

QUELQUES MODELES DE TROUS NOIRS

Sandrine CODIS

élève du L3 mixte Maths-Physique de l'ENS

11 Septembre 2009

*Sous la direction de Jan Troost (Laboratoire de Physique Théorique, ENS) et François Béguin
(Laboratoire de Mathématiques, Paris XI)*

Je tiens à remercier mes tuteurs Jan Troost, chercheur au laboratoire de physique théorique de l'ENS, et François Béguin, chercheur au département de mathématiques de l'Université Paris XI, pour leur disponibilité tout au long de ce stage. Leur aide a été vraiment précieuse. En attisant ma curiosité et mon intérêt pour leurs thèmes de recherche, ils m'ont donné envie de continuer à m'intéresser à ces problématiques concernant la géométrie de l'espace-temps. Le temps imparti pour ce stage ayant été trop court pour pouvoir approfondir et étudier toutes les notions qui m'intéressaient, cela n'a fait que grandir d'avantage ma soif de connaissances sur le sujet.

Résumé

Durant ce stage, j'ai étudié quelques modèles de trous noirs, objets astronomiques mais surtout objets géométriques comme nous allons le voir.

L'une des parties les plus importantes de ce travail a été de comprendre les idées de base de la théorie de la relativité générale d'Einstein, nécessaire au développement même de l'idée de trou noir. Quelques notions sont rappelées dans la 1ère partie. On introduit également des liens entre le comportement des trous noirs et les lois usuelles de la thermodynamique.

J'ai ensuite appliqué ces nouvelles connaissances à l'étude des trous noirs dits de Schwarzschild. Dans la seconde partie, je présente une preuve de l'existence et l'unicité des solutions statiques, à symétrie sphérique, des équations d'Einstein dans le vide (famille de solutions à un paramètre dites de Schwarzschild), puis discute des singularités de ces solutions.

Enfin, dans une 3ème partie, je mets en évidence un modèle de trou noir à courbure constante : les trous noirs BTZ. J'en fais la construction mathématique, en dimension $2+1$, comme quotient d'un ouvert de l'espace Anti-de-Sitter, par un sous-groupe discret de $O(2,2)$. Finalement, j'en étudie quelques caractéristiques géométriques et thermodynamiques.

On notera que l'apprentissage du langage Latex a aussi été un point important de ce stage.

Table des matières

1	Quelques préliminaires	4
1.1	Relativité générale	4
1.1.1	Règles de calcul sur les tenseurs	4
1.1.2	Un brin de relativité générale	4
1.1.3	Limite newtonienne de la relativité générale	5
1.2	Thermodynamique des trous noirs	5
1.2.1	"Black holes have no hairs"	5
1.2.2	Les 4 lois de la thermodynamique	5
1.2.3	Rayonnement de Hawking	6
2	Trous noirs de Schwarzschild	8
2.1	Unique solution statique à symétrie sphérique et dans le vide des équations d'Einstein	8
2.2	Représentation régulière de l'espace-temps de Schwarzschild	9
2.3	Trou noir de Schwarzschild	10
2.3.1	La singularité essentielle	10
2.3.2	Trou noir	11
2.4	Thermodynamique du trou noir de Schwarzschild	11
3	Trous noirs BTZ	13
3.1	Construction mathématique	13
3.1.1	L'espace Anti-de-Sitter de dimension 3	13
3.1.2	Métrie de l'espace Anti-de-Sitter	14
3.1.3	Modèle de Klein de l'espace Anti-de-Sitter	14
3.1.4	Construction du trou noir BTZ	15
3.2	Métrie du trou noir BTZ	18
3.2.1	Le cas $J = 0, M = -1$	19
3.2.2	Le cas $ J = Ml$	19
3.2.3	Le cas $J = M = 0$	19
3.3	Equations d'Einstein	19
3.4	Thermodynamique du trou noir BTZ	21
	Conclusion	22

1 Quelques préliminaires

1.1 Relativité générale

Étudier les bases de la théorie de la relativité générale a été une des parties les plus importantes de mon stage. Je rappelle ici les résultats dont j'ai eu besoin pour ce travail.

1.1.1 Règles de calcul sur les tenseurs

Je rappelle ici les règles de transformations sur les tenseurs. On passe d'un référentiel $\{x^\mu\}$ à un autre référentiel $\{x'^\mu\}$ par les règles de calcul suivantes :

– Pour un vecteur : $u'^\nu(x') = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} u^\mu(x)$.

– Pour un tenseur de même variance que le tenseur métrique : $g'_{\rho\sigma} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\rho} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\sigma} g_{\mu\nu}$.

– Pour un tenseur p fois covariants (indices inférieurs) et q fois contravariants (indices supérieurs) : $T'^{\alpha\dots}_{\beta\dots}(x') = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu} \dots \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} \dots T^{\mu\dots}_{\nu\dots}(x)$.

De plus, on peut abaisser ou élever les indices par les formules suivantes :

$$T_{\mu}^{\nu} = g_{\mu\rho} T^{\rho\nu}$$

$$T^{\nu}_{\mu} = g^{\nu\rho} T_{\rho\mu}$$

On fera attention dans la suite au fait que le symbole de Christoffel n'est pas un tenseur, malgré sa notation.

Notons enfin que $g_{\mu\rho} g^{\rho\nu} = \delta_{\mu}^{\nu}$.

1.1.2 Un brin de relativité générale

En quelques mots, la théorie de la relativité repose sur le principe d'équivalence d'Einstein (tout corps dans un champ gravitationnel est accéléré de la même façon) qui entraîne que les corps massifs courbent l'espace-temps.

Plus précisément, le principe d'équivalence faible (traduisant que masse inertielle et masse gravitationnelle sont égales) peut s'énoncer comme suit : "En tout événement de l'espace-temps dans un champ de gravitation arbitraire, on peut choisir un référentiel dit localement inertiel tel que dans un voisinage de l'événement considéré, le mouvement libre de tous les corps soit rectiligne et uniforme".

Le principe d'équivalence d'Einstein, quant à lui, s'écrit de la façon suivante : "Dans le référentiel localement inertiel du principe d'équivalence faible, toutes les lois (sauf la gravitation) de la nature ont la forme donnée par la relativité restreinte".

Ce principe implique que l'intervalle s'écrit : $ds^2 = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu$ où $g_{\mu\nu}$ est le tenseur métrique. Celui-ci peut être relié au symbole de Christoffel (intervenant dans les équations du mouvement) par la relation suivante dite équation des géodésiques :

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} (\partial_{\mu} g_{\nu\sigma} + \partial_{\nu} g_{\mu\sigma} - \partial_{\sigma} g_{\mu\nu})$$

On introduit également le tenseur de Riemann (dit tenseur de courbure) :

$$R_{\cdot\mu\sigma\nu}^{\lambda} = \partial_{\sigma}\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} - \partial_{\nu}\Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda} + \Gamma_{\mu\nu}^{\rho}\Gamma_{\rho\sigma}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\sigma}^{\rho}\Gamma_{\nu\rho}^{\lambda}$$

Et le tenseur d'Einstein :

$$E^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R$$

où le tenseur et le scalaire de Ricci valent $R_{\mu\nu} = R_{\cdot\mu\lambda\nu}^{\lambda}$ et $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$.

La relativité générale est alors contenue dans les équations suivantes, dites d'Einstein :

$$\boxed{E^{\mu\nu} + \Lambda g^{\mu\nu} = \chi T^{\mu\nu}}$$

où Λ est la constante cosmologique et $T^{\mu\nu}$ est le tenseur d'énergie impulsion.

1.1.3 Limite newtonienne de la relativité générale

Dans la limite newtonienne (c tend vers l'infini), $g_{\mu\nu} \approx \eta_{\mu\nu}$. Après quelques calculs (pour avoir l'équation classique du mouvement et l'équation de Poisson), on trouve

$$g_{tt} \approx -1 + \frac{2U}{c^2}$$

et aussi

$$\chi = \frac{8\pi G}{c^4}$$

1.2 Thermodynamique des trous noirs

Pour la suite, nous avons également besoin d'introduire des notions de thermodynamique des trous noirs.

