. *(Chow) Soit V une sous-variété complexe compacte d'un espace projectif complexe. Alors V est algébrique, c'est-à-dire qu'elle est définie par des équations polynômiales.*

Plus généralement, on doit à Serre un principe dit GAGA (Géométrie Algébrique et Géométrie Analytique) qui permet d'affirmer qu'un grand nombre d'objets analytiques définis à partir de variétés projectives sont en fait algébriques.

[1] Il n'est pas tout à fait correct de définir une variété projective par l'ensemble de ses points complexes : ce serait ne pas faire de différence entre la sous-variété de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ définie par l'équation $X = 0$ et celle définie par l'équation $X^2 = 0$. Nous ne nous préoccuperons pas de ces problèmes, d'ailleurs faciles à résoudre.

Une variété algébrique projective ayant donc une définition analytique, la question se pose de déterminer, parmi les variétés complexes compactes, quelles sont les variétés projectives. En particulier, peut-on trouver des conditions non triviales sur la topologie ou la structure analytique des variétés projectives ? Une réponse est fournie par la notion de variété kählerienne.

Définition 2. *Soit V une variété complexe compacte. On dit que V est kählerienne si V est munie d'une métrique hermitienne h de classe $\mathcal{C}^\infty$ dont la partie imaginaire est une 2-forme fermée. Si $h = g - i\omega$ est la décomposition de h en partie réelle et partie imaginaire, on appelle ω la forme de Kähler de V.*

Sur un espace projectif de dimension n, on dispose d'une métrique hermitienne canonique, la métrique de Fubini-Study, qui fait de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ une variété kählerienne. En outre, puisque métriques et formes différentielles se tirent en arrière, il est facile de vérifier que toute sous-variété analytique d'une variété kählerienne est kählerienne. Une variété projective complexe est donc toujours kählerienne[2].

Il existe des variétés kähleriennes qui ne sont pas projectives. Ainsi, un tore complexe admet toujours une forme de Kähler, qui correspond à une métrique constante sur son revêtement universel, mais, sauf en dimension (complexe) 1, la majorité des tores complexes ne sont pas algébriques – ils n'admettent même pas de fonctions méromorphes. Néanmoins, ce sont tous des déformations complexes de variétés algébriques. Nous reviendrons plus bas sur cette remarque.

2.2 La théorie de Hodge

L'intérêt de la notion de variété kählerienne vient de la contrainte qu'impose l'existence d'une forme de Kähler sur la géométrie d'une variété complexe, et en particulier sur sa cohomologie. On pourra consulter [25] et l'exposé de Demailly dans [6] pour les résultats généraux de la théorie de Hodge.

Rappelons que la cohomologie de de Rham à coefficients dans $\mathbb{R}$ d'une variété différentielle réelle connexe compacte est définie comme l'algèbre graduée dont la partie de degré k est donnée par l'espace vectoriel quotient des k-formes différentielles fermées par les k-formes différentielles exactes. La structure d'algèbre est donnée par le produit extérieur. On notera $H^*(M, \mathbb{R})$ la cohomologie de de Rham d'une variété différentielle réelle compacte. C'est une algèbre de dimension finie qui ne dépend que du type d'homotopie de M. Si M est orientée et de dimension d, alors $H^d(M, \mathbb{R})$ est canoniquement isomorphe à $\mathbb{R}$. On peut prendre le produit tensoriel par $\mathbb{C}$ pour trouver une $\mathbb{C}$-algèbre $H^*(M, \mathbb{R})$.

Supposons maintenant que V est une variété complexe compacte et connexe. La variété réelle sous-jacente à V est orientée, et sa cohomologie de de Rham à coefficients complexes peut se calculer en utilisant les formes différentielles complexes.

Si $z_1, \ldots, z_n$ sont des coordonnées locales holomorphes sur V, alors les

$$dz_1, \ldots, d_{z_n}, d\bar{z}_1, \ldots, d\bar{z}_n$$

forment une base locale de l'espace des formes différentielles. On dira qu'une forme différentielle sur V est de type (p, q) si elle est localement de la forme

$$\sum_\sigma f_\sigma(z, \bar{z}) dz_{\sigma(1)} \wedge \ldots \wedge d_{\sigma(p)} \wedge d\bar{z}_{\sigma(p+1)} \wedge \ldots \wedge d\bar{z}_{\sigma(p+q)},$$

[2]Cela n'est pas vrai pour les variétés algébriques complexes en général. On peut en fait montrer qu'une variété algébrique complexe qui est kählerienne est projective.

où σ est une permutation de $\{1, \ldots, p+q\}$ et où les f_σ sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$. Cette définition ne dépend pas des choix de coordonnées locales holomorphes.

