

Théorème de Jordan-Schönflies et Classification des surfaces en dimension 2

Guillaume MAILLARD, Guillaume CONCHON–KERJAN

13 juin 2014

Table des matières

1	Introduction	2
2	Préliminaires	2
2.1	Version faible du théorème de Jordan	2
2.1.1	Un peu de topologie	2
2.1.2	Définitions sur les graphes	3
2.1.3	Graphes et courbes	4
2.2	Complétons le théorème	6
2.2.1	Retour sur les graphes	6
2.2.2	Points accessibles	7
3	Prolongements d’homéomorphismes	8
3.1	Le théorème	8
3.2	Arc-accessibilité	10
4	Triangulation des surfaces	11
5	Classification	13
5.1	Opérations élémentaires	13
5.1.1	Caractère générateur des opérations	14
5.2	Groupes fondamentaux et théorème de Van Kampen	15
5.2.1	Somme connexe	15
5.2.2	Algèbre et Van Kampen	16
5.2.3	Interprétation avec des mots	17
5.2.4	Application : liens entre sommes connexes et opérations	18
5.3	Précisions sur les opérations génératrices	19
6	Conclusion	21
7	Annexe : programmes conçus	21
8	Bibliographie	25

1 Introduction

Dans ce mémoire, nous nous penchons sur le problème de la classification des surfaces compactes de dimension 2.

Notre approche débute par une partie topologique dans laquelle on démontre notamment le théorème de Jordan, stipulant qu'un lacet simple fermé du plan euclidien le partitionne en deux composantes connexes par arcs, l'intérieur et l'extérieur. Le raisonnement, relativement simple, s'appuie sur la théorie des graphes, dont le théorème de Kuratowski, qui donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'un graphe soit planaire.

Ce théorème peut se prolonger par celui de Jordan-Schönflies, qui affirme qu'un homéomorphisme entre deux lacets simples fermés peut être étendu au plan. Puis on définit une surface triangulable comme un espace topologique compact constitué de plusieurs polygones (lesquels peuvent être triangulés) dont on identifie les côtés par paires, et on montre un résultat fondamental : toute surface compacte est homéomorphe à une surface triangulable, grâce à ce théorème de Jordan-Schönflies.

On arrive alors à la classification à proprement parler des surfaces : toute surface est homéomorphe à S_k ou N_h , obtenues à partir de la sphère S^2 en itérant k fois l'opération "poignée inversée" ou h fois celle du "cross-cap". On montre que deux poignées inversées donnent un cross-cap, ce qui aide à prouver que toute surface se ramène effectivement à ces deux familles. Enfin, pour montrer que ces surfaces sont deux à deux non-homéomorphes, nous appliquons le théorème de Van Kampen en calculant leur groupe fondamental, ce qui relève de la topologie algébrique.

Note : pour les 3 sections suivantes, nous nous appuyons uniquement sur [1], [2] n'étant utile que dans la dernière partie.

2 Préliminaires

2.1 Version faible du théorème de Jordan

2.1.1 Un peu de topologie

Définition 1. On appelle un **arc simple** l'image d'une bijection continue f de $[0, 1]$ dans un espace topologique X . $f(0)$ et $f(1)$ sont les **extrémités** de l'arc. On dit que l'arc joint $f(0)$ à $f(1)$. Un **lacet simple fermé** vérifie de surcroît $f(0) = f(1)$. Un arc ou lacet fermé simple est **polygonal** si c'est l'union d'un nombre fini de segments.

Observons immédiatement un premier résultat important, qui permettra par la suite de supposer certaines courbes polygonales.

Lemme 2. Si U est un ouvert connexe de \mathbb{R}^n , alors deux quelconques points de U sont reliés par un arc simple polygonal dans U .

Démonstration. Soit $x \in U$, et $C_x \subset U$ l'ensemble des points que l'on peut relier à x par un tel arc. Il est ouvert : si $y \in C_x$, il existe une boule B_y de rayon non nul autour de y qui est clairement dans C_x . La concaténation de deux arcs simples polygonaux (en enlevant éventuellement les "branches en trop" qui font perdre l'injectivité) en

donne un nouveau, donc cette boule est incluse dans C_x . Et il est fermé : si (y_n) est une suite de points de C_x de limite y , de nouveau, il existe une boule $B_y \subset C_y$ contenant les y_n à partir d'un certain rang. Enfin, C_x non vide (il contient x) donc $C_x = U$, ce qui conclut. \square

Enfin, pour un lacet C , la composante connexe par arcs non bornée de $\mathbb{R}^2 \setminus C$ (il est assez simple de remarquer qu'il n'y en a qu'une seule) sera notée $ext(C)$, et l'union des autres $int(C)$. On a alors pour C polygonal : $\overline{int}(C) = C \cup int(C)$ et $\overline{ext}(C) = C \cup ext(C)$ (ceci se vérifie par une double inclusion rapide pour chacune des deux égalités).

2.1.2 Définitions sur les graphes

Définition 3. Un **graphe** G est constitué de deux ensembles finis, $S(G)$ et $A(G)$, appelés les sommets et arêtes, de sorte qu'à chaque arête soient associés deux sommets distincts, appelés les extrémités de l'arête. Un **sous-graphe** de G est défini comme on se l'imagine (ses arêtes et sommets sont dans G).

Définition 4. Un isomorphisme f entre deux graphes G et H est une bijection entre $S(G) \cup A(G)$ et $S(H) \cup A(H)$ qui à chaque sommet x de G associe un sommet $f(x)$ de H de sorte que $f(xy) = f(x)f(y)$.

Définition 5. Un **cycle** est un graphe de sommets distincts v_1, \dots, v_n dont les arêtes sont les $v_i v_{i+1}$ (i pris modulo n). En retirant $v_n v_1$, on obtient un **chemin**.

Définition 6. Si G est un graphe et $A \subset S(G) \cup A(G)$, alors $G - A$ est le graphe obtenu en retirant les sommets de A et les arêtes dont un de ces sommets est une extrémité.

Définition 7. G est connexe s'il existe un chemin entre toute paire de sommets, et 2-connexe si pour tout sommet v , $G - \{v\}$ est connexe.

Définition 8. Le graphe G peut être **dessiné** dans l'espace topologique X si on peut représenter chaque arête par un arc simple de sorte que deux arêtes aient au plus une extrémité en commun. Si $X = \mathbb{R}^2$, alors G est un **graphe planaire**, et un **graphe plan** Γ est une représentation de G .

Définition 9. Une **subdivision** de G est obtenue en remplaçant certaines arêtes par des chemins ayant les mêmes extrémités.

A partir de la subdivision, on peut construire l'"union" de deux graphes plans d'un certain type (l'union de deux graphes planaires donc "abstrait" étant celle que l'on s'imagine) :

Proposition 10. Si Γ_1 et Γ_2 sont deux graphes plans dont les arêtes sont polygonales, alors leur union Γ_3 l'est aussi.

Démonstration. On construit Γ'_1 et Γ'_2 des subdivisions de Γ_1 et Γ_2 tels que leurs arêtes soient des segments, et on rajoute un sommet à chaque graphe à chaque intersection d'un segment de Γ_1 et de Γ_2 . On obtient bien un graphe plan. \square

Enfin, pour le théorème de Kuratowski que nous effleurons, définissons un graphe bipartite :

Définition 11. $K_{x,y}$ est l'unique graphe (à isomorphisme près) constitué de $x + y$ sommets et xy arêtes tel que x sommets soient chacun relié aux y autres.

2.1.3 Graphes et courbes

Lemme 12. Si G est un graphe planaire, G peut être représenté dans le plan par un graphe Γ de sorte que les arêtes soient représentées par des arcs simples polygonaux.

Démonstration. Pour tout sommet s de Γ , on définit D_s un disque de centre s , de sorte qu'il n'intersecte que les arêtes issues de s , mais aucun autre disque $D_{s'}$. Pour toute arête ss' , on considère l'arc simple $A_{ss'}$ contenu dans ss' et n'ayant qu'un point d'intersection avec D_s et $D_{s'}$. En considérant un ouvert autour de $A_{ss'}$ n'intersectant aucune autre arête, on peut remplacer cet arc par un arc polygonal d'après le lemme 2. Et, on remplace $ss' \cap D_s$ par un segment, et de même avec $D_{s'}$. Il est clair que l'on obtient ainsi un graphe (aucune intersection d'arête hors les sommets) dont les arêtes sont des arcs simples polygonaux. \square

Nous arrivons alors à une version "faible" du théorème de Jordan, valable pour les lacets polygonaux.

Proposition 13. Théorème de Jordan "polygonal"

Si C est un lacet simple polygonal du plan, alors $\mathbb{R}^2 \setminus C$ a exactement deux composantes connexes (par arcs), leur frontière étant C .

Démonstration. Montrons que $\mathbb{R}^2 \setminus C$ a au plus deux composantes connexes : soit p_1, p_2, p_3 dans $\mathbb{R}^2 \setminus C$, et D un disque tel que $D \cap C$ soit un segment. Pour $1 \leq i \leq 3$, on peut relier p_i à D par un arc simple polygonal, donc au moins deux de ces trois points sont reliés par un arc.