1.2.1 "Black holes have no hairs"

Le très célèbre "théorème de calvitie" affirme que les trous noirs sont décrits uniquement par 3 paramètres : leur masse, leur moment angulaire et leur charge. Ainsi, on peut penser que la création d'un trou noir (par exemple par effondrement d'une étoile) contredit le 2nd principe de la thermodynamique qui affirme que le désordre doit croître. Et pourtant...

1.2.2 Les 4 lois de la thermodynamique

On peut, en fait, énoncer 4 lois de thermodynamique des trous noirs :

- loi 0 : la gravité de surface, κ , est constante le long de l'horizon du trou noir ;
- loi 1 : il est impossible, par une séquence finie d'opération de ramener κ à zéro (κ est la température) ;
- loi 2 : l'aire ne diminue pas avec le temps. En particulier, si deux trous noirs fusionnent, leur aire après fusion est supérieure à la somme des deux aires de départ (l'aire est l'entropie du trou noir) ;
- loi 3 : on peut écrire une relation entre l'aire et les 3 paramètres du trou noir : $\delta M c^2 = \frac{c^2}{8\pi G} \kappa \delta A + \Omega \delta J + V \delta Q$

Pour comprendre cela, on va faire un petit raisonnement de thermodynamique. Supposons que l'on ait une boîte, très loin du trou noir (de Schwarzschild), contenant un rayonnement thermique à la température T . Celle-ci doit être au moins aussi large que la longueur d'onde typique $\hbar c/kT$, d'après la loi de Wien. On ramène cette boîte à l'horizon à l'aide d'une corde (le centre de gravité est donc à une distance $\frac{d}{2}$ de l'horizon). L'énergie potentielle est donc $-mc^2 + mg\frac{d}{2}$ (avec g la gravité à l'horizon, $g = \frac{GM}{r_s^2} = \frac{c^4}{4GM}$). Toute l'énergie est convertie en travail utile. On ouvre alors la boîte et le rayonnement plonge dans le trou noir. On ramène alors la boîte à sa position initiale (fin du cycle). Le travail que l'on gagne à laisser plonger le rayonnement dans le trou noir est : $W = mc^2 - m\frac{c^4}{4GM}\frac{d}{2} \approx mc^2(1 - \frac{\hbar c^3}{8GMkT})$. L'efficacité de notre machine thermique est donc $e \approx 1 - \frac{\hbar c^3}{8GMkT}$.

Ceci nous amène à la conclusion que la température thermodynamique de trou noir est de l'ordre de $\frac{\hbar c^3}{8GMk}$. On retrouve le résultat trouvé par Bekenstein en 1973.

De là, on peut exprimer l'entropie du trou noir. Quand on augmente la masse de δM ie quand on apporte une chaleur supplémentaire de δMc^2 , l'entropie augmente de :

$$\delta S = \frac{\delta Mc^2}{T_{TN}} \approx \frac{8kGM\delta M}{\hbar c}$$

Or, si A est l'aire de l'horizon du trou noir, on a $\delta A = 8\pi r_s \delta r_s = \frac{32\pi G^2 M \delta M}{c^4}$. Et ainsi :

$$S \approx \frac{kc^3}{4\pi\hbar G} A$$

A partir de ce petit raisonnement, on peut comprendre les lois de thermodynamique énoncées précédemment.

1.2.3 Rayonnement de Hawking

La température thermodynamique que nous avons introduite, doit également pouvoir s'interpréter comme une température de rayonnement. C'est ce que Hawking a calculé en 1973 par des arguments de théorie quantique des champs sur des espaces courbes. Il trouve qu'un trou noir, dans un état stationnaire, émet un rayonnement de son horizon vers l'infini. Son spectre est celui d'un rayonnement thermique à la température $T_{TN} = \frac{\hbar c^3}{8\pi GMk}$.

Ce rayonnement est créé par des fluctuations quantiques autour de l'horizon : lorsque une paire particule/anti-particule est créée près de l'horizon du trou noir, l'une des 2 peut passer derrière l'horizon et tomber dans la singularité. Si l'anti-particule (celle qui tombe dans le trou noir) est d'énergie négative, la particule a une énergie positive et peut donc s'éloigner du trou noir. On a donc un flot de particules d'énergie positive qui s'éloigne du trou noir, et un autre d'anti-particules d'énergie négative qui est absorbé par le trou noir. Celui-ci voit donc sa masse diminuer. En 1976, Damour et Ruffini calculent que la région au voisinage proche du trou noir atténue le flux d'anti-particules qui dépasse l'horizon d'un facteur (pour $E \gg \frac{\hbar c^3}{GM}$) $\exp - \frac{4\pi GME}{\hbar c^3}$. On peut donc dire que la probabilité pour qu'une antiparticule "tombe" dans le trou noir est $\exp - \frac{8\pi GME}{\hbar c^3}$. La théorie quantique des champs affirme que tous les états quantiques contribuent de la même façon aux fluctuations du vide. Ainsi, le flux incident d'anti-particules est proportionnel au nombre

d'états quantiques : $\frac{4\pi p^2 dp}{h^3}$. Reste à multiplier par la probabilité de passer l'horizon.
Le flux de particules s'éloignant du trou noir est donc proportionnel à :

$$\frac{4\pi p^2 dp}{h^3} \exp - \frac{8\pi GME}{\hbar c^3}$$

On reconnaît là la limite hautes énergies d'un spectre de rayonnement thermique avec la température attendue.

En général, l'énergie thermique typique (kT) détermine quelles particules (d'énergie typique mc^2) seront rayonnées en un nombre suffisant. Ainsi, un trou noir de masse solaire ne pourra rayonner que des particules sans masse (photons, neutrinos...). Par contre, un trou noir de 10^{11} kg peut aussi rayonner des électrons, des mésons mu...

2 Trous noirs de Schwarzschild

J'ai ensuite étudié la métrique de Schwarzschild, seule solution statique, à symétrie sphérique des équations d'Einstein dans le vide, et avec constante cosmologique nulle. Elle décrit le champ gravitationnel à l'extérieur d'un corps massif sphérique sans charge et qui ne tourne pas (étoile, trou noir).

En fait, cette famille à un paramètre (assimilé à la masse) regroupe les seules solutions à symétrie sphérique de l'équation d'Einstein : c'est le fameux théorème de Birkhoff (dont on ne parlera pas plus ici).

2.1 Unique solution statique à symétrie sphérique et dans le vide des équations d'Einstein

Nous allons commencer par mettre en évidence cette solution.

Tout d'abord, précisons les hypothèses. On cherche une solution dans les coordonnées (r, θ, ϕ, t) :

- à symétrie sphérique c'est-à-dire inchangée sous les transformations de renversement ($x \rightarrow -x$) des angles θ et ϕ ;
- statique autrement dit les composantes du tenseur métrique sont indépendantes de t et la géométrie de l'espace temps est inchangée par renversement du temps ;
- dans le vide soit $T^{\mu\nu} = 0$ ou encore $R^{\mu\nu} = 0$ après avoir vu que dans le vide $R=0$.

La première chose à faire est de diagonaliser la métrique.

Celle-ci est invariante par renversement du temps donc pour $\mu \neq 4$, $g_{\mu 4} \rightarrow g'_{\mu 4} = -g_{\mu 4} = g_{\mu 4}$ donc $g_{\mu 4} = 0$. De la même façon, les invariances par transformations $\theta \rightarrow -\theta$ et $\phi \rightarrow -\phi$ donnent pour $\mu \neq 3$, $g_{\mu 3} = 0$ et pour $\mu \neq 2$, $g_{\mu 2} = 0$.

Ainsi $g_{\mu\nu} = 0$ pour $\mu \neq \nu$ soit :

$$ds^2 = g_{11}dr^2 + g_{22}d\theta^2 + g_{33}d\phi^2 + g_{44}dt^2$$

où g_{11} , g_{22} , g_{33} , g_{44} sont indépendants du temps t .

D'autre part, sur chaque ligne radiale, g_{11} ne doit dépendre que de r par symétrie sphérique donc $g_{11} = f(r)$ et de même $g_{44} = h(r)$.