Une forme différentielle quelconque est toujours somme de formes différentielles de type (p,q), où $p+q$ est le degré de la forme différentielle en question. Le miracle de la géométrie kählerienne – et donc de la géométrie projective – est que cette décomposition se traduit en une décomposition semblable de la cohomologie de de Rham. Plus précisément, notons $H^{p,q}(V)$ l'image dans $H^{p+q}(V, \mathbb{C})$ des formes différentielles fermées de type (p,q). On a alors le théorème fondamental suivant.

Théorème 3. *Soit V une variété kählerienne, et soit n un entier positif. Alors l'espace de cohomologie de de Rham $H^n(V, \mathbb{C})$ est engendré par ses sous-espaces $H^{p,q}$, où p et q sont deux entiers de somme n. Autrement dit, on dispose d'une décomposition de Hodge*

$$H^n(V, \mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=n} H^{p,q}(V).$$

Une propriété fondamentale de cette composition est la symétrie de Hodge : on a

$$H^{p,q}(V) = \overline{H^{q,p}(V)}.$$

En particulier, notant $h^{p,q}(V) = \dim H^{p,q}(V)$ les *nombres de Hodge* de V, on a $h^{p,q}(V) = h^{q,p}(V)$.

Cette condition numérique impose des contraintes non triviales à la topologie des variétés kähleriennes. En effet, elle implique que les nombres de Betti de degré impair d'une variété kählerienne sont pairs. Cela n'est pas vrai pour n'importe quelle variété complexe. Considérons ainsi une surface de Hopf, c'est-à-dire le quotient de $\mathbb{C}^2 - \{0\}$ par $\mathbb{Z}$ agissant via $(z_1, z_2) \mapsto (\lambda_1 z_1, \lambda_2 z_2)$. Puisque $\mathbb{C}^2 - \{0\}$ est simplement connexe, le groupe fondamental d'une surface de Hopf est $\mathbb{Z}$, donc son premier nombre de Betti vaut 1. Ce calcul montre que les surfaces de Hopf n'ont pas le type d'homotopie d'une variété kählerienne.

La preuve du théorème précédent est analytique. Il s'agit en effet de résoudre certaines équations différentielles, et l'existence d'une métrique hermitienne particulière permet d'appliquer des techniques d'analyse harmonique. Le point crucial est que la condition de Kähler permet de relier la topologie d'une variété et sa structure complexe, ce qui s'exprime en particulier par les identités kähleriennes comparant des opérateurs venant de la structure complexe à des opérateurs définis par la structure hermitienne. Ces considérations permettent de prouver le deuxième résultat suivant.

Notons Ω_V le faisceau des différentielles de Kähler de V. Ses sections sur un ouvert U sont les formes différentielles holomorphes sur U, c'est-à-dire les sommes de $f_i(z)dz_i$, où les f_i sont des fonctions holomorphes.

Théorème 4. *On a un isomorphisme canonique, indépendant de la structure kählerienne de V,*

$$H^{p,q}(V) = H^q(V, \Omega_X^p).$$

Le morphisme mentionné par le théorème est facile à décrire : utilisant la cohomologie de Dolbeault, on sait que les éléments du groupe $H^q(V, \Omega_X^p)$ sont représentés par des formes différentielles de type (p,q). Néanmoins, il n'est pas évident a priori que celles-ci soient fermées. C'est effectivement le cas, ce qui permet de définir un morphisme $H^q(V, \Omega_X^p) \to H^{p,q}(V)$. C'est là encore un résultat remarquable. Il implique par exemple que les formes différentielles holomorphes globales sont fermées. C'est faux sur une variété complexe compacte quelconque, mais c'est aussi faux sur certaines variétés projectives en caractéristique positive : Mumford donne dans [20] un exemple en dimension 2. Néanmoins, Deligne et Illusie ont donné dans [12] une preuve entièrement algébrique de ce dernier fait, en retrouvant une partie importante des théorèmes précédents.