Puis, montrons que $\mathbb{R}^2 \setminus C$ n'est pas connexe : pour tout $p \in \mathbb{R}^2 \setminus C$, on considère L une demi-droite issue de p . $L \cap C$ est constitué d'un nombre fini d'intervalles. Le nombre de fois où L "traverse" C (C entre et sort d'un intervalle d'intersection par des côtés différents de L) garde la même parité en changeant la direction de L . Il dépend donc uniquement de p et est appelé sa *parité*, et est ainsi invariant le long d'un arc polygonal. Par le lemme 2, les points d'une même composante connexe (par arcs) ont la même parité. Or, on peut trouver des points de parité différente en considérant une demi-droite intersectant C en un seul point. On obtient ainsi deux composantes connexes par arcs. \square

Continuons dans la lignée du lemme précédent :

Lemme 14. Soit C un lacet simple polygonal et P un arc simple polygonal dans $\overline{\text{int}}(C)$ n'ayant que ses extrémités s et s' en commun avec C . Soit P_1 et P_2 les deux arcs sur C joignant ces deux points. Alors $\mathbb{R}^2 \setminus (C \cup P)$ a exactement 3 composantes connexes par arcs, dont les frontières sont C , $C \cup P_1$ et $C \cup P_2$.

La démonstration est similaire à celle du lemme précédent (notamment pour montrer que $\text{int}(C)$ est constitué de deux composantes connexes par arcs).

Remarque 15. P intersecte n'importe quel arc simple polygonal dans $\overline{\text{int}}(C)$ dont les extrémités sont sur P_1 et P_2 (et différentes de s et s'). Cela serait encore vrai pour P dans $\overline{\text{ext}}(C)$ et un tel arc dans cette même région.

On va pouvoir montrer une partie d'un des deux sens de l'équivalence dans le théorème de Kuratowski :

Lemme 16. Kuratowski

Le graphe $K_{3,3}$ n'est pas planaire.

Démonstration. $K_{3,3}$ est un cycle $C : x_1x_2 \cdots x_6$, avec trois arêtes supplémentaires : x_1x_4 , x_2x_5 , x_3x_6 . Par le lemme 2, on peut dessiner le graphe avec des arcs simples polygonaux. C est un polygone et deux des trois arêtes supplémentaires sont dans $\overline{\text{int}}(C)$ ou $\overline{\text{ext}}(C)$. La remarque 15 implique alors que le graphe n'est pas planaire. \square

Enfin, on en déduit une partie du théorème de Jordan :

Proposition 17. *Si C est un lacet simple fermé du plan, alors $R^2 \setminus C$ n'est pas connexe par arcs.*

Démonstration. On suppose le contraire par l'absurde, et on construit un graphe plan isomorphe à $K_{3,3}$, le théorème de Kuratowski donnant la contradiction cherchée.

Soit L_1 (resp. L_2) une droite verticale (on suppose R^2 muni du repère habituel, et ce dans toute la suite de ce document) intersectant C en ses points d'abscisse minimale (resp. maximale), et p_i le point d'ordonnée maximale de $C \cap L_i$. Soit P_1 et P_2 les deux arcs de C d'extrémités p_1 et p_2 . Soit L_3 une droite verticale entre L_1 et L_2 , $L_3 \cap P_1$ et $L_3 \cap P_2$ sont des compacts disjoints, on peut donc trouver L_4 un intervalle de L_3 qui joint P_1 et P_2 en n'ayant que ses extrémités sur C . On construit un arc polygonal L_5 joignant p_1 et p_2 dans $\overline{\text{ext}}(C)$ (en prenant un segment sur L_i pour $i \leq 2$ et en les joignant par un autre segment). Si L_4 est dans $\overline{\text{ext}}(C)$, il existe L_6 dans $\overline{\text{ext}}(C)$ joignant L_4 et L_5 . $C \cup L_4 \cup L_5 \cup L_6$ serait alors un graphe plan isomorphe à $K_{3,3}$, ce qui permet de conclure. \square

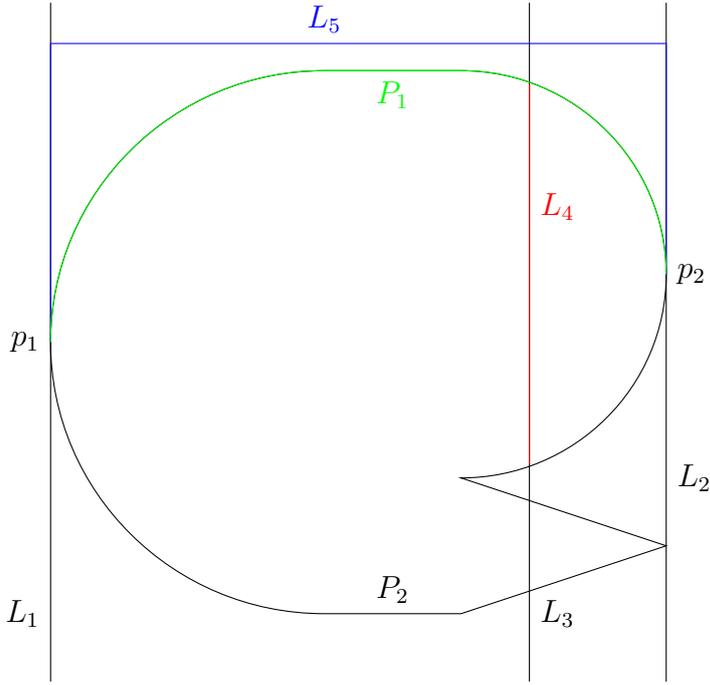


Figure 1.

2.2 Complétons le théorème

2.2.1 Retour sur les graphes

Commençons par un lemme qui permet d'étendre un graphe à un autre, très utile pour démontrer le théorème de Jordan-Schönflies (voir section 3).

Lemme 18. *Extension*

Si G est un graphe 2-connexe, et H est un sous-graphe 2-connexe, alors on peut obtenir G à partir de H en rajoutant successivement des chemins tels que chacun de ceux-ci joigne deux sommets du graphe déjà existant, les autres sommets étant en-dehors de celui-ci.

Démonstration. On raisonne par récurrence sur le nombre d'arêtes de $A(G) \setminus A(H)$. \square

Proposition 19. *Relation d'Euler*

Soit Γ un graphe plan 2-connexe, avec au moins 3 sommets, ses arêtes étant des arcs simples polygonaux. Alors $R^2 \setminus \Gamma$ possède $|S(\Gamma)| - |A(\Gamma)| + 2$ composantes connexes par arcs, ayant chacune un cycle de Γ pour frontière.

Démonstration. On raisonne de manière inductive : si Γ est un cycle, le résultat découle du théorème de Jordan polygonal. Sinon, on rajoute des chemins comme dans le lemme précédent, et le lemme 14 garantit le résultat : à chaque arête ajoutée dans une composante connexe, on obtient une composante de plus. \square

Définition 20. On appelle désormais **faces** ces composantes connexes par arcs. Celle non bornée sera la **face extérieure**, et sa frontière le **cycle extérieur**.

Établissons alors un petit résultat technique :

Lemme 21. *Soit $\Gamma_1, \dots, \Gamma_k$ des graphes plans 2-connexes dont toutes les arêtes sont des arcs simples polygonaux de sorte que $\Gamma_i \cap \Gamma_j \geq 2$ si $|i - j| = 1$, et $\Gamma_i \cap \Gamma_j = \emptyset$ sinon. Supposons de plus $\Gamma_1 \cap \Gamma_k = \emptyset$. Alors tout point situé sur la face extérieure de chaque $\Gamma_i \cup \Gamma_{i+1}$ ($i \neq k$) est également sur la face extérieure de $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 \cap \dots \cap \Gamma_k$.*

Démonstration. On raisonne par contraposée. Soit p un point dans une face bornée de $\Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_k$. Notons que ce graphe est 2-connexe, l'union de deux graphes 2-connexes (définition 10) ayant au moins 2 points communs étant toujours 2-connexe. D'après le lemme, il existe un cycle C de ce graphe tel que $p \in \text{int}(C)$. Choisissons-le de sorte que C soit dans $\Gamma_i \cup \dots \cup \Gamma_j$ avec $j - i$ minimal.

Si $j \geq i + 2$, parmi les cycles de $\Gamma_i \cup \dots \cup \Gamma_j$ ayant p dans leur intérieur, choisissons C tel que son nombre d'arêtes hors de Γ_{j-1} soit minimal. Il y en a au moins 2, puisque C intersecte Γ_{j-2} et Γ_j . Soit P un de ces deux, et P' un chemin avec un nombre minimal d'arêtes dans Γ_{j-1} entre P et $C \setminus V(P)$. Ses deux extrémités partagent C en deux arcs P_1 et P_2 . Un des cycles $P' \cup P_i$ contient p dans son intérieur, et a moins d'arêtes hors de Γ_{j-1} que C , ce qui contredit sa minimalité. Donc $j \geq i + 1$, ce qui conclut. \square

Proposition 22. *Si P est un arc simple du plan, $R^2 \setminus P$ est connexe par arcs.*

Démonstration. Soit p, q deux points de $R^2 \setminus P$ à distance $> 3d$ de P (avec $d > 0$ quelconque). On peut partitionner P en segments P_1, \dots, P_k tels que P_i joigne p_i à p_{i+1} et que tout point de P_i soit à distance au plus d de p_i . De plus, soit d' la distance minimale entre P_i et P_j pour $1 \leq i \leq j - 2 \leq k - 2$. Pour tout i , partitionnons P_i en $P_{i,1}, \dots, P_{i,k_i}$ de sorte que $P_{i,k}$ joigne $p_{i,k}$ à $p_{i,k+1}$, et que tout point de $P_{i,k}$ soit à distance au plus $d'/4$ de $p_{i,k}$.

