

# Points de Lagrange et Orbites de Halo

Jean-Luc CORON

September 7, 2011

## Contents

<b>1</b>	<b>Existence et Stabilité des points de Lagrange du problème à trois corps dans le système Soleil-Terre</b>	<b>2</b>
1.1	Lieux des points de Lagrange . . . . .	2
1.2	Stabilité des points de Lagrange . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Théorie des Orbites et Variétés invariantes</b>	<b>4</b>
2.1	Orbites périodiques . . . . .	4
2.2	Matrice de Monodromie . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Calcul numérique des orbites périodiques</b>	<b>6</b>
3.1	Cas des orbites planaires . . . . .	7
3.2	Cas des orbites non planaires . . . . .	9
<b>4</b>	<b>Approximation de Richardson</b>	<b>12</b>
<b>5</b>	<b>Discussion</b>	<b>12</b>

Le but est d'étudier l'existence de variété invariante dans le problème à trois corps Soleil-Terre-Lune. L'intérêt est de pouvoir programmer des missions de voyage Terre-Lune plus économique en carburant. En effet, avec les variétés invariantes on peut aller jusqu'à effectuer des missions spatiales presque gratuites à condition toutefois de s'arracher de l'orbite terrestre.

Pour commencer ce qui ne va être qu'une simple introduction à cet étude, nous allons tout d'abord étudier les points fixes de ce problème à trois corps appelés points de Lagrange et nous allons aussi parler de leur stabilité. Nous allons ensuite dans un second temps aborder quelque chose d'un petit peu plus complexe qui est l'étude d'orbite périodique et quasi-périodique au voisinage de ces points ainsi que l'existence des variétés invariantes.

# 1 Existence et Stabilité des points de Lagrange du problème à trois corps dans le système Soleil-Terre

## 1.1 Lieux des points de Lagrange

Dans le problème à trois corps qui nous intéresse, on étudie la trajectoire d'une masse mobile  $m$  soumise aux forces de gravité de deux autres corps  $m_1$  et  $m_2$  (dans la pratique il s'agit du couple soleil-terre ou terre-lune le plus souvent). On supposera ici que la masse mobile  $m$  ne perturbe pas la trajectoire des deux autres corps. On supposera aussi que toutes les masses sont ponctuelles et on ne tiendra pas compte des phénomènes relativistes.

On peut s'intéresser à deux cas : celui où le mouvement de la particule est dans le plan des orbites des deux autres masses et le cas général où elle se déplace dans l'espace tri-dimensionnel tout entier.

On simplifie ensuite le problème en se plaçant dans le repère inertiel des deux masses avec donc pour origine le centre de masse  $m_1$  et  $m_2$ . On adimensionne ensuite le problème afin de diminuer le nombre d'inconnu : on pose la distance  $m_1$   $m_2$  à 1, la somme des masses à 1 et la vitesse angulaire des masses autour du centre de masse à 1.

On obtient ainsi de nouvelles équations du mouvement dans le repère tournant où il faut prendre en compte les forces d'attraction mais aussi les forces d'inertie.

On note  $X = (x, y, z, v_x, v_y, v_z)^T = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)^T$  afin d'avoir une écriture matricielle du problème et on obtient alors comme équation du mouvement,

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_4 \\
\dot{x}_2 &= x_5 \\
\dot{x}_3 &= x_6 \\
\dot{x}_4 &= 2x_5 + x_1 - (1 - \mu) \frac{x_1 - x_1^0}{r_1^3} - \mu \frac{x_1 - x_2^0}{r_2^3} \\
\dot{x}_5 &= -2x_4 + x_2 - (1 - \mu) \frac{x_2}{r_1^3} - \mu \frac{x_2}{r_2^3} \\
\dot{x}_6 &= -(1 - \mu) \frac{x_3}{r_1^3} - \mu \frac{x_3}{r_2^3}
\end{aligned}$$

On note ici par  $r_1$  et  $r_2$  les distances du mobile aux masses  $m_1$  et  $m_2$ ,  $x_1^0$  et  $x_2^0$  désignant les positions respectives des masses  $m_1$  et  $m_2$ ,  $\mu$  étant la masse de  $m_2$  adimensionnée :  $\mu = \frac{m_2}{m_1 + m_2}$

On a donc une équation de la forme  $\dot{X} = f(X)$  et on cherche à résoudre  $f(X) = 0$  Tout d'abord avec l'équation en  $x_1, x_2$  et  $x_3$  on peut en déduire immédiatement qu'on a  $x_4 = x_5 = x_6 = 0$ . La dernière équation nous donne  $x_3 = 0$ . Il nous reste alors à résoudre

$$\begin{aligned}
x_1 - (1 - \mu) \frac{x_1 - x_1^0}{r_1^3} - \mu \frac{x_1 - x_2^0}{r_2^3} &= 0 \\
x_2 - (1 - \mu) \frac{x_2}{r_1^3} - \mu \frac{x_2}{r_2^3} &= 0
\end{aligned}$$

On commence par déterminer les points  $L_1, L_2$  et  $L_3$  qui sont situés sur l'axe  $m_1 m_2$  c'est à dire tel que  $x_2 = 0$ . On résout alors

$$x_1 - \frac{1 - \mu}{(x_1 + \mu)^2} - \frac{\mu}{(x_1 - 1 + \mu)^2} = 0$$

Pour trouver les trois points de Lagrange, il suffit de trouver les solutions de ce polynôme de degré 5 et où on ne peut trouver de solution générale explicite.. On montre qu'il n'y a que trois solutions réelles en utilisant la formule de Cauchy et en utilisant un chemin suffisamment près de l'axe. On peut en effet montrer que les solutions sont contenues dans une bande infini sur l'axe imaginaire mais restreinte sur l'axe des abscisses grâce au critère de Routh.