La cohomologie d'une variété différentielle est munie d'une structure entière, qui vient de la cohomologie singulière. La considération de cette structure entière et de la décomposition de Hodge mène à la définition suivante, dûe à Griffiths.

Définition 5. *Soit H un $\mathbb{Z}$-module libre de rang fini. Une structure de Hodge entière sur H est la donnée d'une décomposition de Hodge sur $H \otimes \mathbb{C}$, c'est-à-dire d'une décomposition en somme directe*

$$H \otimes \mathbb{C} = \bigoplus_{p,q} H^{p,q}$$

telle que $H^{p,q}(V) = \overline{H^{q,p}(V)}$. On dit que la structure de Hodge est de poids n si les couples (p,q) qui apparaissent dans la décomposition de Hodge sont tous de somme n. La structure de hodge est dite effective si tous les p,q qui apparaissent sont positifs.

Ce qui précède montre que les groupes de cohomologie singulière (modulo torsion) d'une variété kählerienne sont munis d'une structure de Hodge entière.

Une structure de Hodge est un objet très intéressant. Par exemple, il est équivalent de se donner une structure de Hodge effective de poids 1 et un tore complexe. Si la structure de Hodge en question est polarisée (c'est-à-dire qu'elle est munie d'une forme bilinéaire vérifiant une condition de positivité et de compatibilité à la structure de Hodge), on obtient même une variété abélienne polarisée. L'interprétation géométrique des structures de Hodge de poids plus élevé ainsi que l'étude de leurs espaces de modules est une question très profonde.

La catégorie des structures de Hodge est très riche. C'est une catégorie tannakienne, ce qui signifie qu'il existe une notion de dual et de produit tensoriel. Tout cela est compatible aux opérations usuelles sur les variétés (morphismes de Gysin, pullback, formule de Künneth...).

La structure de Hodge sur la cohomologie d'une variété kählerienne donne – au moins conjecturalement – beaucoup d'information sur cette variété. Nous y reviendrons plus bas dans le cas projectif. Ceci est vrai aussi dans le cas kählerien. Ainsi, pour plusieurs familles de variétés, la structure de Hodge détermine la classe d'isomorphisme de la variété. Ce sont les théorèmes de Torelli. C'est vrai pour les courbes ([3]), pour les surfaces K3 ([28]) ou pour les hypersurfaces cubiques lisse de $\mathbb{P}^5(\mathbb{C})$ ([24], [19]). Ce phénomène soulève la question de la différence, du point de vue de la géométrie complexe, entre géométrie kählerienne et géométrie projective.

2.3 Le problème de Kodaira

Si V est une variété complexe compacte de dimension 1 (ce que l'on appelle une surface de Riemann), on sait que V est en fait projective – en particulier, c'est une courbe algébrique. En dimension supérieure, on a vu que les surfaces de Hopf sont des variétés complexes qui ne sont pas projectives, ni même kähleriennes. En fait, dès la dimension 2, il existe des variétés kähleriennes compactes qui ne sont pas projectives – c'est même le cas général. Les tores complexes en sont un exemple. On dispose pourtant des deux résultats suivants qui suggèrent que la topologie des variétés kähleriennes compactes est très proche de celle des variétés projectives.

Une déformation d'une variété complexe V est un morphisme lisse de variétés complexes dont une des fibres est isomorphe à V.

Théorème 6. *(Théorème de plongement de Kodaira) Soit V une variété complexe compacte. Alors V est projective si et seulement si elle admet une forme de Kähler dont la classe de cohomologie est rationnelle.*

Théorème 7. *(Kodaira) Soit V une surface kählerienne compacte. Alors on peut déformer V en une surface projective.*

En particulier, une surface kählerienne compacte est toujours difféomorphe à une surface projective. Quant au premier théorème, puisque la cohomologie rationnelle est bien sûr dense dans la cohomologie réelle, il suggère que le même résultat reste vrai en dimension supérieure. Ce n'est pas le cas.

