

La méthode de Chabauty non-abélienne

Cyrille CORPET
encadré par Marc HINDRY

Introduction

Le but de ce texte est de présenter en quelques mots une nouvelle démonstration, encore principalement conjecturale, du théorème de Siegel qui s'inspire très largement du théorème de Chabauty de 1941 sur les points rationnels des courbes algébriques. Cette démonstration utilise des notions telles que le groupe fondamental unipotent, la cohomologie galoisienne ou encore les fonctions de Coleman, que nous présenterons en regard de la démonstration de Chabauty, pour comprendre en quoi cette méthode peut en être appelé un relèvement non-abélien.

1 Le théorème de Chabauty

En quelques mots, la méthode consiste à trouver une fonction analytique (dans un certain sens) non nulle, qui s'annule sur l'ensemble dont on cherche à prouver la finitude. On en déduit alors, par un argument de compacité, que l'ensemble étudié est fini. Pour pouvoir énoncer le théorème de Chabauty, il nous faut d'abord quelques notions de géométrie algébrique.

1.1 Définitions

On appelle **variété projective** de dimension n sur un corps K une sous-variété d'un espace projectif \mathbb{P}^N qui admet une chaîne maximale de fermés irréductibles pour la topologie de Zariski de longueur n . Si $n = 1$, on parle de courbe projective.

On dit qu'elle est **lisse** si elle est définie par un système d'équations polynômiales homogènes $(f_1, \dots, f_k) \in K[x_1, \dots, x_n]$ tel qu'en tout point P de X , la matrice $(\partial f_i / \partial x_j(P))_{i,j}$ soit de rang $N - n$.

On appelle **variété abélienne** une variété projective munie d'axiomes de groupe, où les fonctions de multiplication et d'inverse sont des morphismes de variétés projectives. On peut démontrer qu'une telle variété est alors un groupe abélien, d'où le nom. Pour en savoir plus sur les variétés abéliennes, se reporter à [6]. Le résultat à retenir ici est le suivant :

Théorème 1.1 (Mordell-Weil). *Soit A une variété abélienne définie sur un corps de nombre K . Alors $A(K)$ est un groupe abélien de type fini.*

Ce théorème (démontré, par exemple dans [6]) permet de définir le rang r d'une variété abélienne sur K :

$$A(K) \simeq \prod_i \mathbb{Z}/d_i\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^r.$$

Dans la suite, X est une courbe projective lisse, définie sur un corps de nombre K . Si on s'intéresse aux points de X sur \mathbb{C} , on obtient une variété différentielle projective, et donc un tore à g trous, ce qui donne une définition du **genre** g de la courbe X , qui peut aussi être vu comme la dimension de $H^0(X, \Omega_X^1)$ sur \mathbb{C} .

À une courbe projective lisse X , on peut aussi associer une variété abélienne \mathcal{J}_X appelée **jacobienne** définie sur le même corps de base et dans laquelle X se plonge par une application qui dépend d'un point de X , appelée application d'Abel-Jacobi. Sur \mathbb{C} , il y a une description explicite plus compréhensible de \mathcal{J}_X et de cette application : $\mathcal{J}_X(\mathbb{C}) = H^0(X, \Omega_X^1)^*/H_1(X, \mathbb{Z})$ et pour $x_0 \in X$, on a l'application d'Abel-Jacobi :

$$\begin{aligned} \iota: X(\mathbb{C}) &\hookrightarrow \mathcal{J}_X(\mathbb{C}) \\ x &\mapsto \left(\omega \mapsto \int_{x_0}^x \omega \right). \end{aligned}$$

L'intégrale de x_0 à x est bien définie puisque l'intégration sur un lacet fermé de $X(\mathbb{C})$ est un élément de l'espace d'homologie $H_1(X, \mathbb{Z})$.