Sur les hypersurfaces $t = t_0$ et $r = r_0$, la métrique doit être celle d'une sphère :

$$dl^2 = r_0^2(d\theta^2 + \sin(\theta)^2 d\phi^2)$$

Si \tilde{g} est la métrique restreinte à cette hypersurface, ses composantes doivent être invariantes par toute rotation d'angle θ ou ϕ . En comparant les expressions des métriques, on obtient : $\tilde{g}_{22}d\theta^2 + \tilde{g}_{33}d\phi^2 = r_0^2(d\theta^2 + \sin(\theta)^2 d\phi^2)$.

D'où $\tilde{g}_{22} = r_0^2$ et $\tilde{g}_{33} = r_0^2 \sin(\theta)^2$.

Ce raisonnement vaut pour chaque r_0 et t_0 donc $g_{22} = r^2$ et $g_{33} = r^2 \sin(\theta)^2$.

Ainsi :

$$ds^2 = f(r)dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2 \sin(\theta)^2 d\phi^2 + h(r)dt^2.$$

Pour trouver f et h , on utilise les équations d'Einstein : $R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R = 0$. En prenant la trace, on obtient $R = 0$ donc $R_{\mu\nu} = 0$ (avec constante cosmologique nulle).

Pour $\mu \neq \nu$, c'est trivial ($0 = 0!$), R_{22} et R_{33} donnent la même équation, il reste donc 3 équations non triviales qui donnent après calculs :

$$\begin{cases} 4f'h^2 - 2rh''fh + rf'h'h + rh'^2f = 0 \\ rf'h + 2f^2h - 2fh - rh'f = 0 \\ -2rh''fh + rf'h'h + rh'^2f - 4h'fh = 0 \end{cases}$$

En combinant (1) et (3), on obtient $h'f + f'h = 0$. Soit $f(r)h(r) = A$ où A est un réel non nul.

De là, en utilisant la seconde équation, on a : $rf' + f^2 - f = 0$ que l'on peut intégrer en :

$$f(r) = \frac{1}{1 + \frac{B}{r}}$$

En effet, posons $g = \frac{r}{f}$. Alors, $g' = \frac{f - rf'}{f^2} = 1$ d'où $g = r + B$ et $f(r) = \frac{1}{1 + \frac{B}{r}}$ qui ne s'annule qu'en $r=0$ (où $f(0)=0$ par passage à la limite). Donc par continuité, on a bien trouvé f pour tout $r \geq 0$.

Ainsi :

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1 + \frac{B}{r}} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 + A(1 + \frac{B}{r}) dt^2$$

Pour finir, on trouve A et B en utilisant la limite newtonienne : $A(1 + \frac{B}{r}) \approx -c^2(1 - \frac{2Gm}{c^2 r})$. D'où finalement la métrique dite de Schwarzschild :

$$\boxed{ds^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{2Gm}{c^2 r}} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2 - c^2(1 - \frac{2Gm}{c^2 r}) dt^2}$$

On observe donc que quand r tend vers l'infini, la métrique tend vers celle de Minkowski, l'espace-temps est asymptotiquement plat.

2.2 Représentation régulière de l'espace-temps de Schwarzschild

On peut rapidement se rendre compte que la composante g_{11} du tenseur métrique devient singulière pour le rayon de Schwarzschild : $r_S = \frac{2Gm}{c^2}$.

Pour la plupart des corps, ce rayon est beaucoup plus petit que leur taille ; par exemple, pour le Soleil avec un rayon de 700 000 km, on a r_S de l'ordre de 3km !

En fait, la singularité n'est due qu'à un mauvais choix de coordonnées.

Pour s'en rendre compte, regardons ce qui se passe pour θ et ϕ constants c'est-à-dire pour un mouvement radial. Posons u et v de la façon suivante (on parle de coordonnées de Kruskal-Szekeres) :

$$u = \begin{cases} \exp(\frac{r}{2r_S}) \cosh(\frac{ct}{2r_S}) \sqrt{\frac{r}{r_S} - 1} & \text{si } r \geq r_S \\ \exp(\frac{r}{2r_S}) \sinh(\frac{ct}{2r_S}) \sqrt{1 - \frac{r}{r_S}} & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$v = \begin{cases} \exp\left(\frac{r}{2r_S}\right) \sinh\left(\frac{ct}{2r_S}\right) \sqrt{\frac{r}{r_S} - 1} & \text{si } r \geq r_S \\ \exp\left(\frac{r}{2r_S}\right) \cosh\left(\frac{ct}{2r_S}\right) \sqrt{1 - \frac{r}{r_S}} & \text{sinon} \end{cases}$$

Inversement, on peut retrouver r et t avec les expressions suivantes :

$$\begin{cases} u^2 - v^2 = \exp\left(\frac{r}{r_S}\right) \left(\frac{r}{r_S} - 1\right) \\ \frac{ct}{2r_S} = \tanh\left(\frac{u}{v}\right)^{-1} \end{cases}$$

Notons de plus, que la condition $r \geq 0$ devient $v^2 - u^2 \geq -1$.

Alors pour $r \geq r_S$:

$$\begin{cases} dv = \exp\left(\frac{r}{2r_S}\right) \left(\sinh\left(\frac{ct}{2r_S}\right) \left(\frac{\sqrt{\frac{r}{r_S} - 1}}{2r_S} + \frac{1}{r_S} \frac{1}{2\sqrt{\frac{r}{r_S} - 1}} \right) dr + \sqrt{\frac{r}{r_S} - 1} \frac{c}{2r_S} \cosh\left(\frac{ct}{2r_S}\right) dt \right) \\ \text{et} \\ du = \exp\left(\frac{r}{2r_S}\right) \left(\cosh\left(\frac{ct}{2r_S}\right) \left(\frac{\sqrt{\frac{r}{r_S} - 1}}{2r_S} + \frac{1}{r_S} \frac{1}{2\sqrt{\frac{r}{r_S} - 1}} \right) dr + \sqrt{\frac{r}{r_S} - 1} \frac{c}{2r_S} \sinh\left(\frac{ct}{2r_S}\right) dt \right) \end{cases}$$

En écrivant $dv^2 - du^2$, les termes croisés en $drdt$ s'éliminent et on obtient :

$$dv^2 - du^2 = \exp\left(\frac{r}{r_S}\right) \left(\left(\frac{\sqrt{\frac{r}{r_S} - 1}}{2r_S} + \frac{1}{2r_S \sqrt{\frac{r}{r_S} - 1}} \right)^2 dr^2 + \left(\sqrt{\frac{r}{r_S} - 1} \frac{1}{2r_S} \right)^2 c^2 dt^2 \right) = \frac{r}{4r_S^3} \exp\left(\frac{r}{r_S}\right) \left(\frac{dr^2}{1 - \frac{r_S}{r}} + c^2 \left(1 - \frac{r_S}{r}\right) dt^2 \right)$$

On peut faire exactement le même raisonnement pour $r \leq r_S$, on retrouve alors la même expression pour l'intervalle en fonction de u et v . Ainsi :

$$ds^2 = \frac{4r_S^3}{r} \exp\left(-\frac{r}{r_S}\right) (dv^2 - du^2)$$

C'est une représentation régulière (sauf en $r = 0$) de l'espace-temps : en $r = r_S$ (soit $u = 0$, $v = 0$), la métrique ne possède plus de singularité.

2.3 Trou noir de Schwarzschild

Un objet plus petit que son rayon de Schwarzschild est appelé trou noir de Schwarzschild. Pourquoi parle-t-on de trou noir ?

2.3.1 La singularité essentielle

On voit que la métrique de Schwarzschild est également singulière en $r=0$. En fait, nous allons voir que cette fois-ci, cette singularité n'est pas due à un mauvais choix de coordonnées : c'est une vraie singularité physique. En effet, on peut regarder des invariants comme l'invariant de Krestschmann (indépendant du choix de coordonnées d'après les règles de calcul tensoriel rappelées en 1.1) donné par :

$$\boxed{R^{\mu\nu\rho\sigma} R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{12r_S^2}{r^6}}$$

La courbure tend donc vers l'infini : on est à une singularité essentielle.

Interpréter une courbure qui tend vers l'infini paraît compliqué. Mais en réalité, à l'approche de la singularité, la physique change : il semble par exemple important de tenir compte des effets quantiques.