Théorème 8. *(Voisin [27]) Si d est au moins égal à 4, on peut trouver des variétés kähleriennes compactes de dimension d qui n'ont pas le type d'homotopie d'une variété projective.*

Les exemples les plus simples de telles variétés complexes ne sont pas très difficiles à construire. Ils sont birationnels à des tores.

La démonstration originelle du théorème de Kodaira n'est pas conceptuelle : elle utilise de manière essentielle la classification d'Enriques des surfaces et raisonne cas par cas. Plus récemment, Buchdahl a proposé dans [8] une démonstration du même résultat qui s'appuie sur le théorème de plongement de Kodaira et qui étudie les déformations possibles d'une forme de Kähler. Le recours au théorème de classification est alors moins important dans la preuve. Les théorèmes de Kodaira et de Voisin laissent sans réponse la question suivante :

Une variété kählerienne de dimension 3 a-t-elle nécessairement le type d'homotopie d'une variété projective ?

3 Cycles des variétés algébriques – équivalence homologique

Dans cette partie, on essaie de décrire comment la cohomologie d'une variété projective et la structure de Hodge qu'elle porte décrivent, au moins conjecturalement, la géométrie de ses sous-variétés.

3.1 Cycles algébriques

Soit X une variété projective lisse de dimension d sur $\mathbb{C}$.

Définition 9. *Un cycle algébrique de X est une combinaison linéaire formelle à coefficients entiers de sous-variétés irréductibles de X. On dit qu'un cycle est de dimension (resp. de codimension) k, ou que c'est un k-cycle, si toutes ses composantes le sont. Un cycle de codimension 1 est appelé un diviseur.*

Soit Z une sous-variété lisse et irréductible de X, de codimension k. On dispose d'une classe d'homologie $[Z] \in H_{2(d-k)}(X, \mathbb{Z})$. Par dualité de Poincaré, on obtient une classe, notée encore $[Z]$, dans $H^{2k}(X, \mathbb{Z})$. Si Z n'est pas lisse, on peut encore définir une classe de cohomologie $[Z]$, en utilisant une désingularisation de Z (voir [25], ch. 11). Par linéarité, on peut ainsi associer à tout cycle une classe de cohomologie. Le cup-produit sur la cohomologie est compatible au produit d'intersection défini dans [14] au niveau des groupes de Chow.

Les classes de cohomologie des cycles algébriques ont des propriétés très particulières. Par exemple, la classe de cohomologie d'un cycle effectif, c'est-à-dire d'une combinaison à coefficients positifs de sous-variétés, est toujours non nulle si le cycle est non nul. C'est simplement dû au théorème de Bezout qui calcule le produit d'intersection d'un cycle avec un sous-espace linéaire de dimension complémentaire. Cette remarque indique à quel point l'étude cohomologique des cycles algébriques peut fournir des informations sur ces derniers.

Retournons au cas où Z est une sous-variété lisse de codimension k. Soit j l'immersion de Z dans X. Le morphisme de Gysin j_* est compatible aux structures de Hodge portées par les cohomologies de X et Z. Il envoie $H^{p,q}(Z)$ dans $H^{p+k,q+k}(X)$. En particulier, il envoie $1 \in H^0(Z)$ sur une classe de cohomologie de type (k,k). C'est la classe $[Z]$. Plus généralement, sans hypothèse de lissité, on a la proposition suivante.

Proposition 10. *Soit Γ un cycle de codimension k de X. Alors sa classe de cohomologie est une classe entière de type (k,k)*

Si ces constructions peuvent se faire dans un cadre purement analytique (voir [25], ibid.), il existe des approches plus algébriques, qui s'appliquent sur un corps de caractéristique nulle quelconque, et fournissent un point de vue différent sur la cohomologie de de Rham. Il est en particulier facile de définir, par dualité de Serre, une classe dans $H^k(X,\Omega_X^k)$ associée à une sous-variété lisse quelconque, tout étant défini sur un corps de caractéristique 0, mais on peut plus généralement construire classes de cycle et cohomologie de de Rham algébriquement. Il est tout à fait remarquable que ces constructions soient possibles sur n'importe quel corps de base (des variétés définies sur K donneront lieu à des cohomologies de de Rham définies sur K).