Il nous reste alors à déterminer les points  $L_4$  et  $L_5$  où  $x_2 \neq 0$  par des projections selon différents axes de l'équation on obtient successivement les relation  $r_1 = r_2$  et  $r_1 = r_2 = 1$  ce qui nous donne précisément l'emplacement des points  $L_4$  et  $L_5$  à  $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$  et à  $(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$

## 1.2 Stabilité des points de Lagrange

Maintenant que l'on sait qu'il est possible de déterminer les positions de chaque point de Lagrange, il nous reste à étudier leur stabilité.

Pour étudier la stabilité d'un système on linéarise l'équation différentielle associé en un point d'équilibre afin d'obtenir une équation de la forme

$$\dot{X} = AX + o(X)$$

et on regarde ensuite les valeurs propres de la matrice  $A$ . Si une valeur propre est de partie réelle positive, alors le point d'équilibre est instable. Ceci est le cas pour les points  $L_1$ ,  $L_2$  et  $L_3$  que ce soit dans le cas planaire comme dans le cas spatiale. L'étude est plus délicate pour les points  $L_4$  et  $L_5$  où l'on peut prouver qu'ils sont stables sous certaines conditions.

On considèrera dans la suite que les points  $L_1$ ,  $L_2$  et  $L_3$  sont instables et que les points  $L_4$  et  $L_5$  sont stables.

## 2 Théorie des Orbites et Variétés invariantes

### 2.1 Orbites périodiques

L'objectif ici est de montrer l'existence des orbites de halo et de Lyapunov. Pour cela on se sert du théorème de Lyapunov-Poincaré qui sous réserve de condition sur le spectre de la linéarisation de l'équation du mouvement.

**Théorème de Lyapunov-Poincaré :** Soit  $\dot{x} = H(x)$  un système Hamiltonien de  $\mathbb{R}^{2n}$ ,  $x_0$  une position d'équilibre identifiée à 0,  $A = \frac{\partial H}{\partial x}(0)$  la matrice du système linéarisé. On suppose que le spectre de  $A$  est de la forme  $\text{Sp}(A) = \pm i\omega, \lambda_3, \dots, \lambda_{2n}$ , où  $\omega > 0$ . Si  $\frac{\lambda_j}{i\omega} \notin \mathbb{Z}$  pour  $j = 3, \dots, 2n$ , alors il existe une famille à un paramètre d'orbites périodiques issues de 0.

Ce théorème, appliqué au problème à trois corps restreint au cas planaire nous donne une famille à un paramètre d'orbites périodiques issues de  $L_1$ ,  $L_2$  et  $L_3$ . Lorsque l'on applique deux fois ce théorèmes aux points  $L_4$  et  $L_5$ , on obtient une famille d'orbite périodique à deux paramètres. On appelle, généralement, ces orbites des orbites de Lyapunov.

On applique ensuite le théorème dans le cas spatial on obtient une famille à deux paramètres en  $L_1$ ,  $L_2$  et  $L_3$  et sous certaines conditions on peut obtenir une famille d'orbite à trois paramètre autour de  $L_4$  et  $L_5$ . Lorsque ces orbites ne sont pas planaire, on les appelle orbite de halo.

## 2.2 Matrice de Monodromie

Nous allons maintenant aborder un nouvel objet qu'est la matrice de monodromie. Cette matrice permet via l'application de premier retour de Poincaré de prédire le comportement du système lorsqu'il est proche d'une orbite périodique.

Qu'est-ce que la matrice de monodromie ? Tout d'abord pour la définir, il faut poser  $T$  en tant que période de l'orbite de halo associé que l'on souhaite étudier. La matrice de monodromie  $M$  sera alors le linéarisé en fonction des conditions initiales de ce qui se passera après un instant  $T$ . Dis autrement, si on pose  $X(x_0, T)$  la fonction qui à une condition initiale  $x_0$  nous donne l'état final après un instant  $T$ ,  $M = \frac{\partial X(x_0, T)}{\partial x_0}$ .

Nous allons maintenant trouver les valeurs propres de cette matrice.

Première chose, cette matrice est symplectique conformément à [1, Théorème II.A.3] "The fundamental matrix solution  $Z(t, t_0)$  of a linear Hamiltonian system is symplectic for all  $t, t_0 \in \mathbb{I} [\dots]$ ". Ceci implique notamment qu'elle est de déterminant 1.

*Preuve :* On pose  $U(t) := Z(t, t_0)^t J Z(t, t_0)$  ( $J$  étant la matrice scalaire). Comme  $Z(t_0, t_0) = I$ , on a  $U(t_0) = J$ .  $\dot{U} = \dot{Z}^t J Z + Z^t J \dot{Z} = Z^t (A^T J + J A) Z$  où  $A$  est le système Hamiltonien et par définition d'un système Hamiltonien on a  $A^T J + J A = 0$  d'où le résultat.