2.3.2 Trou noir

En fait, pour $r \leq r_S$, le champ $\frac{\partial}{\partial r}$ devient de type temps (g_{11} devient négatif) et le champ $\frac{\partial}{\partial t}$ de type espace. Cela signifie qu'une courbe $r = r_0$ ne peut plus être la ligne d'univers d'une particule au coeur du trou noir ! La surface $r = r_S$ marque l'horizon du trou noir. Ainsi, on ne peut ni sortir de la zone $\{r \leq r_S\}$, ni arrêter de se rapprocher de $r = 0$ car la coordonnée r décroissante correspond à la flèche du temps (t devient de type espace et r de type temps). Arrêter de se rapprocher de la singularité quand on a passé l'horizon du trou noir, c'est un peu comme arrêter de vieillir en dehors !

On considère des géodésiques de genre lumière radiales, c'est-à-dire θ et ϕ constants et $ds^2 = 0$. On obtient :

$$\frac{dr}{dt} = \pm c \left(1 - \frac{r_S}{r}\right)$$

Dans un diagramme d'espace-temps et dans le plan (t, r) , l'ouverture du cône de lumière tend vers $\pm c$ quand r tend vers l'infini (comme dans un espace plat). Quand on approche de l'horizon situé à $r = r_S$, dt/dr tend vers l'infini et le cône de lumière se ferme. Ainsi, un rayon lumineux qui approche $r = r_S$ semble ne jamais y parvenir, dans ce système de coordonnées. En réalité, c'est une illusion et le rayon lumineux pourra sans aucune difficulté atteindre l'horizon. Cependant, un observateur à l'infini ne sera pas capable de le dire.

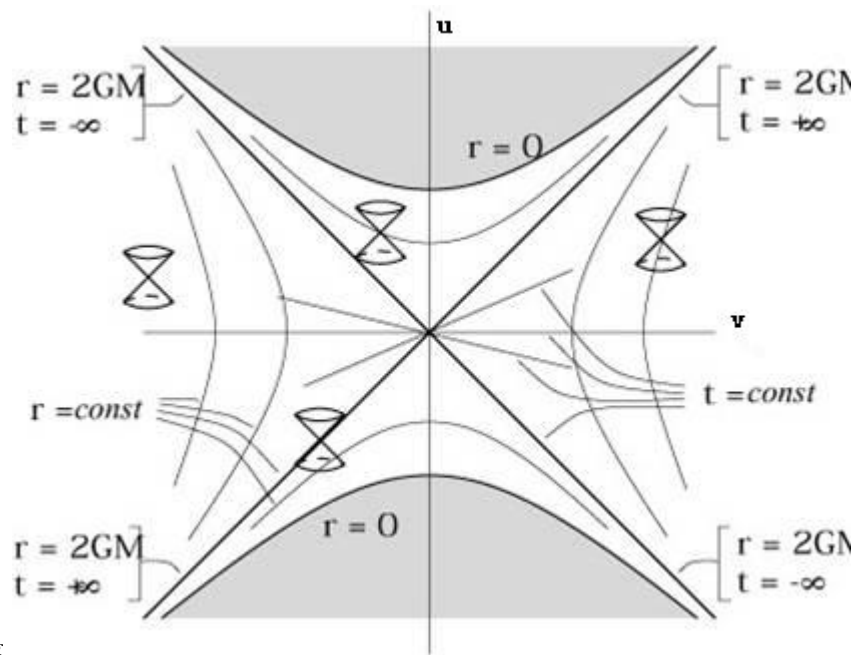
Revenons aux coordonnées de Kruskal-Szekeres et considérons les surfaces (θ, ϕ) constant. La singularité de courbure $r = 0$ est représentée dans le plan (u, v) par les deux hyperboles $u^2 - v^2 = 1$ (en fait, toute courbe du plan (t, r) est représentée deux fois dans le plan (u, v)). Ainsi les droites $r = r_0 > r_S$ (trajectoires d'observateurs immobiles dans le système de coordonnées schwarzschildiennes) sont représentées par des hyperboles dans les cadrans Est et Ouest ; et les droites $r = r_0 < r_S$ par des hyperboles dans les cadrans Nord et Sud . La singularité de coordonnée : $r = r_S$, quant à elle, est représentée par les deux droites $u = \pm v$. Enfin, les droites $t = t_0$ correspondent aux droites $u/v = cste$ et les trajectoires des photons radiaux sont les lignes : $u = \pm v + Cte$ (la surface $r = r_S$ est donc de genre lumière). On pourra se reporter à la figure 1.

On peut délimiter deux zones : $B_+ = \{v^2 < u^2, u > 0\}$ et $B_- = \{v^2 < u^2, u < 0\}$. Clairement, B_+ est un trou noir car aucune courbe causale sur laquelle u est croissante (orientée vers le futur) ne peut s'échapper de cette zone. A l'inverse B_- est un trou blanc, aucune courbe causale sur laquelle u est croissante ne peut entrer dans cette zone.

2.4 Thermodynamique du trou noir de Schwarzschild

On a vu que $\frac{\delta M}{\delta A} = \frac{\kappa}{8\pi G}$.
Or ici, $A = 4\pi r_S^2 = 16\pi \frac{G^2 M^2}{c^4}$.

Donc $\kappa = \frac{c^4}{4GM}$ bien en accord avec la formule habituelle de la gravité de surface : $\kappa = \frac{GM}{r^2}$.



de kruskal.jpg

FIGURE 1 – Le diagramme espace-temps de Schwarzschild en coordonnées de Kruskal

La température du trou noir vaut, quant à elle :

$$T_{Schwarzschild} = \frac{1}{8\pi k} \frac{\hbar c^3}{GM}$$

Elle est donc inversement proportionnelle à la masse. En unités de masse solaire, on obtient donc :

$$\frac{T}{1K} = 6,2 \times 10^{-8} \frac{M_{\odot}}{M}$$

Ainsi, un trou noir de Schwarzschild d'une masse solaire a une température de $10^{-7}K$! Mais, plus il rayonne, plus il perd de la masse, plus sa température augmente et plus il rayonne...

On va faire un calcul naïf pour calculer un ordre de grandeur du taux d'évaporation d'un trou noir de Schwarzschild.

A priori, $\frac{dM c^2}{dt} = -4\pi r_s^2 \sigma T^4$ Soit : $\frac{dM}{dt} = -\frac{c^4 \hbar}{15360\pi G^2} \frac{1}{M^2}$

Et le temps d'évaporation, en unités de masse solaire est donc :

$$\frac{t}{1s} = 6,6 \times 10^{74} \left(\frac{M}{M_{\odot}}\right)^3$$

Pour un trou noir de masse solaire, c'est 10^{57} fois plus que l'âge de l'Univers!!!

3 Trous noirs BTZ

L'idée même de trou noir semble impliquer que la courbure doit être singulière en son centre. Pourtant, on peut construire un modèle de trou noir avec, non pas une singularité de courbure, mais une singularité dans la structure causale elle-même. Ces trous noirs, solutions des équations d'Einstein avec constante cosmologique négative, sont appelés trous noirs BTZ (Bañados Teitelboim Zanelli, en l'honneur de ses créateurs). Ils sont obtenus comme quotient d'une région de AdS_3 . On les étudiera ici, en dimension 2+1.

3.1 Construction mathématique

3.1.1 L'espace Anti-de-Sitter de dimension 3

On va construire mathématiquement ce modèle en commençant par définir AdS_3 , l'espace Anti-De-Sitter de dimension 3 (espace modèle à courbure constante $= -1$).

Soit $Q = -x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$, forme quadratique sur \mathbb{R}^4 muni de la métrique : $ds^2 = -dx_1^2 - dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2$.

AdS_3 est le lieu des points - c'est-à-dire la quadrique - $\{Q = -1\}$ (ou $= \frac{1}{\Lambda}$ dans un cas plus général) muni d'une métrique lorentzienne, celle obtenue par la restriction de Q aux espaces tangents. En effet, étant donné un point p tel que $Q(p) = -1$, si on identifie $T_p\mathbb{R}^4$ avec \mathbb{R}^4 , alors l'espace tangent en p à la quadrique $Q = -1$ s'identifie à l'orthogonal de p dans \mathbb{R}^4 pour la forme bilinéaire B_Q associée à Q . La restriction de Q à cet orthogonal est de signature $-+++$, *i.e.* est lorentzienne.