3.2 La conjecture de Hodge

On a vu au paragraphe précédent que la classe de cohomologie d'un cycle de codimension k de X est une classe rationnelle de type (k,k). C'est ce que l'on appelle une classe de Hodge. Hodge a formulé la conjecture suivante.

Conjecture 11. *Toute classe de Hodge est une classe de cohomologie d'un cycle à coefficients rationnels.*

La conjecture est fausse si l'on la pose avec des coefficients entiers, même modulo torsion (voir [5] et [23] pour des exemples de classes de torsion qui ne sont pas algébriques, et [17] pour une obstruction différente). Plus généralement, Grothendieck formule dans [16] la conjecture suivante. On définit le niveau d'une structure de Hodge comme le plus grand $p-q$ tel que le morceau de type (p,q) ne soit pas réduit à zéro.

Conjecture 12. *Soient k et c deux entiers. L'espace vectoriel engendré par les images par les morphismes de Gysin des classes de cohomologies de degré c des sous-variétés de codimension k de X est la plus grande sous-structure de Hodge rationnelle de niveau c de $H^{2(k+c)}(X,\mathbb{Q})$.*

Peu de choses sont connues sur ces conjectures. C'est en effet un problème difficile que de construire des cycles algébriques sur une variété. On peut espérer qu'il soit plus facile de construire des fibrés vectoriels, ou des faisceaux cohérents, dont on prendra ensuite les classes de Chern (on peut montrer que ce sont des classes de cycles). L'espace des fibrés en droites sur X étant particulièrement facile à décrire, cette méthode permet de prouver le cas particulier suivant de la conjecture de Hodge.

Théorème 13. *(Lefschetz) Toute classe de Hodge de degré* 2 *est la classe de cohomologie d'un diviseur.*

C'est essentiellement le seul cas général que l'on connaisse. Les autres cas connus de la conjecture de Hodge sont soit des conséquences du théorème précédent, soit des cas très particuliers. On peut espérer construire des cycles intéressants en faisant intervenir des espaces de module de fibrés de rang supérieur, peut-être en utilisant des techniques de déformations.

L'énoncé de la conjecture de Hodge ne fait intervenir que des notions de géométrie analytique, quitte bien sûr à remplacer cycles algébriques par cycles analytiques. On pourrait espérer l'approcher sous cet aspect. On sait bien que les sous-variétés des variétés kähleriennes peuvent être rares, ne serait-ce que pour les tores complexes. Il est donc nécessaire, dans l'énoncé d'une conjecture de Hodge pour les variétés kähleriennes, d'ajouter au moins les classes de Chern des faisceaux cohérents, qui sont des classes de Hodge. Là encore, on n'obtient pas un énoncé satisfaisant, comme le prouve le résultat suivant, qui utilise des techniques analytiques.

Théorème 14. *(Voisin, [26]) Il existe des variétés kähleriennes compactes de dimension* 4 *qui possèdent des classes de Hodge de degré* 4 *non nulles mais satisfont*

$$c_2(\mathcal{F}) = 0$$

pour tout faisceau cohérent $\mathcal{F}$*.*

On ne connaît pas d'énoncé de la conjecture de Hodge dans le cadre de la géométrie kählerienne.

La conjecture de Hodge a de nombreuses conséquences. En termes motiviques, elle implique que le foncteur de la catégorie des motifs purs de Grothendieck dans la catégorie tannakienne des structures de Hodge est pleinement fidèle (pour les variétés complexes). Elle permettrait d'identifier groupes de Mumford-Tate et groupes de Galois motiviques. On pourra consulter [2].

Plus particulièrement, dans [15], Grothendieck isole certains cas particuliers de la conjecture de Hodge, les conjectures standards, qui auraient d'importantes conséquences pour la construction des motifs. S'il n'est pas certain que la conjecture de Hodge soit vraie (Deligne, Cattani et Kaplan donnent cependant dans [9] des arguments forts en sa faveur), il est très probable – en tout cas souhaitable – que les conjectures standards le soient.

3.3 Variétés conjuguées et classes de Hodge absolues

Le point de vue motivique que l'on vient d'évoquer suggère une autre approche de la conjecture de Hodge, dûe à Grothendieck et développée par Deligne. Avant d'en parler, retournons à la cohomologie des variétés algébriques. Le texte de Deligne dans [13] donne un résumé très clair des constructions en jeu.