On montre ensuite que 1 est une valeur propre de la matrice de monodromie comme le montre [2, Corollaire II.7] en montrant que  $\dot{\phi}(0)$  est vecteur propre de valeur propre 1.

Si  $\lambda$  est valeur propre, on peut prouver que  $\lambda^{-1}$  et  $\bar{\lambda}$  sont valeurs propres grâce à [1, Théorème C.1]. Ce qui nous permet de montrer que 1 est valeur propre double.

Grâce à l'instabilité dans le cas planaire, on en déduit qu'on a deux autres valeurs propres réelles  $\lambda_1 \lambda_2$  tel que  $\lambda_1 > 1, \lambda_2 < 1$ .

On étend ensuite au cas spatial qui n'introduit pas d'instabilité supplémentaire ce qui nous permet de voir qu'on a deux autres valeurs propres complexe conjugués de module 1.

On a ainsi 1 comme valeur propre double,  $\lambda_1 < 1, \lambda_2 > 1, \lambda_3 = \bar{\lambda}_4, |\lambda_3| = |\lambda_4|$ .

Pourquoi étudie-t-on ces valeurs propres ? Tout simplement parce qu'il se trouve que la matrice de monodromie possède les mêmes valeurs propres que le linéarisé de l'application de premier retour de Poincaré. L'application de

premier retour de Poincaré est l'application qui étant donné des conditions initiales renvoi la première intersection de la trajectoire et de l'hyperplan tangent à la vitesse initiale.

On obtient ainsi quelques comportements au voisinages de l'orbite : les tubes formés par l'orbite de Halo prolongés par les vecteurs propres de  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont respectivement stables et instables. On obtient avec une des valeurs propres égale à 1 un mode non instable, l'autre valeur propre étant associée à la variation de l'énergie. La paire de valeur propre conjuguée étant associée au mouvement de rotation des trajectoires près de l'orbite de Halo.

### 3 Calcul numérique des orbites périodiques

Pour le calcul numérique des orbites périodiques, on applique une méthode de tir : on part d'une certaine condition initiale, et selon le résultat obtenue, on corrige l'erreur en modifiant les conditions initiales. Cette méthode implique donc que l'on soit suffisamment proche de la solution si on ne veut pas prendre trop de temps à trouver la solution. Ceci est encore plus flagrant lorsque l'on sait que pour faire les corrections de conditions initiales on peut utiliser des méthodes qui divergent lorsque l'on est trop loin de la solution comme cela sera le cas dans la suite où l'on utilisera une méthode de Newton.

Comment va-t-on faire pour ne serait-ce que quantifier cet erreur à la solution ? Tout d'abord il faut remarquer une chose, c'est que lorsque l'on se place dans des coordonnées centrée au point de Lagrange avec les bons axes, on a une symétrie du problème par inversion du temps et donc en inversant le temps on obtient une autre solution. Cela signifie que si l'on prend, par exemple, comme condition initiale un point dans le plan  $y=0$  dont la vitesse est orthogonale à ce plan et que le système revient dans un état similaire, c'est à dire qu'il est dans le plan  $y=0$  de vecteur vitesse porté par  $y$ , alors il devra faire tout le chemin symétrique par rapport au plan  $y=0$  du chemin qu'il a déjà parcouru ce qui assure le fait que l'orbite est périodique. On notera  $t$  le premier instant où le système coupe le plan  $y=0$  de cette façon. On aura donc un système de période  $T = 2t$ .

On a donc l'équation

$$\begin{pmatrix} y(t) \\ \dot{x}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

à résoudre, sachant que les fonction  $y$ ,  $\dot{x}$ ,  $\dot{z}$  sont fonction des conditions initiales  $x_0$ ,  $z_0$  et  $\dot{y}_0$  et que  $t$  fait aussi partie de l'équation. Sachant que les

orbites de Halo comme on a pu le voir dans l'application du théorème de Lyapunov-Poincaré dépendent d'un paramètre, on peut fixer une inconnu (sauf bien évidemment dans le cas où toutes les orbites ont la même valeur pour cette inconnu) et décider que ce sera le paramètre.

### 3.1 Cas des orbites planaires

Dans le cas planaire, on pourrait utiliser une méthode de Newton afin de résoudre le problème, mais il existe une autre méthode applicable uniquement dans le cas planaire. En effet, dans le cas planaire,  $z = 0$  et donc il nous reste que deux inconnues :  $x_0$  et  $\dot{y}_0$ . Sachant qu'on peut choisir une de ces deux inconnues comme paramètre des orbites de Halo, ici cela sera  $x_0$ , cela signifie que l'on n'a plus qu'une seule inconnue à déterminer. Or, dans ce cas, en faisant différents tests avec des valeurs astucieusement choisies, on peut par une méthode de dichotomie des cas déterminer la bonne vitesse initiale.