Pour appliquer le lemme 21, on définit alors le graphe Γ_i qui est l'union des bords horizontaux et verticaux des carrés de centre $p_{i,j}$ et de côté $d'/2$. Ces graphes vérifient les hypothèses du lemme, et p et q sont sur la face extérieure de chaque $\Gamma_i \cup \Gamma_{i+1}$ (car ces graphes sont dans le disque de centre p_i et de rayon $3d$), donc p et q sont sur la face extérieure de $\Gamma_1 \dots \Gamma_k$, d'où le résultat. \square

2.2.2 Points accessibles

Définition 23. *Si C est un fermé de R^n et Ω une composante connexe par arcs de $R^n \setminus C$ qu'un point $p \in C$ est **accessible** depuis Ω s'il existe un arc simple pq tel que $pq \cap C = p$, et tous les autres points de pq sont dans Ω .*

Remarquons que si P est un arc de C contenant p dans son intérieur, d'après la proposition 22, $R^2 \setminus (C \setminus P)$ est connexe par arcs donc il existe P' un arc polygonal simple de q à une région de $R^2 \setminus C$ autre que Ω , donc qui intersecte P . P étant arbitrairement petit, l'ensemble des points de C accessibles depuis Ω est dense dans C . Ceci nous permet d'arriver au résultat suivant :

Théorème 24. Théorème de Jordan

Si C est un lacet simple fermé du plan, alors $R^2 \setminus C$ a exactement deux composantes connexes par arcs, chacune ayant C comme frontière.

Démonstration. Par la proposition 17, il suffit de montrer qu'il n'existe pas trois composantes connexes par arcs. Supposons par l'absurde qu'il en existe au moins 3, dont $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$, contenant q_1, q_2, q_3 . Soit Q_1, Q_2, Q_3 des arcs de C disjoints deux à deux. Par la remarque suivant la définition 24, Ω_i contient un arc simple polygonal de q_i vers Q_j . Quitte à les modifier un peu, on peut supposer $P_{i,j} \cap P_{i,j'} = \{q_i\}$. Et on voit que $P_{i,j} \cap P_{i',j'} = \emptyset$ pour $i \neq i'$. En rajoutant un segment dans chaque Q_i , on peut maintenant étendre l'union des arcs $P_{i,j}$ en un graphe plan isomorphe à $K_{3,3}$, contradiction.

Donc $R^2 \setminus C$ a précisément 2 composantes connexes par arcs, $int(C)$ et $ext(C)$. La proposition 23 permet de montrer que C est bien la frontière de $int(C)$ et de $ext(C)$. \square

Généralisons maintenant le lemme 14 :

Lemme 25. *Dans le lemme 14, il n'est pas nécessaire de supposer C polygonal.*

Démonstration. Comme dans le lemme 14, la partie difficile est de montrer que $\overline{int}(C)$ a au moins deux composantes connexes par arcs. Cela se fait de la même manière. \square

3 Prolongements d'homéomorphismes

3.1 Le théorème

Théorème 26. *Théorème de Jordan-Schönflies*

Si f est un homéomorphisme entre deux lacets simples fermés C et C' , alors f peut être étendu en un homéomorphisme du plan.

La démonstration de ce théorème se fait en étendant d'abord l'homéomorphisme de $\overline{int}(C)$ dans $\overline{int}(C')$, par construction de graphes en subdivisions successives dans ces deux régions, l'ensemble des sommets de ces graphes étant dense dans $int(C)$ et dans C (il faudra alors montrer que l'homéomorphisme s'étend bien par continuité). Nous avons alors besoin de :

Définition 27. *Si C et C' sont deux lacets fermés du plan et Γ, Γ' des graphes 2-connexes constitués de C (resp. C') et d'arcs simples polygonaux de $\overline{int}(C)$ (resp. $\overline{int}(C')$), Γ et Γ' sont dits **plan-isomorphes** s'il y a un isomorphisme entre eux tel qu'un cycle de Γ soit la frontière d'une face de Γ si et seulement si son image vérifie la même chose, et tel que le cycle extérieur de Γ soit envoyé sur celui de Γ' . L'isomorphisme est alors appelé **plan-isomorphisme**.*

Nous pouvons maintenant passer à la preuve du théorème :

Démonstration. Sans restriction, on peut supposer que C' est un polygone convexe. Soit B un ensemble dense dénombrable dans $int(C)$. La remarque faite juste avant le théorème de Jordan nous permet de dire qu'il existe un ensemble dénombrable $A \subset C$ de points accessibles depuis $int(C)$. Soit (p_n) une suite de points de $A \cup B$ où chaque point de cet ensemble apparaît une infinité de fois.

Soit Γ_0 un un graphe 2-connexe constitué de C et d'arcs simples polygonaux de $\overline{int}(C)$,

Γ'_0 un graphe constitué de C' et d'arcs simples polygonaux de $\overline{int}(C')$ tel qu'il existe g_0 un plan-isomorphisme entre les deux graphes, coïncidant avec f sur $C \cap S(\Gamma_0)$. On peut alors étendre f à $C \cup S(\Gamma_0)$ de sorte que f et g_0 coïncident sur $S(\Gamma_0)$.

Par récurrence, construisons $\Gamma_0, \dots, \Gamma_n, \dots$ et $\Gamma'_0, \dots, \Gamma'_n, \dots$ des graphes 2-connexes tels que si $n \geq 1$, alors $\Gamma_n^{(l)}$, constitué de $C^{(l)}$ et d'arcs simples polygonaux de $\overline{int}(C^{(l)})$, est une extension d'une subdivision de $\Gamma_{n-1}^{(l)}$, il existe g_n plan-isomorphisme entre Γ_n et Γ'_n coïncidant avec g_{n-1} sur $S(\Gamma_{n-1})$. Supposons de plus $\Gamma'_n \setminus C'$ connexe pour tout n . On étend alors f à $C \cup S(\Gamma_n)$ de sorte que f coïncide avec g_n sur $S(\Gamma_n)$. Supposons le rang $n - 1$, et considérons p_n .

- Si $p_n \in A$, soit P un arc simple polygonal joignant p_n à $q_n \in \Gamma_{n-1} \setminus C$ tel que $\Gamma_{n-1} \cap P = \{p_n, q_n\}$. On pose alors $\Gamma_n = \Gamma_{n-1} \cup P$. P est sur une face de Γ_{n-1} , dont la frontière est un cycle D . Pour obtenir Γ'_n , on ajoute à Γ'_{n-1} un arc simple polygonal P' dans la face dont $g_{n-1}(D)$ est la frontière, de sorte que P' joigne $f(p_n)$ à $g_{n-1}(q_n)$ (si q_n sommet de Γ_{n-1}) ou un point de $g_{n-1}(a)$ (si q_n est dans une arête a de Γ_{n-1}). On n'a plus qu'à poser $\Gamma'_n = \Gamma'_{n-1} \cup P'$, définir le plan-isomorphisme g_n de manière naturelle et étendre f de sorte que $f(q_n) = g_n(q_n)$.

- Si $p_n \in B$, on considère $C_1(p_n)$ le plus grand carré orienté dans le sens du repère orthonormé du plan ayant p_n pour centre et inclus dans $\overline{int}(C)$. On y trace $C_2(p_n)$ un carré orienté de même, chaque côté étant à distance au plus $1/2n$ d'un côté de $C_1(p_n)$. Dans ce carré, on trace des droites horizontales et verticales de sorte que chaque région ait un diamètre d'au plus $1/2n$, et que p_n soit sur une corde verticale et une corde horizontale. On définit H_n comme l'union de Γ_{n-1} et des nouvelles cordes horizontales et verticales, en rajoutant des arcs simples polygonaux dans $\overline{int}(C)$ de sorte que H_n soit 2-connexe et $H_n \setminus C$ connexe. Le lemme 18 d' "extension" garantit que H_n peut être obtenu depuis Γ_{n-1} en ajoutant successivement des chemins sur les faces. On rajoute ces chemins sur Γ'_{n-1} pour obtenir H'_n plan-isomorphe à H_n . On rajoute à H'_n des cordes horizontales et verticales dans $\overline{int}(C')$ pour obtenir un graphe dont les faces bornées ont un diamètre d'au plus $1/4n$. Quitte à déplacer un peu ces lignes, on peut supposer qu'elles intersectent C' seulement en des points de $f(A)$, les régions ayant un diamètre d'au plus $1/2n$, chacune de ces cordes intersectant H'_n un nombre fini de fois : on choisit ce nouveau graphe pour Γ'_n . On rajoute des arcs simples polygonaux à H_n pour obtenir Γ_n , plan-isomorphe à Γ'_n . Encore une fois, la possibilité de telles constructions relativement lourdes est donnée par le lemme d'extension. On prolonge alors f à $C \cup \Gamma_n$, de sorte que f et g_n coïncident sur $S(\Gamma_n)$.

On étend f en une bijection entre $E := C \cup S(\Gamma_0) \cup \dots \cup S(\Gamma_n) \cup \dots$ et $E' := C' \cup S(\Gamma'_0) \cup \dots \cup S(\Gamma'_n) \cup \dots$. Ces ensembles sont denses dans $\overline{int}(C^{(l)})$. On s'intéresse à un point p où f n'est pas encore définie.