Soit X une variété algébrique irréductible lisse définie sur un corps k de caractéristique nulle (on supposera que k peut se plonger dans $\mathbb{C}$). On dispose pour X de différentes algèbres de cohomologie. On a tout d'abord, comme plus haut, la cohomologie de de Rham, définie à l'aide du complexe des différentielles de Kähler. Il faut faire un peu plus attention qu'avant pour la définir : c'est l'hypercohomologie de ce complexe. Cette algèbre est définie sur k, on la note $H^*_{dR}(X/k)$. Ses gradués sont munis d'une filtration décroissante, qui vient de la structure de Hodge quand $k = \mathbb{C}$.

Soit maintenant n un entier. Dans [4], Grothendieck définit des groupes de cohomologie étale $H^i_{et}(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$. Ces groupes sont fonctoriels en X. Passant à la limite projective sur n et inversant certains coefficients, on obtient des groupes de cohomologie $H^i_{et}(X)$, et une algèbre $H^*_{et}(X)$ à coefficients dans l'anneau $\mathbb{A}_f$ des adèles finis. Si l'on préfère, cette algèbre est le produit restreint de $\mathbb{Q}_l$-algèbres, pour tout nombre premier l, qui sont les algèbres de cohomologie l-adique.

Ces deux notions de cohomologie se comportent bien : ce sont des cohomologies de Weil, voir [2]. En particulier, on dispose d'une application classe de cycle en cohomologie étale. On peut relier ces notions à la cohomologie ordinaire par le résultat suivant.

Théorème 15. *(Artin, Grothendieck) Soit σ un plongement de k dans $\mathbb{C}$, et soit σX la variété complexe obtenue à partir de X par changement de base. Soit $H^*_\sigma(X,\mathbb{Q})$ la cohomologie de Betti de σX. On a des isomorphismes canoniques*
- $H^*_{dR}(X/k) \otimes_{k,\sigma} \mathbb{C} \simeq H^*_\sigma(X,\mathbb{Q}) \otimes \mathbb{C}$
- $H^*_{et}(X) \simeq H^*_\sigma(X,\mathbb{Q}) \otimes \mathbb{A}_f$.

Il est remarquable que la cohomologie de de Rham dépende de la k-structure de X, mais pas la cohomologie étale. Cette remarque munit la cohomologie étale d'une action du groupe des automorphismes de k. Si $k = \mathbb{C}$, il est intéressant de penser aux algèbres de cohomologie l-adique munies de cette action de Galois comme aux valeurs en les places finies de la cohomologie de Betti de X (qui est munie d'une structure de variété complexe), tandis que la cohomologie de de Rham munie de sa structure de Hodge en est la valeur en la place à l'infini.

D'après le théorème de comparaison, on dispose d'une inclusion naturelle, pour tout plongement σ de k dans $\mathbb{C}$,

$$H^*_\sigma(X,\mathbb{Q}) \hookrightarrow H^*_{et}(X) \times H^*_{dR}(\sigma X/\mathbb{C}).$$

Soit maintenant Γ un cycle de codimension n dans X, et soit t sa classe de cohomologie dans $H^{2n}_{et}(X) \times H^{2n}_{dR}(X/k)$. Pour tout σ comme plus haut, on dispose d'une classe $\sigma^*(t)$ dans $H^{2n}_{et}(X) \times H^{2n}_{dR}(\sigma X/\mathbb{C})$. C'est la classe du cycle algébrique $\Gamma \times_{k,\sigma} \operatorname{Spec} \mathbb{C}$. En particulier, elle est dans l'image de $H^{2n}_\sigma(X,\mathbb{Q})$, et sa dernière composante est de type (n,n). Ce calcul mène à la définition suivante.

Définition 16. *Soit $t \in H^{2n}_{et}(X) \times H^{2n}_{dR}(X/k)$. On dit que t est une classe de Hodge absolue si pour tout plongement σ de k dans $\mathbb{C}$, la classe $\sigma^*(t)$ est dans l'image de $H^{2n}_\sigma(X,\mathbb{Q})$ et sa dernière composante est de type (n,n).*

On ne sait pas si la dernière condition (sur le type de la classe de cohomologie) est impliquée par la première.