1.2 Énoncé et ébauche de preuve

Théorème 1.2 (Chabauty [2]). *Soit X une courbe projective lisse sur K , un corps de nombre, de genre $g \geq 2$, \mathcal{J}_X sa jacobienne et r le rang de cette dernière. Si $r < g$, alors $|X(K)| < \infty$.*

L'analyse complexe n'est pas suffisante pour démontrer ce résultat, donc on prend un complété p -adique de K noté $K_{\mathfrak{p}}$, pour \mathfrak{p} un idéal premier de K au-dessus de p . On peut alors définir une fonction logarithme de $\mathcal{J}_X(K_{\mathfrak{p}})$ dans $K_{\mathfrak{p}}^g$ (l'analyse complexe ne permettrait de définir une telle fonction qu'au voisinage de zéro), ce qui nous donne le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccc} X(K_{\mathfrak{p}}) & \hookrightarrow & \mathcal{J}_X(K_{\mathfrak{p}}) & \xrightarrow{\log} & K_{\mathfrak{p}}^g & \xrightarrow{\omega} & K_{\mathfrak{p}} \\ \uparrow & & \uparrow & \nearrow \phi & & & \\ X(K) & \hookrightarrow & \mathcal{J}_X(K) & & & & \end{array}$$

Dans ce diagramme, il nous reste à définir ϕ et ω . Le premier est un morphisme de groupes (défini par la commutativité du diagramme) d'un groupe de rang strictement inférieur à g , qui s'envoie donc sur un sous-espace strict $T' \subsetneq K_{\mathfrak{p}}^g$ qui est donc dans le noyau d'une forme différentielle non-nulle que l'on note ω . Ceci définit une fonction analytique $f : X \rightarrow K_{\mathfrak{p}}$ non nulle (puisque ω est non nulle, on peut voir f comme la fonction $\int_x^{x_0} \omega$ dans un certain sens) mais

s'annulant sur $X(K) \subset X$. Comme X est compact, et f analytique, elle ne peut avoir qu'un nombre fini de zéros, d'où la finitude de $X(K)$.

Remarques.

- Ce théorème a été dépassé par le théorème de Faltings (1983) mais comme nous l'avons dit précédemment, c'est la méthode qui nous intéresse.
- Le but de la recherche brièvement exposée dans ce qui suit est d'appliquer cette méthode aux variétés d'Albanese d'ordre supérieur (la jacobienne étant celle d'ordre 1), qui sont des variétés d'une complexité supérieure et donnent donc plus d'information sur la courbe étudiée (en particulier, elles ne sont pas abéliennes).

Pour définir les variétés d'Albanese, il faut d'abord faire quelques explications sur le groupe fondamental d'une variété, ou plutôt, les groupes fondamentaux.

2 Le groupe fondamental

2.1 Groupes fondamentaux usuels

Le groupe fondamental topologique d'une variété complexe est bien connu : c'est le groupe des classes d'homotopies de lacets fermés issus d'un point de la variété. Cette définition très imagée permettra de comprendre plus intuitivement les différents groupes fondamentaux que nous allons voir maintenant.

Cependant, les groupes fondamentaux de géométrie algébrique ne peuvent pas être définie de façon analogue, puisque le corps de base peut être très différents de \mathbb{C} , par exemple un corps p -adique ou même un corps fini. Il faut donc les définir en termes de revêtements. Pour définir ces revêtements, on utilise l'équivalent des homéomorphismes locaux, les morphismes étales. Il faut alors utiliser une notion plus générale que celle de variété projective qui est un peu trop restrictive, la notion de schéma (pour la définition des schémas et des morphismes étales, voir [5]).

Définition 2.1. Soit $\mathit{Ét}(X)$ la catégorie des revêtements étales finis de X , c'est-à-dire des paires (Y, f) où Y est un schéma et $f : Y \rightarrow X$ un morphisme étale fini (c'est-à-dire que chaque fibre est finie) munie des morphismes de schémas $\varphi : Y \rightarrow Y'$ tels que $f' \circ \varphi = f$. Pour tout point $x_0 \in X(\bar{K})$, on peut définir un foncteur fibre $F_{x_0} : (Y, f) \rightarrow f^{-1}(x_0)$ à valeur dans la catégorie des ensembles finis et le groupe de ses automorphismes est alors appelé **groupe fondamental algébrique** de X en x_0 :

$$\pi_1^{alg}(X, x_0) = \text{Aut}(F_{x_0}).$$

On va définir de façon semblable le groupe fondamental unipotent de de Rham d'une variété, en utilisant une catégorie tanakienne.