On peut dire que AdS_3 est l'analogue lorentzien de l'espace hyperbolique \mathbb{H}^3 .

Posons $(a, b, c, d) = (x_1 - x_3, -x_2 + x_4, x_2 + x_4, x_1 + x_3)$.

Alors :

$$\begin{aligned} Q &= -x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \\ &= -\left(\frac{a+d}{2}\right)^2 + \left(\frac{c-b}{2}\right)^2 + \left(\frac{-a+d}{2}\right)^2 + \left(\frac{b+c}{2}\right)^2 \\ &= -ad + bc \end{aligned}$$

Ainsi l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^4 &\longrightarrow M_2(\mathbb{R}) \\ (x_1, x_2, x_3, x_4) &\longmapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \end{aligned}$$

identifie AdS_3 à $SL(2, \mathbb{R}) := \{M \in M_2(\mathbb{R}) \mid -\det(M) = -1\}$ muni de la restriction de la métrique induite par la forme quadratique $-det$.

Ainsi, d'une part, AdS_3 est homéomorphe à $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^2$ (décomposition matricielle en une matrice de rotation et une matrice triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs).

Et d'autre part, comme l'action de $SL(2, \mathbb{R}) \times SL(2, \mathbb{R})$ sur $SL(2, \mathbb{R})$ par multiplication à droite et à gauche est isométrique pour la métrique induite par $(-det)$, le groupe d'isométries lorentziennes de AdS_3 ($0(2,2)$ par construction, ou mieux $SO(2,2)$ si on conserve l'orientation de AdS_3 et son orientation chronologique) contient un sous-groupe isomorphe à $SL(2, \mathbb{R}) \times SL(2, \mathbb{R})$ (en fait le groupe d'isométries est même isomorphe à $SL(2, \mathbb{R}) \times SL(2, \mathbb{R})$ quotienté par l'identification de $(-id, -id)$ à (id, id)).

3.1.2 Métrique de l'espace Anti-de-Sitter

Avant de continuer la construction mathématique des trous noirs BTZ, on calcule la métrique de l'espace Anti-de-Sitter. On commence par poser deux nouvelles coordonnées telles que :

$$\begin{cases} x_1 = l \cosh \rho \sin \theta \\ et \\ x_2 = l \cosh \rho \cos \theta \end{cases}$$

pour $(\rho, \theta) \in [0; +\infty] \times [0; 2\pi]$. Alors comme $Q = -1$, on a : $x_3^2 + x_4^2 = l^2 \sinh^2 \rho$. On choisit $l \sinh \rho = \sqrt{x_3^2 + x_4^2}$. On passe en coordonnées polaires dans le plan (x_3, x_4) :

$$\begin{cases} x_3 = l \sinh \rho \sin \phi \\ et \\ x_4 = l \sinh \rho \cos \phi \end{cases}$$

De là, on calcule :

$$\begin{cases} dx_1 = l(\cosh \rho \cos \theta d\theta + \sin \theta \sinh \rho d\rho) \\ dx_2 = l(-\cosh \rho \sin \theta d\theta + \cos \theta \sinh \rho d\rho) \\ dx_3 = l(\sinh \rho \cos \phi d\phi + \sin \phi \cosh \rho d\rho) \\ dx_4 = l(-\sinh \rho \sin \phi d\phi + \cos \phi \cosh \rho d\rho) \end{cases}$$

En prenant les carrés, les termes croisés s'éliminent et on obtient :

$$ds^2 = l^2(d\rho^2 - \cosh^2 \rho d\theta^2 + \sinh^2 \rho d\phi^2)$$

A ce niveau-là, on se rend compte que pour ϕ et ρ fixés, $ds^2 = -l^2 \cosh^2 \rho d\theta^2$ fournit des courbes de type temps fermées si θ reste un angle (ie si on identifie $\theta = 0$ et $\theta = 2\pi$). On se doit donc de dérouler cet axe (on obtient en fait le revêtement universel de AdS_3 mais on les confondra dans la suite). On pose alors :

$$\begin{cases} \theta = \frac{t}{l} \\ et \\ r = l \sinh \rho \end{cases}$$

Et on obtient : $ds^2 = -\cosh^2 \rho dt^2 + \frac{dr^2}{\cosh^2 \rho} + r^2 d\phi^2$ or $\cosh^2 \rho = 1 + \sinh^2 \rho = 1 + \frac{r^2}{l^2}$

Donc :

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{r^2}{l^2}\right)dt^2 + \frac{dr^2}{1 + \frac{r^2}{l^2}} + r^2 d\phi^2$$

3.1.3 Modèle de Klein de l'espace Anti-de-Sitter

On peut projeter radialement la quadrique $Q = -1$ sur \mathbb{S}^3 , sphère unité dans \mathbb{R}^4 , (ou sur l'espace projectif $\mathbb{RP}^3 = \mathbb{S}^3 / \pm Id$). En fait, il ne faut pas se représenter la projection sur la sphère euclidienne mais plutôt faire le quotient de \mathbb{R}^4 par les homothéties de rapports strictement positifs.

Notons cette projection π et son image, munie de l'image de la métrique lorentzienne, AdS_3 .

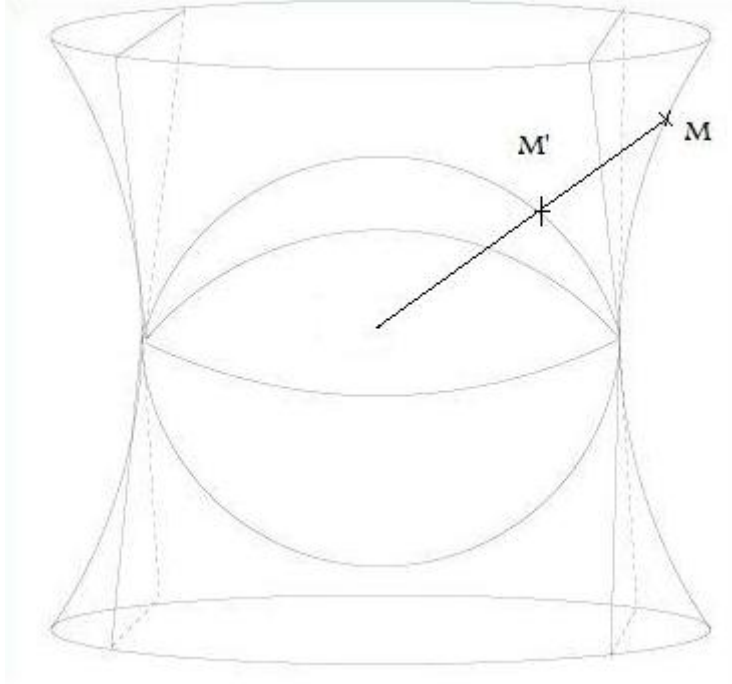


FIGURE 2 – Projection sur l'espace projectif

On peut remarquer que le signe de Q est conservé par cette transformation (en effet on ne fait que multiplier par un nombre positif). On peut même voir que $\mathbb{A}dS_3 = \{p \in \mathbb{S}^3, Q(p) > 0\}$. Sa frontière, dans l'espace projectif, est donc $\{p \in \mathbb{S}^3, Q(p) = 0\}$.

Coupons par l'hyperplan $\{x_1 = 0\}$ et passons pour $x_1 > 0$ en coordonnées projectives $(\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}, \frac{x_4}{x_1})$. Alors $Q = 0$ devient :

$$-x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0 \text{ soit : } -\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2 + \left(\frac{x_3}{x_1}\right)^2 + \left(\frac{x_4}{x_1}\right)^2 = 1$$

On obtient alors que $\mathbb{A}dS_3$ est l'intérieur d'un hyperboloïde à une nappe (ie le domaine ouvert bordé par un hyperboloïde à une nappe). On peut ainsi définir le bord dit *conforme* de $\mathbb{A}dS_3$ comme sa frontière dans l'espace projectif. Cet hyperboloïde sera noté H dans toute la suite.

Les géodésiques sont alors les intersections entre $\mathbb{A}dS_3$ et les droites projectives de $\mathbb{R}P^3$. Les droites qui ne rencontrent pas H sont de type temps, celles qui sont tangentes en un point de H sont de type lumière et celles qui rencontrent H en deux points distincts sont de type espace. On remarque que tout point est dans le futur (lieu des points pouvant être atteint par une courbe de type temps orientée vers le futur) et le passé de tout point. La structure causale d'Anti-de-Sitter est donc triviale.