D'après ce qui précède, la conjecture de Hodge se scinde en deux parties.

Conjecture 17. *Sur une variété projective, toute classe de Hodge est absolue.*

Conjecture 18. *Toute classe de Hodge absolue est algébrique.*

Il est en général difficile de construire des classes de Hodge absolues sur une variété, et l'on ne dispose essentiellement d'aucun résultat général sur celles-ci. Pour cette raison, la deuxième partie de la conjecture ne semble pas aujourd'hui plus accessible que la conjecture de Hodge elle-même[3]. Cependant, la première partie de la conjecture est très intéressante, et aurait de nombreuses applications. En effet, c'est elle qui contient toute la partie arithmétique de la conjecture de Hodge. De manière plus précise, on

[3]Voir néanmoins la théorie des cycles motivés d'André, développée dans [1], qui ramène aux conjectures standards la preuve de la conjecture de Hodge pour la plupart des cycles de Hodge absolus que l'on sait construire.

peut construire une théorie des motifs en utilisant des classes de Hodge absolue qui est assez satisfaisante. On obtient ainsi une catégorie de motifs qui est tannakienne neutre et semi-simple, voir [13] et [21]. Cela permet, si l'on dispose de suffisamment de classes de Hodge absolues, d'appliquer de manière non conjecturale le yoga des motifs à des problèmes concrets. Le premier exemple se trouve dans [11], où Deligne prouve les conjectures de Weil pour les surfaces K3 en montrant que le motif d'une telle surface – au sens des classes de Hodge absolues – est découpé sur le motif d'une variété abélienne. Deligne montre plus tard dans [13] le théorème suivant.

Théorème 19. *Les classes de Hodge sur une variété abélienne sont absolues.*

Ce résultat a plusieurs applications concrètes, et permet en particulier de décrire entièrement l'effet de la conjugaison par un automorphisme du corps de base sur les variétés abéliennes à multiplication complexe, voir [18]. Deligne l'applique aussi à des questions de rationalité des valeurs de la fonction γ.

Ce type d'argument invite à essayer de comprendre mieux le comportement de la cohomologie d'une variété par conjugaison. Ainsi, la structure de Hodge n'a pas de raison de rester invariante : dès que l'on dispose d'un théorème de Torelli, elle détermine la classe d'isomorphisme de la variété. Par contre, si l'on admet la conjecture de Hodge, certaines propriétés de la structure de Hodge doivent rester invariante, comme la dimension de l'espace des classes de Hodge. On peut aussi se poser la question de la variation de la cohomologie de Betti à coefficients rationnels. Si les nombres de Betti sont invariants, puisque l'on peut les définir à l'aide de la cohomologie étale, on peut se demander ce qu'il advient de la structure d'algèbre. Après produit tensoriel par $\mathbb{Q}_l$, celle-ci ne change pas. J'ai obtenu le résultat suivant, qui s'inspire beaucoup des techniques utilisées par Voisin dans sa solution du problème de Kodaira.

Théorème 20. *(Charles, [10]) Il existe une variété algébrique X propre et lisse sur un corps de nombre k, et deux plongements de k dans $\mathbb{C}$, telle que les deux variétés complexes ainsi obtenues ont des algèbres de cohomologie réelle non isomorphes.*

A fortiori, les algèbres de cohomologie à coefficients rationnels ne sont pas isomorphes, ce qui donne une réponse à une question de Grothendieck (Montréal, 1970)[4]. La variété X est construite à partir de variétés abéliennes à multiplication complexe. En utilisant le théorème fondamental de la multiplication complexe, je peux montrer que la seule différence entre les cohomologies rationnelles des variétés conjuguées que je construis vient de la cohomologie réelle. L'orbite de la classe d'isomorphisme d'une variété abélienne à multiplication complexe sous l'action du groupe des automorphismes de son corps de définition est la plus grande qui soit possible sans faire apparaître de problème de passage du local au global. Il m'intéresserait de savoir si c'est un phénomène général.

Références

[1] Y. André, *Pour une théorie inconditionnelle des motifs*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., **83** (1996), pp. 5–49.

[2] Y. André, *Une introduction aux motifs (motifs purs, motifs mixtes, périodes)*, Panoramas et Synthèses, **17**, Société Mathématique de France, Paris, 2004.