2.2 Fibrés vectoriels unipotents

Définition 2.2. Soit E un fibré vectoriel sur X (c'est-à-dire un schéma sur X localement isomorphe à $X \times K^n$). On peut le munir d'une connexion $\nabla : E \rightarrow E \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_X^1$ qui est un morphisme de \mathcal{O}_X -modules vérifiant la règle de Leibniz :

$$\forall e \in E, \forall f \in \mathcal{O}_X, \nabla(fe) = e \otimes df + f\nabla(e).$$

Un tel fibré vectoriel est dit **unipotent** s'il existe une suite croissante de fibrés E_i stables par la connexion tels que

$$0 = E_0 \subset E_1 \subset \dots \subset E_n = E,$$

$$E_{i+1}/E_i \simeq (\mathcal{O}_X^{r_i}, d).$$

On note $Un(X)$ la catégorie des fibrés vectoriels unipotents, munis des morphismes qui commutent avec la connexion :

$$\varphi : E \rightarrow E' \text{ tel que } (\varphi \otimes Id) \circ \nabla = \nabla' \circ \varphi.$$

Cette catégorie est munie d'un produit tensoriel (qui provient de celui des fibrés vectoriels), qui en fait une catégorie tanakienne [1].

On peut alors définir le **groupe fondamental unipotent de de Rham** comme le groupe des \otimes -automorphismes d'un foncteur fibre F_{x_0} (qui est donc à valeur dans les K -espaces vectoriels) :

$$\pi_1^{dR}(X, x_0) = Aut_{\otimes}(F_{x_0}).$$

On peut encore définir le groupe fondamental étale unipotent en faisant un complété unipotent du groupe fondamental algébrique, le groupe fondamental cristallin (voir [1]), et bien d'autres, qui font partie du système de représentations du groupe fondamental motivique de la variété X (voir [4] pour plus de détails sur les motifs comme système de représentations).

Tous ces groupes fondamentaux unipotents peuvent être quotientés par leur série centrale descendante (si G est un groupe on rappelle que la série centrale descendante est la suite de sous-groupes telle que $G^0 = G$ et $G^{n+1} = [G, G^n]$) pour donner une suite $[\pi_1^*]_n$ de groupes unipotents (c'est-à-dire des sous-groupes algébriques (à isomorphisme près) du groupe des matrices triangulaires supérieures à diagonale constante égale à 1).

Si K est un corps de nombre, tous ces groupes fondamentaux peuvent être définis sur K et on a donc une action du groupe de Galois sur ces variétés, qu'il peut-être intéressant d'étudier.

3 Cohomologie galoisienne

3.1 Torseurs et cohomologie

On remarque que conjointement à chacun des groupes fondamentaux définis précédemment, on peut définir les toseurs de chemins associés : par exemple, sur le groupe fondamental topologique, on peut s'intéresser à l'ensemble des classes d'homotopies de chemins d'un point x à un point y , sur lequel le groupe fondamental en x agit à droite et le groupe fondamental en y agit à gauche. Cet ensemble ressemble beaucoup au groupe fondamental, mais il n'a pas d'élément privilégié comme l'élément neutre de ce dernier. Pour les groupes fondamentaux définis algébriquement, on a donc le toseur de chemins $\pi_1^*(X, x, y)$ sur lequel agit $\pi_1^*(X, x)$ mais aussi le groupe de Galois absolu de K , si $x, y \in X(K)$. Ceci est en fait la description d'un toseur.

Définition 3.1. Soit U un groupe algébrique muni d'une action continue d'un groupe G . On appelle **toseur** pour U une variété P munie d'une action de G et d'un morphisme $a : P \times U \rightarrow P$ compatible avec l'action de G et tel que l'action sur les points soit fidèlement transitive, c'est-à-dire

$$\forall x, y \in P \exists ! u \in U, x \cdot u := a(x, u) = y.$$

Nous allons voir que l'ensemble des toseurs munis sur U est classifié par les éléments d'un espace de cohomologie qu'il nous faut définir.