3.1.4 Construction du trou noir BTZ

On réalise le quotient d'une partie U de $\mathbb{A}dS_3$ par h , une isométrie de Q . Puisque $O(2,2)$ est le groupe des isométries de Q (sous groupe fermé de $GL(2+2) = \{M, MJM = J$ où

$J = \text{Diag}(-1, -1, 1, 1)$ tel que le déterminant vaut ± 1), le groupe des isométries de AdS_3 contient $0(2,2)$ et uniquement lui. On a vu qu'un sous-groupe était isomorphe à $SL(2, \mathbb{R}) \times SL(2, \mathbb{R})$.

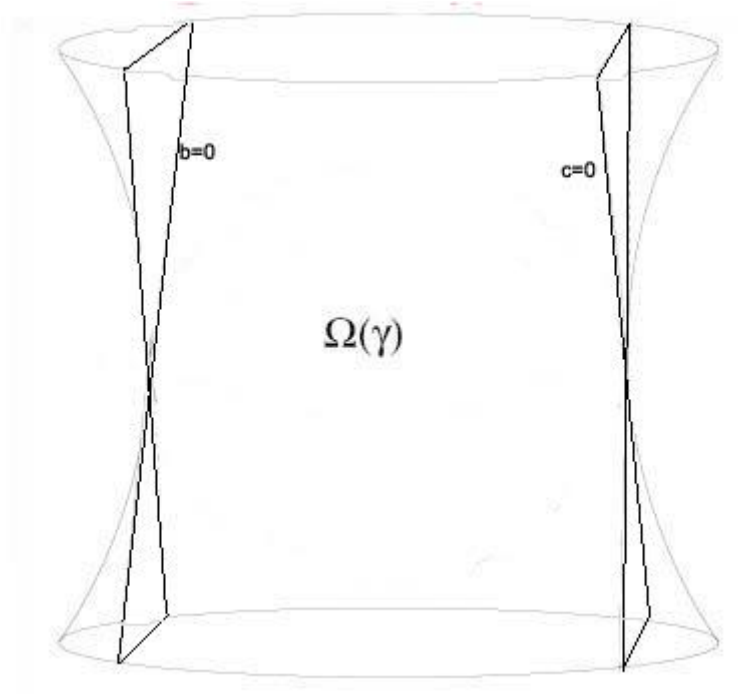


FIGURE 3 – Domaine $\Omega(\gamma)$

On veut que le résultat soit causal, c'est-à-dire sans géodésique de type temps fermée. Ainsi, il nous faut, quel que soit x dans U , aucune géodésique de type temps ou lumière joignant x à $h(x)$. Si, $\gamma \in SL(2, \mathbb{R}) \times SL(2, \mathbb{R})$, on notera $\Omega(\gamma)$, le domaine qui réalise la condition de causalité précédente. Cet espace est maximal, au sens où on ne peut pas passer au quotient sur un espace plus gros sans avoir de problème.

On note alors $T(\gamma)$, le quotient de $\Omega(\gamma)$ par l'action engendrée par γ .

A isométrie près, cet espace ne va dépendre que de la classe de conjugaison des éléments de γ . On va expliciter ce que l'on entend par classe de conjugaison. En fait, si $M \in SL(2, \mathbb{R})$, $\det M = 1$. Donc $ad - bc = 1$ (avec les notations habituelles pour les éléments de la matrice). Ainsi, les valeurs propres de M vérifient : $\lambda^2 - (a+d)\lambda + 1 = 0$. Il y a donc 3 classes de conjugaisons pour M :

- si $|tr M| > 2$, M est hyperbolique (homothétie, un point fixe réel),
- si $|tr M| = 2$, M est parabolique (translation, pas de point fixe),
- si $|tr M| < 2$, M est elliptique (rotation, point fixe i).

Dans le cas hyperbolique, les racines sont réelles, distinctes et conjuguées.

On prend γ hyperbolique. Alors, soient $r_+ > r_- \geq 0$ tels que l'on ait (quitte à changer de

coordonnées) :

$$\gamma_1 = \begin{bmatrix} \exp \pi(r_+ - r_-) & 0 \\ 0 & \exp -\pi(r_+ - r_-) \end{bmatrix}$$

et

$$\gamma_2 = \begin{bmatrix} \exp \pi(r_+ + r_-) & 0 \\ 0 & \exp -\pi(r_+ - r_-) \end{bmatrix}$$

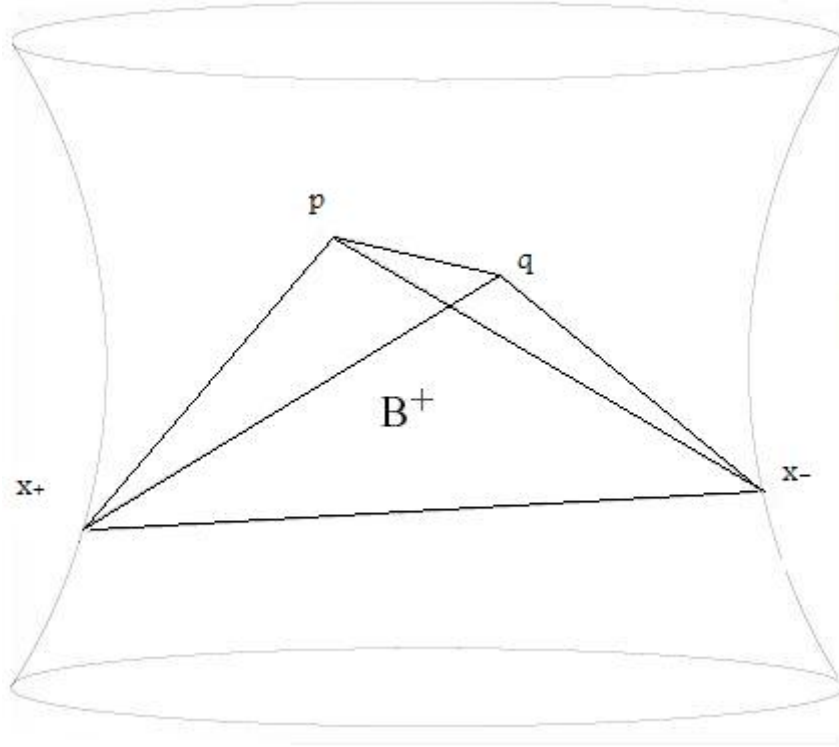


FIGURE 4 – Autre représentation du trou noir avant passage au quotient

Dans la suite, on regarde le cas statique $r_- = 0$. On veut vérifier que pour passer de (id, id) à γ , le chemin suivant soit de type espace. Pour cela, il suffit de vérifier que le vecteur tangent en un point $t \in [0; 1]$ est de type espace (par isométrie) :

$$Y^t(g) = \begin{bmatrix} \exp t\pi r_+ & 0 \\ 0 & \exp -t\pi r_+ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \exp -t\pi r_+ & 0 \\ 0 & \exp t\pi r_+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & \exp 2t\pi r_+ b \\ \exp -2t\pi r_+ c & d \end{bmatrix}$$

La dérivée en $t = 0$ vaut alors :

$$\begin{bmatrix} 0 & 2\pi r_+ b \\ -2\pi r_+ c & d \end{bmatrix}$$

Et sa norme (-det) est donc : $-4\pi r_+^2 bc$.

Le domaine $\Omega(\gamma)$ est ainsi $\{M \in SL(2, \mathbb{R}), \det M = 1 \text{ et } bc < 0\}$. Repassons en coordonnées projectives :

$$bc = (x_4 - x_2)(x_4 + x_2) = x_4^2 - x_2^2 < 0$$

Donc, le domaine est défini par la condition $|\frac{x_4}{x_1}| < |\frac{x_2}{x_1}|$ soit, $-1 < \frac{x_3}{x_1} < 1$. $\Omega(\gamma)$ est le domaine compris entre les plans $\{\frac{x_3}{x_1} = -1\}$ et $\{\frac{x_3}{x_1} = +1\}$ On représente ce domaine sur l'hyperboloïde en figure 3.