- Si $p \in int(C)$, soit (x_n) une suite de $S(\Gamma_0) \cup \dots \cup S(\Gamma_n) \cup \dots$ convergeant vers p . Soit (p_n) une suite dans B telle que si p est à distance d de C , p_n est à distance au plus $d/4$ de p . Pour n assez grand, p est dans $C_1(p_n)$ et $C_2(p_n)$. Par construction de Γ_n et Γ'_n , il existe un cycle S de Γ_n tel que $p \in int(S)$, et que S et $g_n(S)$ soient de rayon au plus $1/2n$. Or f envoie $E \cap int(S)$ sur $int(g_n(S))$ et $F \cap ext(S)$ sur $ext(g_n(S))$. En particulier, $f(x_m)$ est dans $int(g_n(S))$ à partir d'un certain rang, donc cette suite est de Cauchy et converge. En posant $f(p) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n)$, f est bien définie. Et f envoie $int(S)$ dans $int(g_n(S))$ d'où la continuité dans $int(C)$. On montre de même que f

envoie $\text{int}(C)$ dans $\text{int}(C')$, est bijective et d'inverse continu.

• Si $p \in C$, il suffit de considérer (x_n) dans $\text{int}(C)$ comme avant (eut égard à la définition initiale de f). Supposons que $(f(x_n))$ ne converge pas vers $f(p)$. La compacité de $\overline{\text{int}(C)}$ permet de supposer que $(f(x_n))$ converge vers $p' \neq p$. f^{-1} étant continue sur $\text{int}(C')$, $p' \in C'$. Par densité de $f(A)$ dans C' , on peut prendre y_1, y_2 dans A tels que $f(y_1)$ et $f(y_2)$ soient chacun sur un des deux arcs de C' entre p' et $f(p)$. Il existe n tel que Γ_n ait un chemin entre q_1 et q_2 n'ayant que ces 2 points sur C . D'après le lemme 25, P sépare $\text{int}(C)$ en deux composantes connexes par arcs, envoyées par f sur les deux composantes connexes par arcs de $\text{int}(C') \setminus g_n(P)$. L'une d'elles contient les $f(x_n)$ à partir d'un certain rang, et l'autre $f(p)$ sur sa frontière non commune avec la première composante connexe par arcs. On ne peut alors avoir $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = p'$, contradiction. On en déduit la continuité de f sur C (et donc celle de f^{-1} par compacité de $\overline{\text{int}(C)}$).

Le raisonnement s'adapte pour étendre f à $\text{ext}(C)$. □

3.2 Arc-accessibilité

Définition 28. Si F est un fermé du plan, on dit qu'un point $p \in F$ est **arc-accessible** si pour tout $q \in \mathbb{R}^2 \setminus F$, il existe un arc simple de p à q n'intersectant F qu'en P .

En particulier, le théorème de Jordan-Schönflies stipule que tout point d'un lacet simple fermé est arc-accessible. On obtient ici une extension d'une partie de l'énoncé du théorème de Jordan :

Corollaire 29. Si F est un fermé du plan avec au moins 3 points arc-accessibles, alors $\mathbb{R}^2 \setminus F$ a au plus 2 composantes connexes par arcs.

Démonstration. Soit p_1, p_2, p_3 des points arc-accessibles de F . Si q_1, q_2, q_3 sont dans différentes composantes connexes par arcs de $\mathbb{R}^2 \setminus F$, alors comme dans la démonstration du théorème de Jordan, on construit un graphe plan isomorphe à $K_{3,3}$ de sommets $p_1, p_2, p_3, q_1, q_2, q_3$. □

On peut s'amuser à trouver (rapidement) un contre-exemple à l'énoncé où l'on suppose seulement qu'il y a deux points arc-accessibles. Voici maintenant un corollaire du théorème de Jordan-Schönflies pour les graphes :

Corollaire 30. Soit Γ, Γ' deux graphes 2-connexes et g un homéomorphisme et plan-isomorphisme entre ces deux graphes. Alors g peut être étendu en un homéomorphisme du plan.

Démonstration. Montrons-le par récurrence sur le nombre d'arêtes de Γ . Si c'est un cycle, on est ramené au théorème de Jordan-Schönflies. Sinon, d'après le lemme d'extension, il existe P un chemin dans Γ et Γ_1 un sous-graphe 2-connexe contenant le cycle extérieur de Γ tel que Γ soit obtenu de Γ_1 en rajoutant P dans $\overline{\text{int}(C)}$, où C est frontière de Γ_1 . On applique alors l'hypothèse de récurrence à Γ_1 , puis aux deux cycles de $C \cup P$ contenant P . □

4 Triangulation des surfaces

On considère un nombre fini de polygones convexes deux à deux disjoints, tous les côtés étant de même longueur. On construit un espace topologique (compact) S en identifiant chaque côté d'un polygone avec exactement un côté d'un polygone (éventuellement le même). Ceci définit un graphe G dont les sommets sont les coins et les arêtes, les côtés.

Définition 31. On dit que G est une **représentation 2-cellulaire** de S lorsque S est une surface S connexe (à savoir localement homéomorphe à un disque en tout sommet s de G ; hors les sommets, l'homéomorphisme est clair).

Définition 32. Si tous les polygones sont des triangles, on dit que G est une **triangulation** de S et que S est une **surface triangulée**.

Dans ce dernier cas, on supposera désormais avoir au moins 4 triangles et pas d'arête multiple.

Nous arrivons à un résultat fondamental pour classifier les surfaces, qui découle principalement d'un des corollaires du théorème de Jordan-Schönflies :

Théorème 33. Toute surface S est homéomorphe à une surface triangulée.

Notons qu'on sous-entend ici qu'une surface est connexe et compacte.

Démonstration. Étant donné qu'on peut toujours trianguler l'intérieur d'un polygone convexe, il suffit de montrer que S est homéomorphe à une surface admettant une représentation 2-cellulaire. Pour tout point $p \in S$, on considère $D(p)$ un disque du plan homéomorphe à un voisinage de p dans S (les homéomorphismes correspondant à deux points différents ne sont pas nécessairement "compatibles", ce qui va générer quelques complications). De plus, dans $D(p)$, on dessine deux quadrilatères $Q_1(p)$ et $Q_2(p)$ tels que $p \in \text{int}(Q_1(p)) \subset \text{int}(Q_2(p))$, et qu'on puisse "intercaler" un carré $Q_3(p) \subset \text{int}(Q_2(p))$, avec $Q_1(p) \subset \text{int}(Q_3(p))$. S étant compact, il existe p_1, \dots, p_n tels que

$$S = \bigcup_{i=1}^n \text{int}(Q(p_i)). \quad (1)$$

On peut supposer les $D(p_i)$ disjoints, mais on va modifier l'homéomorphisme entre les voisinages des p_i et ces disques, en montrant notamment qu'on peut choisir les $Q_1(p_i)$ de sorte qu'ils forment une représentation 2-cellulaire de S .

Par récurrence sur k , supposons $Q_1(p_1), \dots, Q_1(p_{k-1})$ construits de sorte qu'ils n'aient deux à deux qu'un nombre fini de points communs sur S et regardons $Q_2(p_k)$, dans $D(p_k)$: l'homéomorphisme n'étant encore une fois pas a priori le même que celui donnant les $D(p_i), i < k$, les $Q_1(p_i)$ sont seulement des lacets simples fermés. On appelle *mauvais arc* un arc de $Q_1(p_i)$ ($i \leq k-1$) qui relie deux points de $Q_2(p_k)$ et dont tous les autres points sont dans $\text{int}(Q_2(p_k))$. Soit $Q_3(p_k)$ un carré entre $Q_1(p_k)$ et $Q_2(p_k)$. Un mauvais arc est dit *très mauvais* lorsqu'il intersecte ce carré. Il ne peut y avoir une infinité de très mauvais arcs. En effet, pour tout $i < k$, $Q_1(p_i)$ est l'image de $[0, 1]$ par une fonction (uniformément) continue. Soit $\varepsilon > 0$ la distance entre $Q_3(p_k)$ et $Q_2(p_k)$,

un très mauvais arc est de longueur au moins 2ε , donc image d'un intervalle de taille au moins δ (δ d'uniforme continuité), et deux très mauvais arcs ne coïncident qu'au plus en une extrémité, donc il en va de même pour les intervalles représentés.

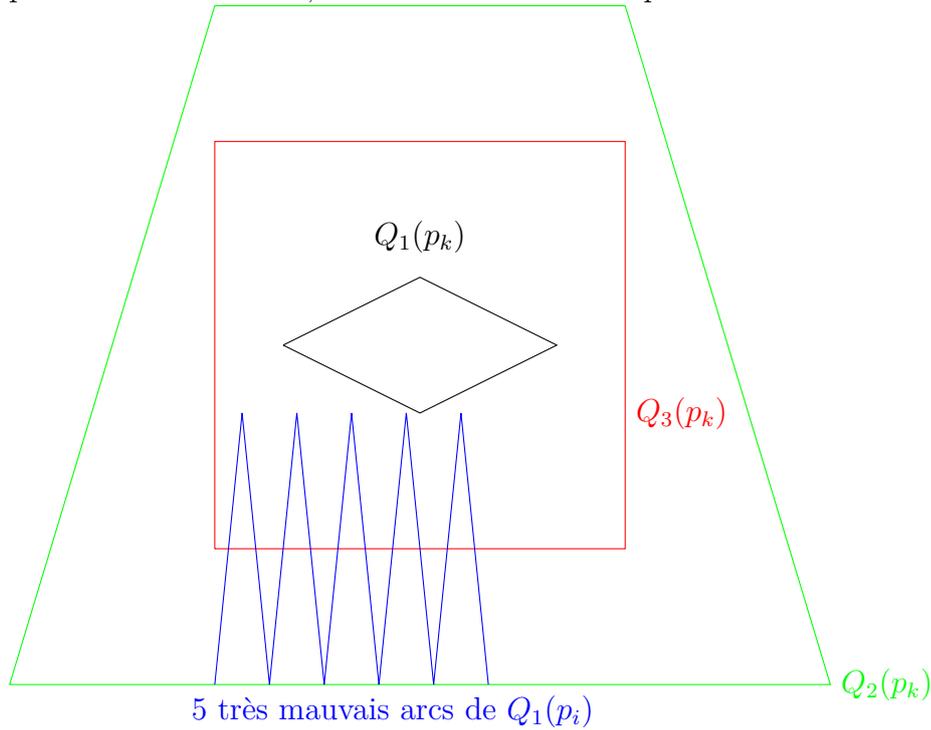


Figure 2.