Définition 3.2. Soit U un groupe algébrique (par exemple un groupe fondamental), muni d'une action de G un groupe topologique (par exemple un groupe de Galois) et R une K -algèbre. On appelle cohomologie continue (ou galoisienne, lorsqu'il s'agit d'un groupe de Galois) celle du complexe

$$\dots \rightarrow C^i(G, U(R)) \xrightarrow{d^i} C^{i+1}(G, U(R)) \rightarrow \dots$$

où $C^i(X, Y)$ est l'ensemble des fonctions continues de X^i dans Y .

Pour $i = 0$, $C^0(G, U(R)) = U(R)$, et on définit

$$\begin{aligned} (d^0 u) & : g \mapsto u(gu^{-1}) \\ (d^1 c) & : (g_1, g_2) \mapsto c(g_1 g_2 (g_1 c(g_2))^{-1} c(g_1)^{-1}) \end{aligned}$$

On a alors $H^1(G, U(R)) = Z^1(G, U(R))/B^1(G, U(R))$. On peut aussi voir cet ensemble comme le quotient de Z^1 par l'action de $U(R)$:

$$\begin{aligned} U(R) \times Z^1 & \rightarrow Z^1 \\ (u, c) & \mapsto (g \mapsto uc(g)(g \cdot u^{-1})). \end{aligned}$$

L'espace de cohomologie $H^1(G, U(R))$ est en fait, sous certaines conditions l'ensemble des R points d'une variété $H^1(G, U)$, et on peut de plus vérifier qu'il classifie l'ensemble des toseurs sur U : Si P est un toseur, on peut définir,

pour un point rationnel x de P (qui existe toujours lorsque U est unipotent), un cocycle :

$$c : g \mapsto u_g$$

où u_g est l'élément du groupe U tel que $gx = xu_g$ (par définition des toiseurs, un tel élément est uniquement déterminé). Après vérification de la continuité, de l'invariance par isomorphisme de toiseurs et de l'existence d'un inverse, on montre qu'il existe une bijection entre $H^1(G, U)$ et les classes d'isomorphisme de U -toiseurs.

3.2 Restriction de l'espace de cohomologie

Pour appliquer une analogie avec la méthode de Chabauty, il nous faudra pouvoir limiter la taille de ces espaces de cohomologie. En fait, on peut voir que la construction de cet espace est fonctorielle, et en particulier, l'extension des scalaires du groupe algébrique U donne un morphisme $H^1(G, U_K) \rightarrow H^1(G, U_{K \otimes B})$ dont l'image réciproque du point base donne une sous-variété $H_f^1(G, U)$ de $H^1(G, U_K)$. On peut alors voir, grâce à un théorème de Vologodsky [8], qu'en choisissant un nombre premier p et un entier n convenables, les toiseurs de chemins du groupe fondamental \mathbb{Q}_p -unipotent étale $[\pi_1^{\text{ét}}]_n$ muni de l'action du groupe de Galois absolu de \mathbb{Q}_p arrivent dans une telle sous-variété, pour une extension de scalaires habilement choisie et pour laquelle on pourra avoir une estimation de la taille de $H_f^1(G, [\pi_1^{\text{ét}}]_n)(\mathbb{Q}_p)$, lorsque la courbe X n'est pas trop compliquée.

4 Le théorème de Siegel

Nous allons maintenant poser le problème du théorème de Siegel, et voir comment on peut adapter la démonstration de Chabauty à celui-ci.

On considère une courbe projective lisse X de genre g privée de n points, ce qui fait qu'on peut la plonger dans un espace affine \mathbb{A}^n , où elle est définie par un système d'équations polynômiales $P_1, \dots, P_n \in K[X_1, \dots, X_N]$. Dans cet espace affine, on peut s'intéresser à l'ensemble des points S -entiers de la courbe, pour S un ensemble fini de places finies de K , c'est-à-dire l'ensemble des N -uplets $(x_1, \dots, x_N) \in \mathcal{O}_{K,S}^N$ qui annulent tous les P_i . On rappelle qu'un S -entier est un élément de K dont la valuation \mathfrak{p} -adique est positive ou nulle pour tout idéal premier $\mathfrak{p} \notin S$. Dans le langage des schémas, ceci revient à dire que pour un schéma \mathcal{X} sur $\text{Spec } \mathcal{O}_{K,S}$ de fibre générique X , l'ensemble des $\mathcal{O}_{K,S}$ -points est fini.