En effet, on va demander au logiciel de calcul numérique que l'on a choisit de tracer la trajectoire pour une certaine vitesse initiale, pour une précision assez faible (de l'ordre d'un chiffre significatif) on va aboutir à deux cas : la vitesse initiale est trop grande et le mobile part à l'infini très rapidement ou la vitesse initiale est trop faible et le mobile reste au voisinage de la terre. On peut ainsi obtenir un encadrement de la bonne vitesse initiale. Ce principe de dichotomie des cas va se poursuivre lorsque l'on rajoutera plus de précision à la vitesse initiale, ce qui nous permettra d'obtenir assez rapidement la vitesse initiale avec une précision arbitraire.

On peut bien évidemment formalisé ce procédé en demandant au logiciel de calcul de regarder le signe de la vitesse selon  $x$  lorsque la trajectoire coupe la droite  $y = 0$  et obtenir un encadrement de la même manière de précédemment. Le seul problème est qu'on revient au problème de la méthode de Newton : pour que celle-ci converge il faut être suffisamment proche des conditions initiales. Dans le cas précédent, cette problématique se voit dans le fait qu'il faut que la trajectoire coupe la droite  $y=0$  et de manière orthodoxe car dans le cas où la vitesse est nulle, le signe de la vitesse selon  $x$  peut prendre n'importe quelle valeur.

Ci-dessous, le programme et le résultat obtenu autour du point  $L_1$

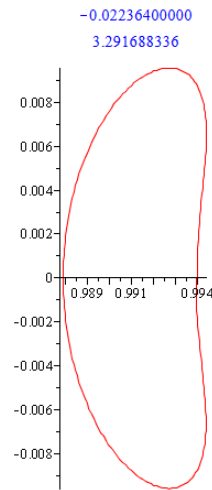
```

Tps := proc(X, A) local mu, rh, f1, f2, f3, f4, f5, f6, Condiini, sol, z, T;
mu := 3.04036 · 10-6; rh :=  $\left(\frac{\mu}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$ ;
f1 := diff(x1(t), t) = x4(t);
f2 := diff(x2(t), t) = x5(t);
f3 := diff(x3(t), t) = x6(t);
f4 := diff(x4(t), t) = 2 · x5(t) + x1(t) -  $\frac{(1 - \mu) \cdot (x1(t) + \mu)}{\text{sqrt}((x1(t) + \mu)^2 + x2(t)^2 + x3(t)^2)^3}$  -  $\frac{\mu \cdot (x1(t) + \mu - 1)}{\text{sqrt}((x1(t) + \mu - 1)^2 + x2(t)^2 + x3(t)^2)^3}$ ;
f5 := diff(x5(t), t) = -2 · x4(t) + x2(t) -  $\frac{(1 - \mu) \cdot x2(t)}{\text{sqrt}((x1(t) + \mu)^2 + x2(t)^2 + x3(t)^2)^3}$  -  $\frac{\mu \cdot x2(t)}{\text{sqrt}((x1(t) + \mu - 1)^2 + x2(t)^2 + x3(t)^2)^3}$ ;
f6 := diff(x6(t), t) = -  $\frac{(1 - \mu) \cdot x3(t)}{\text{sqrt}((x1(t) + \mu)^2 + x2(t)^2 + x3(t)^2)^3}$  -  $\frac{\mu \cdot x3(t)}{\text{sqrt}((x1(t) + \mu - 1)^2 + x2(t)^2 + x3(t)^2)^3}$ ;
Condiini := x1(0) = 1 - mu - rh  $\left(1 - \frac{1}{3} \cdot rh - \frac{1}{9} \cdot rh^2\right)$  + X, x2(0) = 0, x3(0) = 0, x4(0) = 0, x5(0) = A, x6(0) = 0;
sol := dsolve({f1, f2, f3, f4, f5, f6, Condiini}, {x1(t), x2(t), x3(t), x4(t), x5(t), x6(t)}, numeric, output = listprocedure);
z := rhs(sol[3]); Digits := 15; T := fsolve(z(t) = 0, t = 0.1..5); Digits := 10;
T; end;

Cal := proc(X, A0, n1, n2) local mu, rh, f1, f2, f3, f4, f5, f6, Condiini, A, sol, x, y, T, vx, i;
mu := 3.04036 · 10-6; rh :=  $\left(\frac{\mu}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$ ; A := A0; vx := 0;
f1 := diff(x1(t), t) = x4(t);
f2 := diff(x2(t), t) = x5(t);
f3 := diff(x3(t), t) = x6(t);
f4 := diff(x4(t), t) = 2 · x5(t) + x1(t) -  $\frac{(1 - \mu) \cdot (x1(t) + \mu)}{\text{sqrt}((x1(t) + \mu)^2 + x2(t)^2 + x3(t)^2)^3}$  -  $\frac{\mu \cdot (x1(t) + \mu - 1)}{\text{sqrt}((x1(t) + \mu - 1)^2 + x2(t)^2 + x3(t)^2)^3}$ ;
f5 := diff(x5(t), t) = -2 · x4(t) + x2(t) -  $\frac{(1 - \mu) \cdot x2(t)}{\text{sqrt}((x1(t) + \mu)^2 + x2(t)^2 + x3(t)^2)^3}$  -  $\frac{\mu \cdot x2(t)}{\text{sqrt}((x1(t) + \mu - 1)^2 + x2(t)^2 + x3(t)^2)^3}$ ;
f6 := diff(x6(t), t) = -  $\frac{(1 - \mu) \cdot x3(t)}{\text{sqrt}((x1(t) + \mu)^2 + x2(t)^2 + x3(t)^2)^3}$  -  $\frac{\mu \cdot x3(t)}{\text{sqrt}((x1(t) + \mu - 1)^2 + x2(t)^2 + x3(t)^2)^3}$ ;

for i from n1 to n2 do
while vx ≥ 0 do
A := A - 10-4;
Condiini := x1(0) = 1 - mu - rh  $\left(1 - \frac{1}{3} \cdot rh - \frac{1}{9} \cdot rh^2\right)$  + X, x2(0) = 0, x3(0) = 0, x4(0) = 0, x5(0) = A, x6(0) = 0;
sol := dsolve({f1, f2, f3, f4, f5, f6, Condiini}, {x1(t), x2(t), x3(t), x4(t), x5(t), x6(t)}, numeric); T := Tps(X, A);
vx := rhs(sol)[5]; if rhs(sol)[2] ≥ 0.9896 then vx := 0; else if;
od; A := A + 10-4; vx := 0;
od; print(A);
Condiini := x1(0) = 1 - mu - rh  $\left(1 - \frac{1}{3} \cdot rh - \frac{1}{9} \cdot rh^2\right)$  + X, x2(0) = 0, x3(0) = 0, x4(0) = 0, x5(0) = A, x6(0) = 0;
sol := dsolve({f1, f2, f3, f4, f5, f6, Condiini}, {x1(t), x2(t), x3(t), x4(t), x5(t), x6(t)}, numeric); T := Tps(X, A);
print(2, T);
x := t → rhs(sol)[2]; y := t → rhs(sol)[3]; plot([x, y, 0..2 · T], scaling = constrained);
end;
Cal(0.004, -0.02, 3, 6);