L'ensemble des très mauvais arcs avec $Q_2(p_k)$ forment un graphe 2-connexe Γ que l'on redessine en Γ' dans $Q_2(p_k)$, plan-isomorphe à Γ , et dont les arêtes sont des arcs simples polygonaux (ceci est possible grâce au lemme d'extension). Le corollaire 30 permet d'étendre l'isomorphisme à un homéomorphisme de $\overline{\text{int}}(Q_2(p_k))$ qui fixe ce quadrilatère. $Q_1(p_k)$ et $Q_3(p_k)$ sont transformés en $Q'_1(p_k)$ et $Q'_3(p_k)$ avec $p_k \in \text{int}(Q'_1) \subset \text{int}(Q'_3)$. On peut alors prendre un lacet fermé polygonal Q''_3 dans $\text{int}(Q_2)$ tel que $Q'_1 \subset \text{int}Q''_3$ (pour conserver (1)) et les seuls mauvais arcs intersectés par Q''_3 sont les très mauvais. En effet, il n'existe qu'un nombre fini de mauvais arcs à distance $< \varepsilon$ de Q'_3 , pour un certain $\varepsilon > 0$ (prendre une courbe autour de Q'_3 dans $\text{int}(Q_2)$ et appliquer le raisonnement montrant qu'il n'y a qu'un nombre fini de mauvais arcs), donc en prenant Q''_3 assez proche de Q'_1 et en appliquant le lemme 2, on a la courbe désirée.

En redessinant $\Gamma' \cup Q''_3$ avec le corollaire 30, Q''_3 est en fait un quadrilatère avec Q'_1 dans son intérieur. En prenant Q''_3 comme nouveau $Q_1(p_k)$, l'hypothèse de récurrence est bien vérifiée.

Ainsi, il n'y a bien qu'un nombre fini de très mauvais arcs dans chaque $Q_2(p_k)$ et on peut supposer qu'ils sont des arcs simples polygonaux formant un graphe 2-connexe.

On peut concevoir $\bigcup_{i=1}^n Q_1(p_i)$ comme un graphe Γ dessiné sur S . Chaque composante connexe par arcs de $S \setminus \Gamma$ a pour frontière un cycle C de Γ , C pouvant être pris comme lacet fermé polygonal dans un $Q_2(p_i)$. On peut dessiner un polygone convexe C' de côtés de même longueur, dont les coins correspondent aux sommets de C . L'union des C' forme S' , une surface avec une représentation 2-cellulaire Γ' isomorphe à Γ .

L'isomorphisme peut s'étendre en un homéomorphisme f entre Γ et Γ' . En particulier, un cycle C défini plus haut est envoyé sur C' , et par le théorème de Jordan-Schönflies on peut étendre f en un homéomorphisme entre $\overline{\text{int}}(C)$ et $\overline{\text{int}}(C')$, ce qui définit alors un homéomorphisme entre S et S' . \square

Dans toute la section suivante, on utilisera donc le fait qu'à toute surface S , on peut associer une représentation 2-cellulaire G , dont on peut supposer les faces triangulaires.

5 Classification

5.1 Opérations élémentaires

On définit ici les opérations permettant d'obtenir les surfaces dont il était question dans le résumé, en partant de S_0 . On le fait à base de triangles (les surfaces étant triangulables), choisis à des endroits arbitraires des surfaces (on raisonne à homéomorphisme près).

Définition 34. On appelle *poignée* l'opération consistant à découper deux triangles disjoints sur une surface S et de les identifier avec les orientations opposées.

Définition 35. On appelle *poignée inversée* une poignée où l'orientation des deux triangles n'est pas inversée.

Définition 36. On appelle "*crosscap*" l'opération consistant à retirer un triangle d'une surface et identifier les points "diamétralement opposés" (on parcourt le triangle le long d'une abscisse continue).

Et enfin, en généralisant la poignée :

Définition 37. On appelle *somme connexe* de deux surfaces la surface obtenue en découplant un triangle dans chacune de ces surfaces et de les identifier (avec les orientations opposées). La somme connexe de A et B sera notée $A\#B$.

Remarque 38. Les opérations précédentes sont bien définies : à homéomorphisme près, les surfaces obtenues ne dépendent pas des triangles choisis.

Démonstration. On peut en effet envoyer par un hoéomorphisme un triangle (ou une paire de triangles) sur un(e) autre, dans un voisinage connexe par arcs contenant ces triangles (ce voisinage pouvant être choisi comme une suite de triangles adjacents, chacun ayant exactement une arête commune avec ses deux voisins, par triangularisation de la surface). \square

On notera alors $Poignée(S)$, $Poignée - inversée(S)$ et $Crosscap(S)$ les surfaces obtenues à partir de S . Notons que pour un crosscap, il suffit de regarder un lacet simple polygonal (plutôt qu'un triangle), qui est homotope à un point.

5.1.1 Caractère générateur des opérations

Théorème 39. *Toute surface S est homéomorphe à une surface obtenue à partir de la sphère en appliquant un nombre fini de fois les opérations élémentaires suivantes : poignée, poignée inversée et crosscap.*

Quelques résultats avant de passer à la démonstration :

Lemme 40. *Soit S une surface et G une représentation 2-cellulaire avec s sommets, a arêtes et f faces. On peut trianguler S , ce qui donne un nouveau graphe G' (s' sommets, a' arêtes, f' faces), de sorte que $s' - a' + f' = s - a + f$.*

Démonstration. Considérons une face F de G , qui est un polygone convexe s_1, \dots, s_q ($q \geq 4$, indices exprimés modulo q). On rajoute à l'intérieur de ce polygone un polygone convexe u_1, \dots, u_q . On trace les arêtes $u_i s_i$ et $u_i s_{i+1}$. Puis on prend un point u dans l'intérieur de $u_1 \dots u_q$ et on trace les arêtes $u_i u$. On a bien triangulé F . On a $s' = s + q + 1$, $a' = a + 4q$, $f' = f + 3q - 1$, donc $s' - a' + f' = s - a + f$. On recommence avec toutes les faces non triangulaires de G (il y en a un nombre fini), et on obtient G' désiré. \square

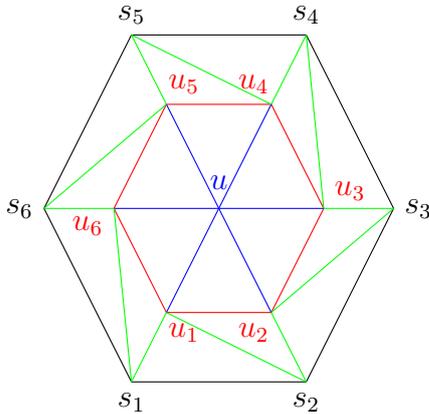


Figure 3.

Lemme 41. *Soit S une surface et G une représentation 2-cellulaire avec s sommets, a arêtes et f faces. Alors $s - a + f \leq 2$.*

Démonstration. On détruit successivement des arêtes de G jusqu'à obtenir un arbre H (un graphe connexe avec un nombre minimal d'arêtes, soit $s - 1$, il est clair qu'un tel sous-graphe de G existe). H possède $s' = s$ sommets, $a' = s - 1$ arêtes et $f' = 1$ face. Pour obtenir G , à chaque arête ajoutée on rajoute au plus 1 région (voir lemme 14), donc $s - a + f \leq s' - a' + f' = 2$. \square

Ces deux résultats permettent de justifier l'utilisation que nous faisons du principe de l'extremum dans la preuve du théorème.

Démonstration. Par l'absurde, supposons que S soit un contre-exemple au théorème 39, et G une représentation 2-cellulaire : on peut supposer que G est une triangulation avec :

- (1) $2 - s + a - f$ minimal
- (2) s minimal (pour (1) vérifié)
- (3) la valence minimale de G est minimale (pour (1) et (2) vérifié; la **valence** d'un sommet étant le nombre d'arêtes qui en partent)

Soit s un sommet de valence minimale m , et s_1, \dots, s_m les sommets voisins de s : les faces incidentes à s sont les $ss_i s_{i+1}$ (i modulo m). Il n'y a qu'une arête entre v_1 et v_m , donc $m \geq 3$. Si $m = 3$, $G - \{s\}$ est une triangulation de G pour $n > 4$, donc on contredit (2). Si $n = 4$, on a affaire à un tétraèdre, homéomorphe à S_0 . Donc $m \geq 4$. Si pour un certain i , $v_i v_{i+2}$ n'existe pas, on peut rajouter cette arête et supprimer $v_i v_{i+1}$: $s - a + f$ et s sont conservés, et m diminue, contredisant (3). Donc on peut supposer que toutes les arêtes $v_i v_{i+2}$ sont tracées.