Exemple. Pour la droite projective sur \mathbb{Q} privée de trois points, on a le schéma $\mathcal{X} = \text{Spec } \mathbb{Z}_S[u, u^{-1}, (1-u)^{-1}]$ et les points S -entiers sont alors les morphismes $\mathbb{Z}_S[u, u^{-1}, (1-u)^{-1}] \rightarrow \mathbb{Z}_S$, c'est-à-dire les éléments $u \in \mathbb{Z}_S$ tels que u et $1-u$ sont inversibles dans \mathbb{Z}_S ou, ce qui revient au même, les paires $(u, v) \in \mathbb{Z}_S^*$ telles que $u + v = 1$.

Le théorème de Siegel s'énonce alors en ces termes :

Théorème 4.1 (Siegel). *Soit une courbe lisse X de genre g privée de n points, hyperbolique (c'est-à-dire $2g + n - 2 > 0$). Pour S un ensemble fini de ses places finies, l'ensemble de ses points S -entiers est fini.*

Démonstration. Pour la démonstration classique de ce résultat, on peut se référer à [6]. Cherchons plutôt à se rapprocher de la démonstration de Chabauty : On suppose qu'il existe un point S -entier, sur le schéma \mathcal{X} , que l'on note x . Alors, en particulier, pour une place $\mathfrak{p} \notin S$ qui divise le premier p , x est un $K_{\mathfrak{p}}$ -point de la fibre générique qui admet une réduction modulo \mathfrak{p} , ce qu'on note $x \in X(K_{\text{gotp}}) \cap Y[$ où Y est la fibre au-dessus de \mathfrak{p} . Pour la suite, le cas général est encore conjectural ou un peu délicat à établir donc nous allons poursuivre avec l'exemple précité. En posant $T = S \cup p$, on peut définir l'extension maximale de \mathbb{Q} non-ramifiée en dehors de T , et considérer son groupe de Galois que l'on note Γ_T . Dans cette extension, un groupe de décomposition de p est alors isomorphe au groupe de Galois absolu de \mathbb{Q}_p , que l'on note G . D'après ce qui a été vu sur la cohomologie galoisienne, sous les hypothèses convenables sur n et p , on peut alors associer à un autre point entier y le torseur $[\pi_1^{\text{ét}}(X, x, y)]_n$, et de même pour un autre élément de $X(\mathbb{Q}_p) \cap Y[$, ce qui donne le carré commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} X(\mathbb{Q}_p) \cap Y[& \longrightarrow & H_f^1(G, [\pi_1^{\text{ét}}]_n)(\mathbb{Q}_p) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathcal{X}(\mathbb{Z}_S) & \longrightarrow & H_f^1(\Gamma_T, [\pi_1^{\text{ét}}]_n)(\mathbb{Q}_p) \end{array}$$

qu'il faut mettre en parallèle avec le premier carré dans la démonstration du théorème de Chabauty.

On peut alors (de façon non-triviale) définir un morphisme $H_f^1(G, [\pi_1^{\text{ét}}]_n)(\mathbb{Q}_p) \rightarrow [\pi_1^{dR}]_n(\mathbb{Q}_p)$ qui est l'équivalent du log de Chabauty. En comparant alors les dimensions des espaces $H_f^1(\Gamma_T, [\pi_1^{\text{ét}}]_n)(\mathbb{Q}_p)$ et $[\pi_1^{dR}]_n(\mathbb{Q}_p)$ sur \mathbb{Q}_p , on peut conclure en mimant la fin de la démonstration de Chabauty, mais il faut d'abord s'assurer que la flèche du haut du diagramme est bien analytique, dans un sens à déterminer. En effet, en supposant cette analyticité, et l'inégalité des dimensions dans le sens qui convient, on a