```





### 3.2 Cas des orbites non planaires

Le paramètre d'ordre sera cette fois l'amplitude selon  $z$  donc  $z_0$ . La dernière méthode ne peut s'appliquer dans le cas des orbites non planaire car il y a deux grandeurs à faire varier ce qui brise la dichotomie. On est alors ramené à faire une méthode de Newton. On doit résoudre l'équation

$$g(x_0, \dot{y}_0, z_0, t_0) = \begin{pmatrix} y(t_0) \\ \dot{x}(t_0) \\ \dot{z}(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

où  $y, \dot{x}, \dot{z}$  sont les solutions avec les conditions initiales  $x_0, \dot{y}_0, z_0$ . Ce qui réécrit en terme de flot nous donne

$$g(X_0, t_0) = \begin{pmatrix} \Phi_2(X_0, t_0) \\ \Phi_4(X_0, t_0) \\ \Phi_6(X_0, t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

où

$$X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \\ z_0 \\ 0 \\ \dot{y}_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

traduit les conditions initiales du système.

La méthode de Newton pour trouver le point  $g(x)=0$  consiste à faire la récurrence  $x_{n+1} = x_n - Dg(x_n)^{-1}.g(x_n)$ . On va donc effectuer la récurrence

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ \dot{y}_{n+1} \\ t_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ \dot{y}_n \\ t_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_n}(X_n, t_n) & \frac{\partial \Phi_2}{\partial \dot{y}_n}(X_n, t_n) & \frac{\partial \Phi_2}{\partial t_n}(X_n, t_n) \\ \frac{\partial \Phi_4}{\partial x_n}(X_n, t_n) & \frac{\partial \Phi_4}{\partial \dot{y}_n}(X_n, t_n) & \frac{\partial \Phi_4}{\partial t_n}(X_n, t_n) \\ \frac{\partial \Phi_6}{\partial x_n}(X_n, t_n) & \frac{\partial \Phi_6}{\partial \dot{y}_n}(X_n, t_n) & \frac{\partial \Phi_6}{\partial t_n}(X_n, t_n) \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \Phi_2(X_0, t_0) \\ \Phi_4(X_0, t_0) \\ \Phi_6(X_0, t_0) \end{pmatrix}$$

Ce qui donne en introduisant la matrice résultante,  $\Phi(X_0, t) = R(t).X_0$  qui vérifie l'équation  $\dot{R}(t) = df(x(t)).R(t)$ , où  $f$  est telle que  $\dot{X} = f(X)$

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ \dot{y}_{n+1} \\ t_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ \dot{y}_n \\ t_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} R_{2,1}(t_n) & R_{2,5}(t_n) & f_2(\Phi_2(X_n, t_n)) \\ R_{4,1}(t_n) & R_{4,5}(t_n) & f_4(\Phi_2(X_n, t_n)) \\ R_{6,1}(t_n) & R_{6,5}(t_n) & f_6(\Phi_2(X_n, t_n)) \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \Phi_2(X_0, t_0) \\ \Phi_4(X_0, t_0) \\ \Phi_6(X_0, t_0) \end{pmatrix}$$

Maintenant que le principe du calcul est établi, il ne reste plus qu'à prendre les bonnes conditions initiales. Il faut faire attention à ce que, pour que la méthode de Newton converge, on prenne bien des conditions initiales suffisamment proche de la solution. La méthode que j'ai employé afin de déterminer une orbite de Halo a été de prendre une orbite de Lyapunov (orbite planaire) à laquelle j'ai rajouté une amplitude selon z du même ordre de grandeur que celle selon x et j'ai légèrement modifié la vitesse initiale afin que la coupure sur le plan y=0 se fasse de manière relativement perpendiculaire et j'ai déterminé le temps  $t_0$  que l'orbite mettait pour couper ce plan. J'ai ainsi obtenu une orbite de Halo après avoir fait tourné l'algorithme sur à peine une dizaine d'itération.