Les deux plans sont tangents en x_+ et x_- à l'hyperboloïde, ils s'intersectent à l'infini, dans \mathbb{RP}^3 , selon une droite ($\{b = c = 0\}$, le lieu des points fixes de γ ou encore des matrices symétriques). On note p et q les points d'intersection entre cette droite et l'hyperboloïde. On peut alors représenter notre domaine comme sur la figure 4. On a donc 2 zones invariantes sous γ formées par les tétraèdres de sommets p, q, r_+ , r_- que l'on peut noter B^+ et B^- (avec par exemple, B^+ dans le futur de B^-). La zone B^+ est vraiment le trou noir (après être passé au quotient) car aucun rayon orienté dans le futur ne peut en sortir. A l'inverse, aucun rayon orienté vers le futur ne peut entrer dans B^- : c'est un trou blanc. On a donc obtenu un espace-temps à courbure constante mais qui avec une singularité dans sa structure causale (géodésiques causales orientées vers le futur qui s'arrête en temps fini), contient un trou noir.

3.2 Métrique du trou noir BTZ

Dans la suite, $\hbar = k = 8G = c = 1$.

Pour pouvoir étudier quelques propriétés physiques de ces trous noirs, on a besoin de connaître la forme de la métrique. Celle-ci nécessite un raisonnement trop compliqué (avec notamment l'utilisation des vecteurs de Killing) et n'est pas l'objet de ce travail. On admettra donc le résultat suivant : l'action $I = \frac{1}{2} \int \sqrt{-g}(R - 2\Lambda)d^2xdt + B$ avec B un terme de surface, induit les équations du mouvement qui sont vérifiées par la métrique des trous noirs BTZ :

pour $\Lambda = -1$:

$$ds^2 = -(-M + r^2 + \frac{J^2}{4r^2})dt^2 + \frac{dr^2}{-M + r^2 + \frac{J^2}{4r^2}} + r^2(d\phi - \frac{J}{2r^2}dt)^2$$

Sinon, posons $\Lambda = -\frac{1}{l^2}$, alors :

$$ds^2 = -(-M + \frac{r^2}{l^2} + \frac{J^2}{4r^2})dt^2 + \frac{dr^2}{-M + \frac{r^2}{l^2} + \frac{J^2}{4r^2}} + r^2(d\phi - \frac{J}{2r^2}dt)^2$$

On peut interpréter M comme la masse et J comme un moment angulaire avec $M \geq 0$ et $|J| \leq Ml$.

En effet, on observe que la métrique est singulière pour :

$$r_{\pm}^2 = \frac{Ml^2}{2}(1 \pm \sqrt{1 - \frac{J^2}{M^2l^2}})$$

r_+ est l'horizon des événements du trou noir. Pour avoir un horizon (nécessaire pour cacher la singularité, sinon elle est nue et donc non-physique par le principe de censure cosmique), on doit avoir $M \geq 0$ et $|J| \leq Ml$. De là, on tire les expressions suivantes :

$$M = \frac{r_+^2 + r_-^2}{l^2} \text{ et } J = \frac{2r_+r_-}{l}$$

3.2.1 Le cas $J = 0, M = -1$

Dans ce cas, l'horizon disparaît mais la singularité aussi :

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{r^2}{l^2}\right)dt^2 + \frac{dr^2}{1 + \frac{r^2}{l^2}} + r^2 d\phi^2$$

Cette solution (Anti-de-Sitter) est donc permise mais elle est séparée du spectre continu des trous noirs possibles par une unité de masse. Il n'y a donc pas une déformation continue possible de cet état vers le vide.

3.2.2 Le cas $|J| = Ml$

Si $|J| = Ml$,

$$ds^2 = -\left(-M + \frac{r^2}{l^2} + \frac{M^2 l^2}{4r^2}\right)dt^2 + \frac{dr^2}{-M + \frac{r^2}{l^2} + \frac{M^2 l^2}{4r^2}} + r^2 \left(d\phi \pm \frac{Ml}{2r^2} dt\right)^2$$

et $r_+ = r_- = l\sqrt{\frac{M}{2}}$

3.2.3 Le cas $J = M = 0$

Pour obtenir le vide, il suffit de faire disparaître le trou noir ie faire tendre M vers 0 (et donc J aussi d'après 3.2). On obtient alors :

$$ds^2 = -\frac{r^2}{l^2} dt^2 + \frac{l^2 dr^2}{r^2} + r^2 d\phi^2$$

3.3 Equations d'Einstein

Dans la suite, on prendra $J = 0$ c'est-à-dire pas de moment angulaire. Ainsi :

$$ds^2 = -(-M + r^2)dt^2 + \frac{dr^2}{-M + r^2} + r^2 d\phi^2$$

Je vais ensuite voir si elle vérifie les équations d'Einstein. Pour cela, on va commencer par calculer $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$, sachant que $g_{00} = -(-M + r^2)$, $g_{11} = \frac{1}{-M+r^2}$ et $g_{22} = r^2$:

$$- \Gamma_{\mu\nu}^0 = \frac{1}{2} \frac{1}{M-r^2} (\partial_\mu g_{\nu 0} + \partial_\nu g_{\mu 0} - 0).$$

$$\text{Donc les seules composantes non nulles sont : } \Gamma_{10}^0 = \Gamma_{01}^0 = -\frac{r}{M-r^2}$$

$$- \Gamma_{\mu\nu}^1 = \frac{1}{2} (r^2 - M) (\partial_\mu g_{\nu 1} + \partial_\nu g_{\mu 1} - \partial_1 g_{\mu\nu}).$$

$$\text{Les seules composantes non nulles sont : } \Gamma_{11}^1 = \frac{r}{M-r^2}, \Gamma_{00}^1 = r(r^2 - M) \text{ et } \Gamma_{22}^1 = r(M - r^2)$$

$$- \Gamma_{\mu\nu}^2 = \frac{1}{2r^2} (\partial_\mu g_{\nu 2} + \partial_\nu g_{\mu 2} - \partial_2 g_{\mu\nu}).$$

$$\text{Les seules composantes non nulles sont } \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r}.$$

Pour calculer ensuite les $R_{,\mu\lambda\nu}^\lambda$, on a besoin des dérivées non nulles suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_1 \Gamma_{10}^0 = \partial_1 \Gamma_{01}^0 = -\frac{M+r^2}{(r^2-M)^2} \\ \partial_1 \Gamma_{00}^1 = 3r^2 - M \\ \partial_1 \Gamma_{11}^1 = \frac{M+r^2}{(r^2-M)^2} \\ \partial_1 \Gamma_{22}^1 = M - 3r^2 \\ \partial_1 \Gamma_{12}^2 = \partial_1 \Gamma_{12}^2 = -\frac{1}{r^2} \end{array} \right.$$

De là, calculons les composantes du tenseur de Ricci :

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{22} = R_{202}^0 + R_{212}^1 + R_{222}^2 = (0 + 0 - r^2 - 0) + (M - 3r^2 + r^2 - M + r^2) + (0 + 0 - 0) = -2r^2 \\ R_{00} = R_{000}^0 + R_{010}^1 + R_{020}^2 = (\Gamma_{00}^0(\Gamma_{\rho 0}^0 - \Gamma_{0\rho}^0) + (3r^2 - M + \Gamma_{00}^1\Gamma_{11}^1 - \Gamma_{01}^0\Gamma_{00}^1) + (\Gamma_{00}^1\Gamma_{12}^2 - 0)) \\ = 0 + (r^2 - M) + (r^2 - M) = -2(M - r^2) \\ R_{11} = R_{101}^0 + R_{111}^1 + R_{121}^2 = (\frac{M+r^2}{(r^2-M)^2} + \Gamma_{11}^1\Gamma_{10}^0 - \Gamma_{10}^0\Gamma_{11}^0) + (0 + \Gamma_{11}^0\Gamma_{\rho 1}^1 - \Gamma_{11}^0\Gamma_{1\rho}^1) + (\frac{1}{r^2} + \Gamma_{11}^1\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{12}^2\Gamma_{12}^2) \\ = \frac{1}{M-r^2} + 0 + \frac{1}{M-r^2} = -2\frac{1}{r^2-M} \end{array} \right.$$

Pour $\mu \neq \nu$,

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{\mu 0\nu}^0 = 0 + 0(\text{car}(\mu, \nu) \neq (1, 1)) + 0(\text{car} \mu \neq \nu) - 0(\text{car}(\mu, \nu) \neq (0, 0)) - 0(\text{car}(\mu, \nu) \neq (1, 1)) \\ R_{\mu 1\nu}^1 = 0(\text{car} \mu \neq \nu) - 0(\text{car}(\mu, \nu) \neq (1, 1)) + 0(\text{car} \mu \neq \nu) - 0(\text{car}(\mu, \nu) \neq (0, 0)) \text{ou} (1, 1) \\ R_{\mu 2\nu}^2 = -0(\text{car}(\mu, \nu) \neq (1, 1)) + 0(\text{car} \mu \neq \nu) - 0(\text{car}(\mu, \nu) \neq (2, 2)) \text{ou} (1, 1) \end{array} \right.$$

Donc $R_{\mu\nu} = 0$ pour $\mu \neq \nu$.