$$\begin{array}{ccccc} X(\mathbb{Q}_p) \cap Y[& \longrightarrow & H_f^1(G, [\pi_1^{\text{ét}}]_n)(\mathbb{Q}_p) & \longrightarrow & [\pi_1^{dR}]_n(\mathbb{Q}_p) \\ \uparrow & & \uparrow & \nearrow & \\ \mathcal{X}(\mathbb{Z}_S) & \longrightarrow & H_f^1(\Gamma_T, [\pi_1^{\text{ét}}]_n)(\mathbb{Q}_p) & & \end{array}$$

mais la dimension de l'espace de cohomologie est inférieure   celle du groupe de de Rham de rang n sur \mathbb{Q}_p , pour un n convenablement choisi, donc il existe une fonction sur le groupe de de Rham qui s'annule sur l'image de l'espace de cohomologie, et donc une fonction analytique non-nulle $X(\mathbb{Q}_p) \cap Y[\rightarrow \mathbb{Q}_p$ qui s'annule sur l'ensemble des points S -entiers, donc, par compacité, cet ensemble est fini.

□

Il nous reste donc à voir deux points importants : la comparaison des dimensions des espaces pré-cités, et l'analyticité de la fonction finale.

5 La conjecture de Kim

Pour comparer la dimension de $H_f^1(\Gamma_T, [\pi_1^{\acute{e}t}]_n)(K_{gotp})$ et de $[\pi_1^{dR}]_n(K_{gotp})$, M. Kim pose la conjecture qu'il existe un n indépendant de p qui convient. Pour comprendre pourquoi cela semble réalisable dans le cas d'une courbe hyperbolique quelconque, regardons encore notre exemple :

On a des suites exactes

$$1 \rightarrow (\pi_1^*)^n / (\pi_1^*)^{n+1} \rightarrow [\pi_1^*]_{n+1} \rightarrow [\pi_1^*]_n \rightarrow 1.$$

D'après l'isomorphisme de représentations de Galois $(\pi_1^*)^n / (\pi_1^*)^{n+1} \simeq \mathbb{Q}_p(n)^{r_n}$, où r_n est une suite tendant vers l'infini indépendante de p , ce qui donne la taille des groupes unipotents de de Rham. Par functorialité de la cohomologie galoisienne, on a des suites exactes courtes

$$0 \rightarrow H_f^1(\Gamma_T, (\pi_1^{\acute{e}t})^n / (\pi_1^{\acute{e}t})^{n+1})(\mathbb{Q}_p) \rightarrow H_f^1(\Gamma_T, [\pi_1^{\acute{e}t}]_{n+1})(\mathbb{Q}_p) \rightarrow H_f^1(\Gamma_T, [\pi_1^{\acute{e}t}]_n)(\mathbb{Q}_p)$$

On a alors le théorème suivant

Théorème 5.1 (Théorème d'annulation de Soulé [7]). *Pour H_f défini tel que précédemment, on a*

$$\begin{cases} H_f^1(\Gamma_T, \mathbb{Q}_p(2n)) = 0 & \text{pour } n > 0 \\ H_f^1(\Gamma_T, \mathbb{Q}_p(2n+1)) = 1 & \text{pour } n \geq 1 \end{cases}$$

Ce théorème permet de borner la dimension de $H_f^1(\Gamma_T, [\pi_1^{\acute{e}t}]_n)(\mathbb{Q}_p)$:

$$\dim_{\mathbb{Q}_p} (H_f^1(\Gamma_T, [\pi_1^{\acute{e}t}]_n)(\mathbb{Q}_p)) \leq R + r_3 + r_5 + \cdots + r_{2\lfloor n/2 \rfloor - 1}$$

où R est une constante tenant compte des premiers termes, mais comme r_n tend vers l'infini, il existe un rang n à partir duquel

$$\dim_{\mathbb{Q}_p} (H_f^1(\Gamma_T, [\pi_1^{\acute{e}t}]_n)(\mathbb{Q}_p)) < \dim_{\mathbb{Q}_p} ([\pi_1^{dR}]_n(\mathbb{Q}_p)) = r_1 + r_2 + \cdots + r_n.$$

Nous pouvons essayer d'étendre ce résultat à une extension de corps de \mathbb{Q}_p , mais en regardant plus précisément les invariants r_n , et en utilisant le théorème de Soulé adapté à ces corps, on remarque que les deux espaces sont alors de dimensions trop proches pour pouvoir effectuer cette comparaison. Pour pouvoir élargir le résultat général, il faudrait alors travailler avec une variété de cohomologie galoisienne plus petite, ou trouver un procédé détourné, ce qui ouvre la voie à des recherches futures. On peut aussi essayer d'élargir le résultat à d'autres courbes, par exemple les courbes elliptiques privées d'un point, mais les recherches ayant été faites sur ce point (notamment par M. Kim) n'ont pas encore abouti.