Soit M l'espace topologique formé par les triangles du plan qui donnent S , avec l'identification des côtés par paires, en supprimant les identifications des six côtés donnant les arêtes vv_1 , vv_3 et $v_1 v_3$. Appelons-les **côtés frontaliers** de M . Si C est le graphe dont les arêtes sont ces côtés et les sommets ceux des triangles, C de valence 2. Donc G' est l'union de deux triangles disjoints ou un hexagone.

- Si C est l'union de deux triangles disjoints, on rajoute à M deux triangles (et leur intérieur), dont on identifie les côtés avec ceux de C , et on obtient ainsi une surface S' triangulée par G' (construit comme G pour les côtés auxquels on n'a pas touché). Et on a $s' - a' + f' = s - a + f + 2$ (on rajoute 3 sommets, 3 arêtes et 2 faces. Donc par (1), S' est obtenue (à homéomorphisme près) depuis S_0 en utilisant les trois opérations élémentaires décrites plus haut. Or on passe de S' à S par une poignée (éventuellement inversée), ce qui contredit le fait que S est un contre-exemple au théorème.

- Si C est un hexagone, on rajoute à M un hexagone (avec son intérieur, que l'on triangule), et on identifie ses côtés avec ceux de C . On obtient une surface S'' , avec une triangulation G'' vérifiant $s'' - a'' + f'' = s - a + f + 1$ (on ajoute 6 sommets, 6 arêtes et une face), donc par (1), S'' est obtenue depuis S_0 par les trois opérations élémentaires. Or, pour passer de S'' à S , on utilise un crosscap. On conclut comme précédemment. □

5.2 Groupes fondamentaux et théorème de Van Kampen

Nous nous écartons maintenant de [1] pour montrer (en utilisant [2]) que l'on peut réduire encore l'ensemble des surfaces auxquelles on peut toujours se ramener par homéomorphisme. À cette fin, nous utilisons un peu de topologie algébrique.

5.2.1 Somme connexe

Proposition 42. *La somme connexe est commutative et associative. De plus, S_0 est un élément neutre.*

Démonstration. La commutativité et l'associativité se vérifient rapidement.

S_0 est homéomorphe à un tétraèdre, et remplacer, sur une surface S , un triangle par un tétraèdre privé d'un triangle donne une surface homéomorphe à S (le tétraèdre privé d'une face étant homéomorphe à un triangle) □

On peut ainsi définir et noter déceimment $A^{\#n}$ la somme connexe de A avec lui-même faite n fois.

5.2.2 Algèbre et Van Kampen

Définition 43. On appelle **abélianisé** d'un groupe G le quotient $G/[G, G]$, où $[G, G]$ est le sous-groupe des commutateurs (engendré par les $aba^{-1}b^{-1}$ pour $a, b \in G$). On le note $Ab(G)$.

Définition 44. Soient G_1, G_2, H des groupes, et $f_i : H \rightarrow G_i$ des morphismes de groupe ($i = 1, 2$). On appelle **somme amalgamée** de G_1 et G_2 au-dessus de H le groupe $G_1 * G_2 / N$, où N est le sous-groupe normal engendré par les éléments $f_1(h)f_2(h)^{-1}$, h parcourant H . Il est noté $G_1 *_H G_2$.

Nous utilisons le théorème suivant :

Théorème 45. Théorème de (Seifert et) Van Kampen

Soit U, V deux ouverts connexes par arcs recouvrant un espace topologique X , de sorte que $U \cap V$ soit également connexe par arcs. Alors :

$$\pi_1(X) = \pi_1(U) *_{\pi_1(U \cap V)} \pi_1(V)$$

l'égalité étant à prendre au sens d'isomorphe. Nous ne le démontrons pas ici (cela est fait dans [2]). Observons deux résultats nécessaires pour la suite.

Lemme 46. $\pi_1(\mathbb{R}P^2) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

Démonstration. On considère un recouvrement de $\mathbb{R}P^2$ par deux ouverts U et V : U est l'ensemble des droites intersectant la demi-sphère supérieure dans R^3 , il s'identifie naturellement à la demi-sphère supérieure. V est l'ensemble des droites faisant un angle $< \varepsilon$ avec le plan horizontal H . V se rétracte en $\mathbb{R}P^1$ par l'homotopie $r(s, x) = p_H(x) + s((Id - p_H)(x))$, p_H étant la projection sur H . Donc $\pi_1(V) = \pi_1(\mathbb{R}P^1)$. $U \cap V$ s'identifie naturellement au ruban $\{(x, y, z) \in S^2 \mid 0 < z < \tan \varepsilon\}$ qui se rétracte en le cercle. $\pi_1(U \cap V) = \langle y \rangle$ avec y lacet simple autour de x .

D'après le théorème de Van Kampen, $\pi_1(\mathbb{R}P^2)$ est isomorphe à $(e * \pi_1(\mathbb{R}P^1)) / \langle \phi_1(y)\phi_2(y)^{-1} \rangle$ où ϕ_1 et ϕ_2 envoient canoniquement $\pi_1(U \cap V)$ respectivement dans $\pi_1(U)$ et $\pi_1(V)$.

Le cercle est homéomorphe à $\mathbb{R}P^1$: on identifie S^1 à $[0, 1]$ (avec 0 et 1 identifiés) et on considère l'application $\gamma : t \rightarrow e^{i\pi t}$. Les groupes fondamentaux sont donc isomorphes et un générateur de $\pi_1(\mathbb{R}P^1)$ est l'application γ ci-dessus (vue maintenant comme un lacet de $\mathbb{R}P^1$).

Comme U est simplement connexe, $\phi_1(x) = e$ pour tout $x \in U$. On a donc $\phi_2(y) = e$ dans $\pi_1(\mathbb{R}P^2)$. Or $y = \gamma^2$ dans $\pi_1(V)$ donc $\phi_2(\gamma^2) = \phi_2(\gamma)^2 = e$. On n'a pas $\phi_2(\gamma) = e$ car γ n'est pas un lacet dans $U \cap V$. Donc aucun y ne vérifie $\phi_2(\gamma) = \phi_2(y)$. \square

Lemme 47. $\pi_1(T^2) = \mathbb{Z}^2$

Démonstration. T^2 est défini comme $S^1 \times S^1$, et $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$, le résultat en découle. \square

5.2.3 Interprétation avec des mots

Passons maintenant à un intermède sur les mots, d'après [2], une manière de retranscrire et visualiser plus aisément certaines propriétés des groupes fondamentaux. On fait notamment le lien avec les triangulations des surfaces.

On considère une surface S triangulée. On associe à chaque arête (donc chaque paire de côtés) une lettre l_i . On prend un triangle de départ T_0 . On colle un triangle dont un côté est identifié avec un côté de T_0 . On prend un autre triangle de même que l'on colle selon un côté, etc. , jusqu'au dernier triangle (S est connexe). On obtient alors un polygone. Regardons son bord : on décide d'une orientation (disons, trigonométrique), d'un point de départ sur le bord, et on lit les lettres dans le sens choisi, en parcourant le bord. On lit l_i^{-1} lorsque l'orientation du côté est contraire à celle choisie. On concatène l'ensemble des caractères successivement obtenus.

Définition 48. *L'objet obtenu est appelé **mot** associé à la surface S , noté $m(S)$. Il n'est a priori pas unique (on peut prendre un autre point de départ, ou changer l'orientation).*

Définition 49. *Si deux mots, ou leurs polygones, correspondent à des surfaces homéomorphes, on dit qu'ils sont **équivalents**. La relation d'équivalence est notée \sim .*

Proposition 50. $m(S_1).m(S_2) \sim m(S_1 \# S_2)$ où « \cdot » désigne la concaténation, S_1 et S_2 des surfaces.

Et si A, B, C, \dots sont des suites de lettres formées à partir de côtés (d'une même surface), a, b, c, \dots des lettres associées à des côtés :

- $Aaa^{-1}B \sim AB$,
- $AaBaC \sim CAB^{-1}d^2$,
- $AaBbCac^{-1} \sim BADCdcd^{-1}c^{-1}$,
- $A(aba^{-1}b^{-1})Bcc \sim B^{-1}f^2e^2A^{-1}g^2$.

Démonstration. Le deuxième point se voit assez bien, le premier en découle (on colle les polygones de chaque surface selon un disque tangent au bord de chacun des deux polygones, on lit $m(S_1)$, puis m la lettre du disque, puis m^{-1} puis $m(S_2)$). Pour la suite, on s'appuie sur des schémas : on coupe et on recolle selon des paires de côtés identifiés pour rester dans la même classe d'équivalence.

Première formule :

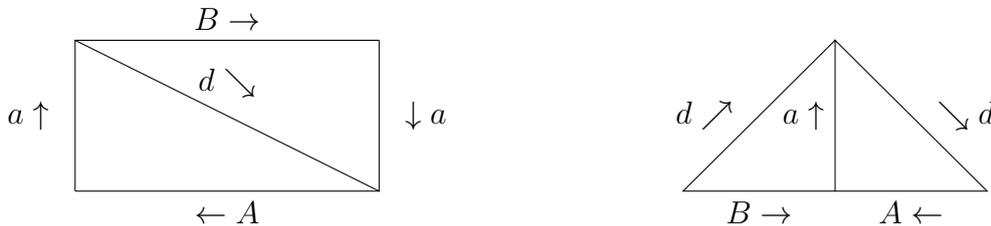


Figure 4 : on peut concaténer C et A en changeant le point de départ, puis on construit et coupe selon d , on recolle sur a .