Ci-dessous, le programme et le résultat autour du point  $L_1$

```

Cal := proc(x0, vy0, Az, t0, n) local mu, vy, x, Df, f1, f2, f3, f4, f5, f6, g4, g5, g6, a, rh, L, K, J, i, j, Condim, sol, G, y1, y2, y3, y4, y5, y6, H, y, z, fx;
mu := 3.04036 * 10^-6;
a := t0, vy := vy0, x := x0;
Df := matrix(6, 6, 0);
Df[1, 4] := 1 : Df[2, 5] := 1 : Df[3, 6] := 1 :
g4 := 2 * x5 + x1 - (1 - mu) * (x1 + mu) / sqrt((x1 + mu)^2 + (x2)^2 + (x3)^2)^3 - mu * (x1 + mu - 1) / sqrt((x1 + mu - 1)^2 + (x2)^2 + (x3)^2)^3;
g5 := -2 * x4 + x2 - (1 - mu) * x2 / sqrt((x1 + mu)^2 + (x2)^2 + (x3)^2)^3 - mu * x2 / sqrt((x1 + mu - 1)^2 + (x2)^2 + (x3)^2)^3;
g6 := - sqrt((x1 + mu)^2 + (x2)^2 + (x3)^2)^3 / sqrt((x1 + mu - 1)^2 + (x2)^2 + (x3)^2)^3;
Df[4, 1] := diff(g4, x1) : Df[4, 2] := diff(g4, x2) : Df[4, 3] := diff(g4, x3) : Df[4, 4] := diff(g4, x4) : Df[4, 5] := diff(g4, x5) : Df[4, 6] := diff(g4, x6) :
Df[5, 1] := diff(g5, x1) : Df[5, 2] := diff(g5, x2) : Df[5, 3] := diff(g5, x3) : Df[5, 4] := diff(g5, x4) : Df[5, 5] := diff(g5, x5) : Df[5, 6] := diff(g5, x6) :
Df[6, 1] := diff(g6, x1) : Df[6, 2] := diff(g6, x2) : Df[6, 3] := diff(g6, x3) : Df[6, 4] := diff(g6, x4) : Df[6, 5] := diff(g6, x5) : Df[6, 6] := diff(g6, x6) :

f1 := diff(x1(t), t) = x4(t);
f2 := diff(x2(t), t) = x5(t);
f3 := diff(x3(t), t) = x6(t);
f4 := diff(x4(t), t) = 2 * x5(t) + x1(t) - (1 - mu) * (x1(t) + mu) / sqrt((x1(t) + mu)^2 + x2(t)^2 + x3(t)^2)^3 - mu * (x1(t) + mu - 1) / sqrt((x1(t) + mu - 1)^2 + x2(t)^2 + x3(t)^2)^3;
f5 := diff(x5(t), t) = -2 * x4(t) + x2(t) - (1 - mu) * x2(t) / sqrt((x1(t) + mu)^2 + x2(t)^2 + x3(t)^2)^3 - mu * x2(t) / sqrt((x1(t) + mu - 1)^2 + x2(t)^2 + x3(t)^2)^3;
f6 := diff(x6(t), t) = - sqrt((x1(t) + mu)^2 + x2(t)^2 + x3(t)^2)^3 / sqrt((x1(t) + mu - 1)^2 + x2(t)^2 + x3(t)^2)^3;
L := NULL; for i from 1 to 6 do for j from 1 to 6 do L := L, diff(M[i, j](t), t) = sum(Df[i, k](t) * M[k, j](t), k = 1..6); od; od;
K := NULL; for i from 1 to 6 do for j from 1 to 6 do if i = j then K := K, M[i, j](0) = 1; else K := K, M[i, j](0) = 0; fi; od; od;
J := NULL; for i from 1 to 6 do for j from 1 to 6 do J := J, M[i, j](t); od; od;

G := matrix(3, 3, 0);
to do
Condim := x1(0) = x, x2(0) = 0, x3(0) = Az, x4(0) = 0, x5(0) = vy, x6(0) = 0;
sol := solve({f1, f2, f3, f4, f5, f6, Condim, L, K}, {x1(t), x2(t), x3(t), x4(t), x5(t), x6(t), J}, numeric);
G[1, 1] := rhs(sol(a)[8]);
G[1, 2] := rhs(sol(a)[12]);
G[2, 1] := rhs(sol(a)[3 * 6 + 1 + 1]);
G[2, 2] := rhs(sol(a)[3 * 6 + 5 + 1]);
G[3, 1] := rhs(sol(a)[5 * 6 + 1 + 1]);
G[3, 2] := rhs(sol(a)[5 * 6 + 5 + 1]);
y1 := rhs(sol(a)[38]); y2 := rhs(sol(a)[39]); y3 := rhs(sol(a)[40]); y4 := rhs(sol(a)[41]); y5 := rhs(sol(a)[42]); y6 := rhs(sol(a)[43]);
G[1, 3] := y5;
G[2, 3] := 2 * y5 + y1 - (1 - mu) * (y1 + mu) / sqrt((y1 + mu)^2 + (y2)^2 + (y3)^2)^3 - mu * (y1 + mu - 1) / sqrt((y1 + mu - 1)^2 + (y2)^2 + (y3)^2)^3;
G[3, 3] := - (1 - mu) * y3 / sqrt((y1 + mu)^2 + (y2)^2 + (y3)^2)^3 - mu * y3 / sqrt((y1 + mu - 1)^2 + (y2)^2 + (y3)^2)^3;
H := evalm(G^-1);
x := x - (H[1, 1] * y2 + H[1, 2] * y4 + H[1, 3] * y6); vy := vy - (H[2, 1] * y2 + H[2, 2] * y4 + H[2, 3] * y6); a := a - (H[3, 1] * y2 + H[3, 2] * y4 + H[3, 3] * y6);
od;
fx := t -> rhs(sol(t)[38]); y := t -> rhs(sol(t)[39]); z := t -> rhs(sol(t)[40]); print(evalf(x), vy, a);
plot([fx, y, 0 .. evalf(a)]);
end;