6 La fonction d'Albanese unipotente et les fonctions de Coleman

Revenons au diagramme de la démonstration du théorème de Siegel, pour essayer de voir que la fonction $X(\mathbb{Q}_p) \cap Y \rightarrow [\pi_1^{dR}]_n$ est bien analytique et non nulle. Même si nous l'avons pour l'instant définie comme la composée de deux fonctions assez compliquées, elle peut être vue bien plus simplement. En effet, pour $y \in X(\mathbb{Q}_p) \cap Y$, on peut définir le toreur $\pi_1^{dR}(X, x, y)$ qui admet deux éléments "particuliers", dus aux structures imposées à ce toreur : le premier est un chemin dit « de trivialisatation de de Rham » (cf. [4]) imposé par la structure unipotente et est noté γ_{dR} . Le deuxième est un chemin dit « Frobenius invariant » : même s'il n'y a pas de Frobenius canoniquement défini sur $\pi_1^{dR}(X, x, y)$, celui-ci est isomorphe à $\pi_1^{tr}(Y, \bar{x}, \bar{y})$ sur lequel on peut définir (puisque Y est de caractéristique p) un Frobenius et trouver un chemin invariant dont on note l'image dans $\pi_1^{dR}(X, x, y)$, γ_F . D'après la structure de toreur de $\pi_1^{dR}(X, x, y)$, il existe alors un unique élément $U_x Alb(y)$ de $\pi_1^{dR}(X, x)$ tel que $\gamma_{dR} U_x Alb(y) = \gamma_F$, et ceci définit bien la fonction d'Albanese unipotente recherchée (après quotient de π_1^{dR} pour arriver dans $[\pi_1^{dR}]_n$).

Voir que cette fonction est analytique n'est pas chose aisée, et il faut introduire, pour mieux la comprendre, les fonctions de Coleman qui peuvent être définies comme des intégrales itérées Frobenius invariantes (cf. Coleman [3]) ou par un formalisme tannakien (cf. Besser [1]). On peut alors voir après une étude poussée que la fonction $U_x Alb$ est une combinaison linéaire non triviale d'une famille libre de fonctions de Coleman, et est donc une fonction analytique non nulle, mais cette étude n'obtient de résultat que pour le cas de $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ et il y a donc encore ici matière à recherche pour montrer l'analyticité de cette fonction dans le cas général.

Références

- [1] A. Besser. Coleman integration using tannakian formalism. *Mathematische Annalen*, 322(1) :19–48, 2002.
- [2] C. Chabauty. Sur les points rationnels des courbes algébriques de genre supérieur à l'unité. *CR Acad. Sci. Paris*, 212 :882–885, 1941.
- [3] R.F. Coleman. Dilogarithms, regulators and p -adic L -functions. *Inventiones Mathematicae*, 69(2) :171–208, 1982.
- [4] P. Deligne. Le groupe fondamental de la droite projective moins trois points. *Math. Sci. Res. Inst. Publ*, 16, Galois groups over \mathbb{Q} :79–297, 1987.
- [5] R. Hartshorne. *Algebraic geometry*. Springer, 2000.
- [6] M. Hindry and J.H. Silverman. *Diophantine geometry : an introduction*. Springer Verlag, 2000.
- [7] C. Soulé. K -théorie des anneaux d'entiers de corps de nombres et cohomologie étale. *Inventiones Mathematicae*, 55(3) :251–295, 1979.

- [8] V. Vologodsky. Hodge structure on the fundamental group and its application to p-adic integration. *Arxiv preprint math/0108109*, 2001.