Deuxième formule :

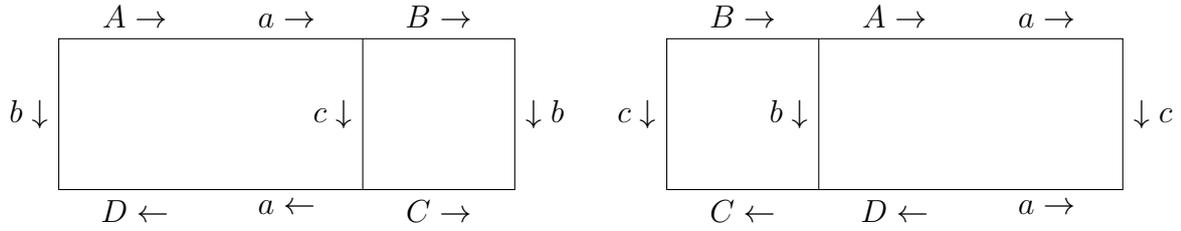


Figure 5 : élimination de b , création de et coupure sur c , collage sur b .

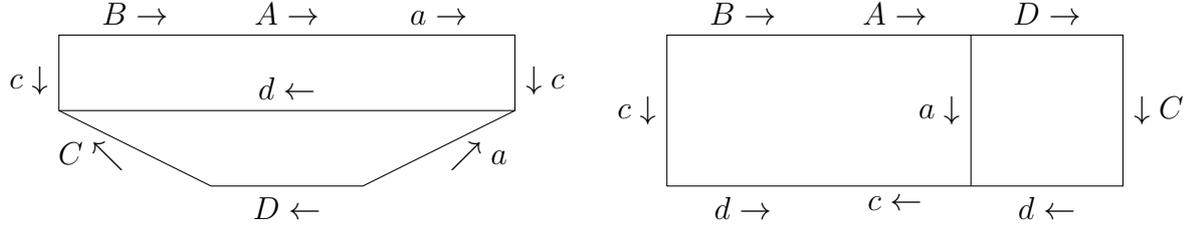


Figure 6 : création de et coupure sur d , collage sur a .

Le dernier point se montre de manière semblable, en appliquant l'antépénultième notamment.

5.2.4 Application : liens entre sommes connexes et opérations

Proposition 51. $(\mathbb{R}P^2)^{\#3}$ est homéomorphe à $T^2 \# \mathbb{R}P^2$

Démonstration. Cela se fait schématiquement avec des mots, en utilisant la propriété précédente, notamment le dernier point. \square

De plus, nous avons conçu un programme à partir de cette construction de mots, qui permet d'obtenir les quelques résultats suivants :

Lemme 52. Une poignée sur S_0 donne T^2 , un crosscap sur S_0 donne $\mathbb{R}P^2$, une poignée inversée sur S_0 ou deux crosscaps sur S_0 donnent la bouteille de Klein.

Démonstration. Il n'y a donc "pas vraiment" de démonstration ici. Les fonctions programmées sont jointes en annexe. \square

On en déduit une propriété importante pour expliquer ce que font les trois opérations définies en ouverture de cette section :

Proposition 53. Pour une surface S , $Poignée(S) = S \# T^2$, $Crosscap(S) = S \# \mathbb{R}P^2$.

Démonstration. On a $Poignée(S) = Poignée(S \# S_0) = S \# Poignée(S_0) = S \# T$ et $Crosscap(S) = S \# \mathbb{R}P^2$. En effet, d'après la remarque 38, on peut "pratiquer" la poignée ou le crosscap où on le souhaite sur la somme connexe. \square

5.3 Précisions sur les opérations génératrices

Le lemme 52 et la proposition 51 permettent de réduire fortement les classes de surfaces homéomorphes obtenues par le théorème 39, et d'améliorer celui-ci. Ainsi :

Théorème 54. *Soit S une surface et G une représentation 2-cellulaire de S à s sommets, a arêtes et f faces. Alors S est homéomorphe à S_n ou N_k avec $s - a + f = 2 - 2n = 2 - k$.*

Démonstration. D'après le lemme 52 et le théorème 39, une surface est obtenue à partir de S_0 en appliquant des poignées et des crosscaps. Et, par la proposition 51, si on opère au moins un crosscap et une poignée, cela donne une surface homéomorphe à un N_k . En effet, on peut éliminer une poignée avec un crosscap voisin dans l'ordre de succession des opérations, ceci donnant 3 crosscaps. Donc toute surface est homéomorphe à un S_n ou un N_k . Dans la preuve du théorème 39, si on obtient S depuis S'' par un crosscap en rajoutant un hexagone, S'' est homéomorphe à $N_{k'}$ ou $S_{n'}$. Dans le premier cas, S est homéomorphe à $N_{k'+1}$, dans le second, par la proposition 51, S est homéomorphe à $N_{2n'+1}$, ce qu'on voulait. La conclusion est similaire dans le cas où S est obtenue depuis S' en rajoutant deux triangles lors d'une poignée (inversée ou non).

□

On va montrer que ces surfaces ne sont pas homéomorphes deux à deux, et donc que les simplifications s'arrêtent là.

Lemme 55. *Soit V une variété connexe de dimension 2. Soit x un point de V , D un voisinage de x homéomorphe au disque et c un lacet simple autour de x contenu dans D (donc homéomorphe au cercle). Si $y_1 = y_2$ dans $\pi_1(V)$ alors il existe un entier n tel que $y_1 = c^n \cdot y_2$*

Démonstration. Soient y_1 et y_2 deux lacets dans $V \setminus \{x\}$, homotopes dans V par h . On suppose D disjoint de $Im y_1$ et $Im y_2$. Soit D_1 un disque strictement inclus dans D contenant c dans son intérieur. On considère les « segments très mauvais » qui joignent deux points de D et rencontrent D_1 , pour un intervalle ouvert autour d'un s_0 d'inf s_1 et de sup s_2 . Par compacité de $[0, 1] \times [0, 1]$, ils sont en nombre fini. Comme D_1 est ouvert, $h(s_1, t)$ et $h(s_2, t)$ ne rencontrent pas l'intérieur de D_1 . Ces segments sont homotopes dans $D \setminus \{x\}$ à un chemin radial, puis suivant un arc de cercle (faisant autant de tours que l'indice de $h(s_1, t)$) de D_1 puis radial à nouveau. On remplace ainsi $h(s_1)$ et $h(s_2)$ et h_1 qui coïncide avec h à l'extérieur de D . Cela définit également h_1 de manière unique dans D . Sur les chemins radiaux, $h(s, t)$ pour s dans (s_1, s_2) agit par rotation sur les parties radiales et les amène à coïncider. Il reste alors un lacet tracé sur le cercle de D_1 , homotope à un c^n . On a donc $h(s_1, t) \cdot h(s_2, t)^{-1}$ homotope à c^n .

□

Remarque 56. $A \# B = U \cup V$ où U est homéomorphe à A privé d'un disque, donc à A privé d'un point, V est homéomorphe à B privé d'un point, et $U \cap V$ est homéomorphe à un anneau. ("intercalé" entre T_A et T_B triangles de A et de B où l'on fait la somme connexe). Les lacets de $U \cap V$ sont alors homotopes aux lacets d'un disque époinché en le centre de T_A dans U et de même dans V .

Cette remarque sera très utile pour les découpages opérés lors de l'utilisation du théorème de Van Kampen.

On obtient deux énoncés principaux.

Théorème 57. $Ab(\pi_1((T^2)^{\#n})) = \mathbb{Z}^{2n}$

Démonstration. Ceci se montre par récurrence sur n . Pour $n = 0$ l'énoncé est clair, pour $n = 1$, il est démontré plus haut. Pour $n = 2$ on choisit U et V comme dans la remarque On peut remarquer que le tore privé d'un point se rétracte par déformation en un bouquet de deux cercles (cf schéma). Le groupe fondamental est donc $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ et l'abélianisé \mathbb{Z}^2 . Le lacet circulaire autour de x est homotope dans $T \setminus \{x\}$ à un commutateur $bab^{-1}a^{-1}$, où b et a sont le petit cercle et le grand cercle. (cf schéma), donc dans U et dans V : il est nul dans l'abélianisé.