```

```

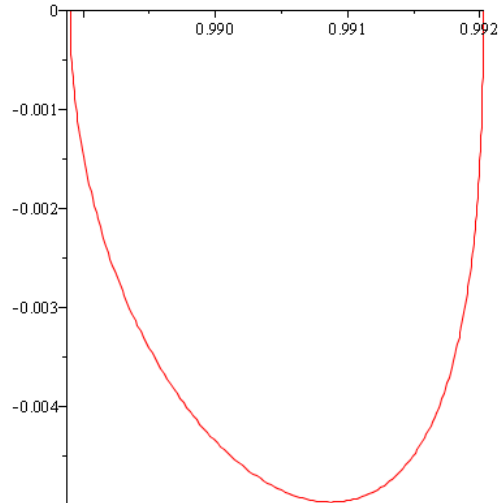
Tracer := proc(x0, vy0, Az, t0) local x, y, z, f1, f2, f3, f4, f5, f6, Condi, sol, mu;
mu := 3.04036·10-6;
f1 := diff(x1(t), t) = x4(t);
f2 := diff(x2(t), t) = x5(t);
f3 := diff(x3(t), t) = x6(t);
f4 := diff(x4(t), t) = 2·x5(t) + x1(t) -  $\frac{(1 - \mu) \cdot (x1(t) + \mu)}{\text{sqrt}((x1(t) + \mu)^2 + x2(t)^2 + x3(t)^2)^3}$  -  $\frac{\mu \cdot (x1(t) + \mu - 1)}{\text{sqrt}((x1(t) + \mu - 1)^2 + x2(t)^2 + x3(t)^2)^3}$ ;
f5 := diff(x5(t), t) = -2·x4(t) + x2(t) -  $\frac{(1 - \mu) \cdot x2(t)}{\text{sqrt}((x1(t) + \mu)^2 + x2(t)^2 + x3(t)^2)^3}$  -  $\frac{\mu \cdot x2(t)}{\text{sqrt}((x1(t) + \mu - 1)^2 + x2(t)^2 + x3(t)^2)^3}$ ;
f6 := diff(x6(t), t) = -  $\frac{(1 - \mu) \cdot x3(t)}{\text{sqrt}((x1(t) + \mu)^2 + x2(t)^2 + x3(t)^2)^3}$  -  $\frac{\mu \cdot x3(t)}{\text{sqrt}((x1(t) + \mu - 1)^2 + x2(t)^2 + x3(t)^2)^3}$ ;
Condi := x1(0) = x0, x2(0) = 0, x3(0) = Az, x4(0) = 0, x5(0) = vy0, x6(0) = 0;
sol := dsolve({f1, f2, f3, f4, f5, f6, Condi}, {x1(t), x2(t), x3(t), x4(t), x5(t), x6(t)}, numeric);
x := t→rhs(sol(t)[2]); y := t→rhs(sol(t)[3]); z := t→rhs(sol(t)[4]);
spacecurve([x, y, z], 0..t0); end;

```

```

Cal(1 - mu1 - rh(1 -  $\frac{1}{3}$ ·rh -  $\frac{1}{9}$ ·rh2) +  $\frac{243276}{149.59787 \cdot 1000000}$ , -0.00873, 0.002, 1.52, 10)
0.992026560546414, -0.0111401104344296, 1.52754691358913

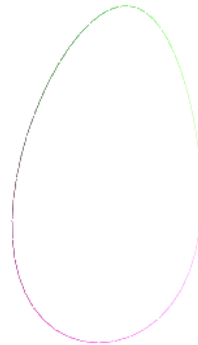
```



```

Tracer(0.992026560546414, -0.0111401104344296, 0.002, 1.52754691358913 - 2);