[4] Serre a construit le premier dans [22] un exemple de variétés conjuguées qui ne sont pas homéomorphes.

[3] A. Andreotti et A. Mayer, *On period relations for abelian integrals on algebraic curves*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) **21** (1967), pp. 189–238.

[4] E. Artin, A. Grothendieck and J.-L. Verdier, *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas, Tome 3*, Lecture Notes in Mathematics **305**, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1973.

[5] M. F. Atiyah, F. Hirzebruch, *Analytic cycles on complex manifolds*, Topology **1** (1962), pp. 25–45.

[6] J. Bertin, J.-P. Demailly, L. Illusie, C. Peters, *Introduction à la théorie de Hodge*, Panoramas et Synthèses **3**, Société Mathématique de France, Paris, 1996.

[7] S. Bloch, *Semi-regularity and de Rham cohomology*, Invent. Math. **17** (1972), pp. 51–66.

[8] N. Buchdahl, *Algebraic deformations of compact Kähler surfaces*, Math. Z. **253**(2006), n. 3, pp. 453–459.

[9] E. Cattani, P. Deligne et A. Kaplan, *On the locus of Hodge classes*, J. Amer. Math. Soc. **8** (1995) n.2, pp. 483–506.

[10] F. Charles, *Conjugate varieties with distinct real cohomology algebras*, arXiv :0706.3674.

[11] P. Deligne, *La conjecture de Weil pour les surfaces K3*, Invent. Math. **15** (1972), pp. 206–226.

[12] P. Deligne et L. Illusie, *Relèvements modulo p^2 et décomposition du complexe de de Rham*, Invent. Math. **89** (1987), pp. 247-270.

[13] P. Deligne, J. Milne, A. Ogus, K. Shih, *Hodge cycles, Motives, and Shimura Varieties*, LNM 900, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1982.

[14] W. Fulton, *Intersection Theory*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3), 2, Springer-Verlag, Berlin, 1984.

[15] A. Grothendieck, *Standard conjectures on algebraic cycles*, Algebraic Geometry (Internat. Colloq., Tata Inst. Fund. Res., Bombay, 1968) pp. 193–199, Oxford Univ. Press, London.

[16] A. Grothendieck, *Hodge's general conjecture is false for trivial reasons*, Topology **8** (1969), pp. 299–303.

[17] J. Kollár, *Classification of irregular varieties*, edited by E. Ballico, F. Catanese, C. Ciliberto, LNM 1515, Springer-Verlag, Berlin-New-York, 1990.

[18] S. Lang, *Complex multiplication*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften **255**, Springer-Verlag, New York, 1983.

[19] E. Looijenga, *The period map for cubic fourfolds*, arXiv :0705.0951.

[20] D. Mumford, *Pathologies of modular surfaces*, Am. J. Math **83** (1961), pp. 339–342.

[21] A. A. Panchishkin, *Motives for absolute Hodge cycles*, Motives (Seattle, WA, 1991), pp. 461–483, Proc. Sympos. Pure Math. **55**, Part 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.

[22] J.-P. Serre, *Exemples de variétés projectives conjuguées non homéomorphes*, C. R. Acad. Sci. Paris **258** (1964), pp. 4194–4196.

[23] B. Totaro, *Torsion algebraic cycles and complex cobordism*, J. Amer. Math. Soc. **10** (1997), pp.467-493.

[24] C. Voisin, *Théorème de Torelli pour les cubiques de $\mathbb{P}^5$*, Invent. Math. **86** (1986), pp. 577–601.

[25] C. Voisin, *Théorie de Hodge et géométrie algébrique complexe*, Cours Spécialisés, 10, Société Mathématique de France, Paris, 2002.

[26] C. Voisin, *A counterexample to the Hodge conjecture extended to Kähler varieties*, IMRN **20** (2002, pp. 1057–1075.

[27] C. Voisin, *On the homotopy types of compact Kähler and complex projective manifolds*, Inventiones Math. **157**, n.2 (2004), pp. 329 - 343.

[28] *Géométrie des surfaces K3 : modules et périodes*, Papers from the seminar held in Palaiseau, October 1981–January 1982. Astérisque No. 126 (1985). Société Mathématique de France, Paris, 1985. pp. 1–193.