Ainsi $R_{\mu\nu} = -2g_{\mu\nu}$ donc $R = -6$ et $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$.

Le trou noir BTZ vérifie les équations d'Einstein dans le vide avec constante cosmologique $\Lambda = -1$.

En fait, si on fait le calcul avec la métrique

$$ds^2 = l^2(-(-M + r^2)dt^2 + \frac{dr^2}{-M + r^2} + r^2d\phi^2)$$

(on introduit un rayon l), alors on trouve que $R_{\mu\nu}$ est inchangé et donc avec $g'_{\mu\nu} = l^2g_{\mu\nu}$:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}(-\frac{6}{l^2})g'_{\mu\nu} = (-\frac{2}{l^2} + \frac{3}{l^2})g'_{\mu\nu} = \frac{1}{l^2}g'_{\mu\nu}$$

Donc

$$\Lambda = -\frac{1}{l^2}$$

Autrement dit, la métrique BTZ ds_{BTZ}^2 vérifie les équations d'Einstein dans le vide avec constante cosmologique $\Lambda (< 0)$. De plus, cet espace-temps est à courbure négative constante.

3.4 Thermodynamique du trou noir BTZ

Un trou noir est caractérisé par des grandeurs thermodynamiques extensives : masse, moment angulaire, entropie ; et intensives : vitesse angulaire à l'horizon et température de Hawking. La relation aire-entropie $S = 4\pi r_+$ donne alors une relation entre S, M et J :

$$M = \frac{S^2}{16\pi^2 l^2} + \frac{4\pi^2 J^2}{S^2}.$$

Or la première loi de la thermodynamique donne : $dM = TdS + \Omega dJ$. D'où :

$$\begin{aligned} \Omega &= \frac{\partial M}{\partial J} \text{ et} & T &= \frac{\partial M}{\partial S} \\ &= \frac{8\pi^2 J}{S^2} & &= \frac{S}{8\pi^2 l^2} - \frac{8\pi^2 J^2}{S^3} \\ &= \frac{r_-}{lr_+} & &= \frac{r_+}{2\pi l^2} - \frac{r_-^2}{2\pi l^2 r_+} \\ & & &= \frac{r_+^2 - r_-^2}{2\pi l^2 r_+} \end{aligned}$$

Cette température est positive ($r_+ \leq r_- \leq 0$) et ne s'annule que pour $r_+ = r_-$. Ainsi, dans le cas du trou noir en rotation extrême ($|J| = Ml$), la température s'annule, mais pas l'entropie. La capacité calorifique à J constant est donc

$$C = T \frac{\partial S}{\partial T}$$

Or,

$$T(r_+, J) = \frac{r_+^2 - \left(\frac{lJ}{2r_+}\right)^2}{2\pi l^2 r_+}$$

Donc :

$$\frac{\partial T}{\partial S}(J = cst) = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial T}{\partial r_+}(r_+ r_- = lJ/2 = cst) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{2\pi l^2} + \frac{3J^2}{8\pi r_+^4} \right) = \frac{1}{8\pi^2 l^2} \left(1 + \frac{3r_-^2}{r_+^2} \right)$$

Ainsi :

$$C = 4\pi r_+ \frac{r_+^2 - r_-^2}{r_+^2 + 3r_-^2}$$

On a donc pu voir que toutes les grandeurs thermodynamiques se comportent bien (pas de singularité) sauf peut-être dans la limite $r_+ = r_-$ (quand la température de Hawking s'annule). Mais, on a vu que la température $T = 0$ ne pouvait être atteinte par un trou noir, ceci signifie donc forcément que la description thermodynamique que nous faisons des trous noirs n'est plus valable dans cette limite.

En général, on interprète la positivité et la non-singularité de la capacité calorifique en disant que le trou noir BTZ est stable thermodynamiquement (ce résultat en dimension 2+1 est exceptionnel car en dimension plus élevée - notamment 3+1 -, ce n'est pas du tout le cas, on a des zones de très forte instabilité).

Conclusion

Grâce à la théorie d'Einstein de la relativité générale, nous avons pu trouver une solution du vide faisant apparaître un trou noir (I. Trous noirs de Schwarzschild). L'évocation du mot "trou noir" fait immédiatement penser à une courbure de l'espace-temps infini, comme dans le cas schwarzschildien. Pourtant, ce type de singularité n'est pas nécessaire, c'est ce que nous avons mis en évidence avec la construction d'un espace-temps à courbure négative constante, solution des équations d'Einstein dans le vide, et présentant, non pas une singularité de courbure mais une singularité dans la structure causale elle-même.

Outre la courbure, nous nous sommes intéressés à quelques rudiments de la thermodynamique des trous noirs. On a ainsi pu voir que l'affirmation "rien ne peut sortir d'un trou noir" est en réalité fausse, puisque Hawking a pu mettre en évidence la présence d'un rayonnement de particules qui ressemble à celui d'un rayonnement thermique.

Références

- [1] M. Banados, M. Henneaux, C. Teitelboim, and J. Zanelli. Geometry of the 2+1 black hole. *Physical Review*, Nov 1992.
- [2] M. Banados, C. Teitelboim, and J. Zanelli. The black hole in three dimensionnal spacetime. *Physical Review Letters*, Avril 1992.
- [3] Thierry Barbot. Géométrie hyperbolique et anti-de-sitter. Notes de cours de DEA 2002-2003.
- [4] Thierry Barbot. Géométrie lorentzienne, causalité et convexité. Cours M2R ENS Lyon, 2005-2006.
- [5] Thierry Barbot. G(x)-structures et trous noirs. A paraître dans les Proceedings de l'École CIMPA-UNESCO-ALGERIE, El-Oued 2005 : « Géométries et Dynamiques Riemanniennes et Pseudo-riemanniennes, et Applications ».
- [6] Thierry Barbot, François Béguin, and Abdelghani Zeghib. Constant mean curvature foliations of globally hyperbolic spacetimes locally modelled on ads3. *Geometriae Dedicata*, 2007.
- [7] J. M. Bardeen, B. Carter, and S. W. Hawking. The four laws of black hole mechanics. *Commun. math. Phys.*, 1973.
- [8] J. D. Bekenstein. Black holes and entropy. *Physical Review D.*, 1973.
- [9] L. Blanchet. Introduction à la relativité générale. Notes de cours de M1 donné à l'ENS.
- [10] S.M. Carroll. Lecture notes on general relativity. [http ://preposterousuniverse.com/grnotes/](http://preposterousuniverse.com/grnotes/).
- [11] S. W. Hawking. Particle creation by black holes. *Commun. Math. Phys.*, 46 :206.
- [12] S. W. Hawking. Black hole explosions? *Nature*, 1974.
- [13] S. W. Hawking. Black holes and thermodynamics. *Physical Review D.*, 1976.
- [14] C. W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler. *Gravitation*.
- [15] H. Ohanian and R. Ruffini. *Gravitation and spacetime*.
- [16] B. O'Neil. *Semi-Riemanian geometry with application to relativity*. Academic press.
- [17] H. Quevedo and A. Sanchez. Geometric description of btz black holes thermodynamics. *Physical Review D.*, 2008.
- [18] R. M. Wald. *General Relativity*. university of Chicago press.
- [19] J. A. Wolf. *Spaces of constant curvature*. McGraw-Hill book company.