```



## 4 Approximation de Richardson

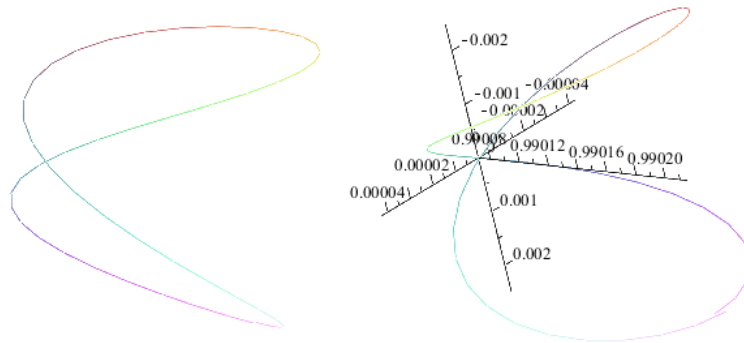
Le principe de l'approximation de Richardson consiste à linéariser le terme en  $\frac{1}{r_1}$  et  $\frac{1}{r_2}$  dans l'équation différentielle en utilisant les polynômes de Legendre. Néanmoins il faut supprimer des termes dits "termes séculaires" qui font diverger la solution ce qui empêche l'existence de solution périodique. On doit pour cela, imposer certaines relations sur les fréquences. Cette méthode ne marche néanmoins que jusqu'à l'ordre 2 : à partir de l'ordre 3 on doit imposer une certaine relation entre les amplitudes selon  $x$  et  $z$  afin d'annuler les termes séculaires.

Cette relation est de la forme  $l_1 A_x^2 + l_2 A_z^2 + \Delta = 0$  où les constantes sont calculables à partir de longs calculs de constantes intermédiaires. Ainsi, on peut imposer une amplitude selon  $z$ , on calcul l'amplitude selon  $x$  associée, on trouve la vitesse initiales dans le cas planaire ainsi que la demi-période associé et à partir de ces résultats, on obtient l'orbite de Halo voulue.

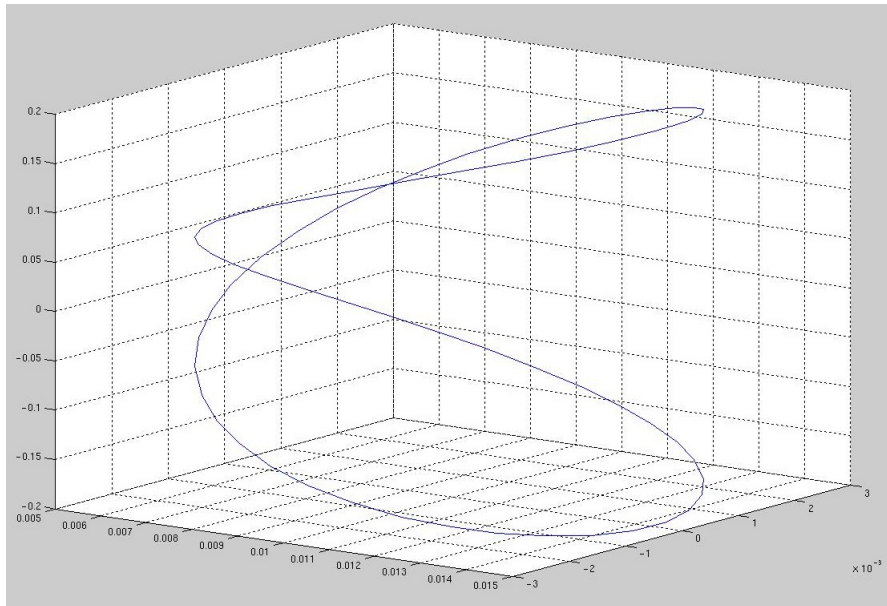
Néanmoins, on aurait pu aller plus loin et chercher à résoudre l'équation différentielle linéarisée à l'ordre 3 ce qui nous aurait donné les vitesses initiales et la demi-période voulue. Néanmoins ceci nécessite de longs calculs de constantes afin d'obtenir un résultat général alors que dans le cas précédent on voit qu'il nous suffit de calculer les  $A_x$  et  $A_z$  de deux orbites et on obtient la relation liant  $A_x$  et  $A_z$ .

## 5 Discussion

J'aimerais maintenant attirer votre attention sur l'existence d'une autre classe d'orbite qui sont les orbites de Lissajous en huit, décrite et introduite dans [3]. Ces orbites ont la particularité de passer deux fois par le même point ce qui les fait ressembler à un huit aplati. Ces orbites possèdent les propriétés intéressantes d'avoir des variétés invariantes plus stables que les orbites de Halo et une bande lunaire couverte assez importante pour un faible coût énergétique ce qui rend ces orbites intéressantes.



Il faut aussi souligner un détail assez intéressant que l'on peut voir lorsque l'on trace une orbite de Lissajous en huit : l'orbite ne se referme pas complètement et ce même en prenant une meilleure précision ou en augmentant le nombre d'itération de la méthode de Newton. On peut expliquer cela par le fait que la méthode de résolution de l'équation différentielle que j'ai utilisé : la tolérance absolue et relative de l'intégration de Runge Kutta est trop faible pour faire en sorte que cela converge bien. En augmentant de deux ordres celle ci, on obtient une orbite qui se referme correctement.



Orbite de Lissajous en huit

## References

- [1] Meyer et Hall *Introduction to Hamiltonian dynamical systems and the N-body problem*
- [2] B. Bonnard, L. Faubourg, E. Trélat *Mécanique céleste et contrôle de systèmes spatiaux*
- [3] Grégory Archambeau *Étude de la dynamique autour des points de Lagrange*