On a donc d'après le théorème de Van Kampen et les remarques précédentes :

$$Ab(\pi_1(T^2 \# T^2)) = Ab(\pi_1(T \setminus \{x\}) * \pi_1(T \setminus \{x\})) = Ab(\pi_1(T \setminus \{x\})) \times Ab(\pi_1(T \setminus \{x\})) = \mathbb{Z}^4.$$

Hérédité : On considère $A \# T$, avec $A = (T)^{\#n}$. On suppose qu'on a enlevé un point x sur un tore "extrémal" de A . En considérant qu'on a ajouté successivement n tores à un tore de départ, les "points de liaison" entre tores (arbitrairement choisis) sont ordonnés. On suppose que le point que l'on a enlevé est situé sur le dernier tore. On montre par récurrence sur n que le lacet faisant le tour de x est un élément du groupe N engendré par les commutateurs de $\pi_1(A)$. Pour $n = 1$ c'est déjà fait. Le lacet c_2 faisant le tour de x peut être transformé de la même façon que dans le cas $n = 1$, mais en faisant un détour semi-circulaire pour éviter la jonction avec le tore précédent. Il s'écrit alors $c_2 = byb^{-1}y'$. Or $y'.y$ est homotope à c qui fait le tour de la jonction. Par récurrence, c est dans N , $c_2 = byb^{-1}cy^{-1} = byb^{-1}y^{-1}(ycy^{-1}c^{-1})c$ est dans N . Donc d'après le théorème de Van Kampen,

$$Ab(\pi_1(A \# T)) = Ab(\pi_1(A) * \pi_1(T)) = Ab(\pi_1(A)) \times Ab(\pi_1(T)) = \mathbb{Z}^{2(n+1)}.$$

grâce à l'hypothèse de récurrence. □

Théorème 58. Pour $k \geq 1$, on a $Ab(\pi_1(N_k)) = \mathbb{Z}^{k-1} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

Démonstration. On procède par récurrence. Le cas $n = 1$ a déjà été traité, pour $n = 2$: $\mathbb{R}P^2$ privé d'un disque se rétracte en $\mathbb{R}P^1$ comme vu plus haut. Donc $\pi_1(U) = \langle y_1 \rangle$ où y_1 est le même lacet que précédemment. De même $\pi_1(V) = \langle y_2 \rangle$. Les lacets de $U \cap V$ sont dans U égaux à y_1^2 , dans V égaux à y_2^2 donc d'après le théorème de Van Kampen $\pi_1(\mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2)$ est caractérisé par la présentation : $\langle y_1 \rangle * \langle y_2 \rangle, y_1^2 = y_2^2$. Son abélianisé est donc un groupe abélien de dimension 2 ayant un élément d'ordre infini (y_1^2) et un élément de torsion 2 ($y_1 y_2^{-1}$), c'est donc $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ d'après le théorème de classification.

Pour l'hérédité, on raisonne de manière semblable à celle du théorème précédent, en appliquant le théorème de Van Kampen. □

De ceci découle ce que l'on voulait :

Corollaire 59. Les surfaces S_n et N_k , $n, k \geq 0$, sont deux à deux non homéomorphes.

Démonstration. Les abélianisés des groupes fondamentaux ne sont en effet pas les mêmes. □

6 Conclusion

Nous avons ainsi pu classifier les surfaces compactes de dimension 2, en utilisant principalement deux types d'outils. D'une part, des raisonnements de topologie algébrique sur les groupes fondamentaux, où le théorème de Van Kampen occupe une place de choix. D'autre part, nous avons utilisé un théorème puissant, celui de la triangulation des surfaces, qui permet d'associer des graphes (puis des mots) à celles-ci. Pour démontrer ce théorème, nous avons suivi un cheminement long quoique assez élémentaire, s'appuyant sur la théorie des graphes notamment, en démontrant successivement le théorème de Jordan et celui de Jordan-Schönflies, ce dernier constituant un objet d'étude à part entière.

7 Annexe : programmes conçus

Voici plusieurs fonctions un peu commentées.

```
(* On represente les triangulations par des dictionnaires associant a un
cote le cote auquel il est identifie. *)
```

```
module Vermap = Map.Make(struct
  let compare = Pervasives.compare
  type t = int*int
end)
```

```
module Intmap = Map.Make(struct
  let compare = Pervasives.compare
  type t = int
end)
```

```
type triangulation = {nb_trig : int ; ident : (int*int*bool) Vermap.t}
```

```
(* On implemente la construction d'un polygone aux aretes identifiees
correspondant la triangulation *)
```

```
let cycle t ti lim = let n = t.nb_trig in
  let bord = Array.make_matrix n 3 false in
for k = 1 to 3 do bord.(ti-1).(k-1) <- true done;
  let rec ext l lim = if lim = 0 then l else match l with
  [] -> []
  |(tj,p)::s -> print_int (tj) ; print_char '_' ;
  print_int(p) ; print_char '$' ;
  let (tj1,q,vv) = Vermap.find (tj,p) t.ident in
  if bord.(tj1-1).(q-1) then (tj,p)::(ext s (lim-1))
  else begin bord.(tj-1).(p-1) <- true ;
  bord.(tj1-1).((q+1) mod 3) <- true ;
```

```

        bord.(tj1-1).(q mod 3) <- true ;
    if vv then ext ((tj1,(q mod 3)+1)::(tj1,((q+1) mod 3)+1)::s) (lim-1)
    else ext ((tj1,((q+1) mod 3)+1)::(tj1,(q mod 3)+1)::s) (lim-1) end
        in ext [(ti,1);(ti,2);(ti,3)] lim
(* A partir de ce polygone, on calcule un mot *)
let rec mot t l v max = (*t = trig, v = deja_visite, l = bord,
max = entier pour nommer*)
    let m = t.ident in
    match l with
    [] -> []
    |(ti,p)::s -> let (tj1,q,vv) = Vermap.find (ti,p) m in
if Vermap.mem (tj1,q) v then let n = Vermap.find (tj1,q) v in
        if vv then (-n)::(mot t s v max)
        else n::(mot t s v max)
else (max+1)::(mot t s (Vermap.add (ti,p) (max+1) v) (max+1))

    let fmot t ti lim = mot t (cycle t ti lim) Vermap.empty 1

(* On simplifie le mot en identifiant les s quences de plusieurs lettres
qui peuvent etre remplacees par une seule*)

let simplifie_mot l =
let ma = max_elt l in
let garde =Array.make (ma + 1) (true) and pos = Array.make (ma + 1) (-1) in
    let rec simpl i m j = print_int i; print_char '$';
        match m with
        [] -> ()
        |x::s -> let n = abs x in
            match i with
            0 -> if pos.(n) = -1 then begin pos.(n) <- j; simpl 0 s (j+1) end
                else let j0 = pos.(n) in
                    if x > 0 then simpl j0 s (j+1)
                    else simpl (-j0) s (j+1)
            |i ->
                if i > 0 then
                    if pos.(n) = (i+1) & x>0 then garde.(n) <- false else ()
                    else if pos.(n) = -i-1 & x<0 then garde.(n) <- false
                    else if pos.(n) = -1 then begin pos.(n) <- j; simpl 0 s (j+1) end;
                    if x>0 then simpl (pos.(n)) s (j+1) else simpl(-pos.(n)) s (j+1)
                in
            (* let () = let l = simpl 0 [1;2;3;4;5;5;3;4;1] 1 in
for i = 1 to 5 do if garde.(i) then print_int 1 else print_int(0) done *)
simpl 0 l 1;
        let corres = Array.make (ma+1)(-1) in
        let n2 = ref 1 in
for i=1 to ma do if garde.(i) then begin corres.(i) <- (!n2) ;

```

```

incr n2 end done;
let rec constr m = match m with
  [] -> []
  |x::s when garde.(abs x) -> if x>0 then corres.(x)::(constr s)
    else (-corres.(-x))::(constr s)
  |x::s -> constr s
in constr l ;;

(* A a a B = AB*)

let rec red m i0 = match m with
  [] -> []
  |[x] -> if x>0 then [i0] else [(-i0)]
  |x::y::s when y = -x -> red s i0
  |x::y::s -> if x > 0 then i0::(red (y::s) (i0+1))
    else (-i0)::(red(y::s)(i0+1))

(* On transforme un mot en triangle en triangulant le polygone associe*)

let triangle w lim =
  let rec trig l m n jn mem = print_int n ; print_char '_'; print_int jn;
match l with
  (* l = mot, m = identifications, (n,jn) = cote courant, mem = deja_visite*)
  [] -> m
  |x::s -> let x1 = abs x in
    if Intmap.mem x1 mem then
      let (k,jk) = Intmap.find x1 mem and vv = (x>0) in
      match jn with
        1 -> trig s (Vermap.add (n,jn) (k,jk,vv) (Vermap.add (k,jk)
        |2 -> trig s (Vermap.add (n,jn) (k,jk,vv) (Vermap.add (k,jk)
      else match jn with
        1 -> trig s m n 2 (Intmap.add x1 (n,1) mem)
        |2 -> trig s m (n+1) 1 (Intmap.add x1 (n,2) mem)
in
let rec coupe n0 n1 m lim = if lim = 0 then Vermap.empty else
  let p = n1/2 in
  if n1 = 3 then
    let rec f i = if i = 0 then m
    else Vermap.add (n0+4,i) (n0+i,3,true)
    (Vermap.add (n0+i,3)(n0+4,i,true)(f (i-1)))
    in f 3
  else
    let rec lie q j m = print_int(q); print_char '$';
    if q=p & j=2 then m
    else match j with
      1 -> lie q 2 (Vermap.add (n0+n1+q,1) (n0+2*q-1,3,true)

```

```

(Vermap.add (n0+2*q-1,3) (n0+n1+q,1,true) m))
|2 -> lie (q+1) 1 (Vermap.add (n0+n1+q,2)(n0+2*q,3,true)
  (Vermap.add(n0+2*q,3)(n0+n1+q,2,true) m))
in
if n1 = 4 then Vermap.add (n0+5,3) (n0+6,3,true)
(Vermap.add (n0+6,3) (n0+5,3,true) (lie 1 1 m))
else if n1 mod 2 = 0 then coupe (n0+n1) p (lie 1 1 m) (lim-1)
else coupe (n0+n1+1) (p+1) (lie 1 1 m)(lim-1)
and n = long w and t = (trig w (Vermap.empty) 1 1 (Intmap.empty))
in print_char '$'
(* {nb_trig = nb_triangle(n) ; ident = coupe n ((n/2) + (n mod 2))
  (Vermap.empty) lim} *)

```

8 Bibliographie

- [1] Carsten Thomassen, *The Jordan-Schönflies theorem and the classification of surfaces*, 1992.
- [2] Yves Tanré et Daniel Félix, *Topologie algébrique - cours et exercices corrigés*, Dunod, 2010.