Examen du cours de logique, 14 janvier 2014. Durée : 3 heures.
Vous n'avez pas le droit d'utiliser de documents.

Dans tous les exercices nous supposerons l'axiome du choix.

Exercice 1. (Exercice sur les cardinaux) Si κ est un cardinal infini, et $\lambda \geq 2$, on définit $\lambda^{<\kappa}$ par $\lambda^{<\kappa} = \bigcup_{\mu<\kappa} \lambda^\mu$. (Il faut donc penser à un élément de $\lambda^{<\kappa}$ comme une fonction de domaine un ensemble de cardinalité $< \kappa$ et d'image un sous-ensemble de λ). Soit κ un cardinal infini **régulier**.

(a) Montrez que $\kappa^{<\kappa} = 2^{<\kappa}$. On pourra distinguer le cas κ successeur du cas κ limite.

(b) On suppose de plus que $2^\lambda < \kappa$ pour tout $\lambda < \kappa$. Montrez que $2^{<\kappa} = \kappa$. [Notez que κ doit être limite.]

Proof. (1) On a toujours $2^{<\kappa} \leq \kappa^{<\kappa}$. Soit $\kappa = \lambda^+$. Alors $\kappa^{<\kappa} = \kappa^\lambda$, et comme $2 \leq \kappa \leq 2^\lambda$, on a $2^\lambda \leq \kappa^\lambda \leq (2^\lambda)^\lambda = 2^{\lambda\times\lambda} = 2^\lambda$.

Pour λ et μ des cardinaux, je dénoterai par $\mathrm{Fn}(\mu, \lambda)$ l'ensemble des fonctions de domaine (l'ordinal) μ et d'image contenue dans (l'ordinal) λ. Si $\lambda \leq \lambda'$ nous avons une inclusion canonique de $\mathrm{Fn}(\mu, \lambda)$ dans $\mathrm{Fn}(\mu, \lambda')$, et $|\mathrm{Fn}(\mu, \lambda)| = \lambda^\mu$.

Supposons maintenant que κ est limite, et soit $\lambda < \kappa$; comme κ est régulier, on sait que si $f \in \mathrm{Fn}(\lambda, \kappa)$, alors il existe $\mu < \kappa$ tel que $f \in \mathrm{Fn}(\lambda, \mu)$. On a donc $\kappa^{<\kappa} = \bigcup_{\lambda<\kappa} \bigcup_{\mu<\kappa} |\mathrm{Fn}(\lambda, \mu)| = \bigcup_{\lambda<\kappa} \bigcup_{\lambda<\mu<\kappa} |\mathrm{Fn}(\lambda, \mu)|$. Mais $\lambda < \mu$ implique $\mu^\lambda \leq 2^{\mu\lambda} = 2^\mu < 2^{<\kappa}$. $\kappa^{<\kappa}$ est donc l'union de κ ensembles de cardinalité $< 2^{<\kappa}$, et est donc de cardinalité $\leq \kappa 2^{<\kappa}$. D'un autre côté, comme κ et limite et régulier $|\{\mu < \kappa \mid \kappa\}| = \kappa$ et donc $2^{<\kappa}$ est l'union d'une chaîne strictement croissante de longueur κ, d'où $2^{<\kappa} \geq \kappa$ et $\kappa 2^{<\kappa} = 2^{<\kappa}$.
(2) On a toujours $\lambda < \lambda^+ \leq 2^\lambda$, et donc κ ne peut être un cardinal successeur.

Par le (1), nous savons que $\kappa^{<\kappa}$ est une union de κ ensembles de cardinalité $< \kappa$: il est donc de cardinalité κ.

Exercice 2. Soit $\mathcal{U}$ un modèle de ZF1 – ZF5 (Extensionnalité, Union, Parties, Remplacement et Infini). Nous allons montrer que certains ensembles sont définissables. A chaque étape, vous pourrez utiliser l'abbréviation usuelle pour les formules trouvées précédemment.
(1) Donnez, en termes de $\in$, la formule définissant $x \subseteq y$.
(2) Donnez, en termes de $\in$, $\subseteq$, la formule définissant $y = \mathcal{P}(x)$.
(3) Quelle est la formule définissant la classe On des ordinaux dans $\mathcal{U}$?
(4) Quelle est la formule définissant la relation fonctionnelle "successeur" sur On ?
(5) Quelle est la formule définissant ω ?
(6) On peut aussi montrer qu'il existe des formules définissant dans $\mathcal{U}$ les graphes de l'addition et de la multiplication sur ω. Cela permet alors de montrer que si $t(\bar{x})$ est un terme du langage $\mathcal{L}_{ar} = \{S, +, \cdot, <, 0\}$ de l'arithmétique, alors il existe un formule $\varphi_t(\bar{x}, y)$ qui définit dans $\mathcal{U}$ le graphe de la relation fonctionnelle $y = t(\bar{x})$ sur ω. Nous admettrons ces résultats. Expliquez pourquoi ils impliquent que $\mathrm{Th}(\mathcal{U})$ est indécidable.

Proof. (1) $x \subseteq y$: $\forall z\,(z \in x \implies z \in y)$
(2) $y = \mathcal{P}(x)$: $\forall z\,(z \in y \leftrightarrow z \subseteq x)$.
(3) $\mathrm{On}(x)$: $\forall y, z, t[(y \in x \wedge z \in x \wedge t \in x) \implies (y \notin y \wedge (y \in z \wedge z \in t \implies y \in t) \wedge (y = z \vee y \in z \vee z \in y)] \wedge \forall y, z(y \in x \wedge z \in y \implies z \in x) \wedge \forall y\,(y \subseteq x \wedge \exists z\, z \in x) \implies \exists z\, z \in y \wedge \forall u\,(u \in y \implies z \in u))$. ($\in$ définit un ordre total sur les éléments de x, x est transitif, et tout sous-ensemble non vide de x a un plus petit élément.)
(4) $y = Sx$: $\mathrm{On}(x) \wedge \mathrm{On}(y) \wedge \forall z\,(z \in y \leftrightarrow (z = x \vee z \in x))$.
(5) On utilise $y = \emptyset$: $\forall u\,(u \in y \implies u \neq u)$.
$x = \omega$: $\mathrm{On}(x) \wedge \exists y\, y \in x \wedge \forall y\, y \in x \implies Sy \in x \wedge \exists z\, y = Sz \vee y = \emptyset$.
(6) La définition des φ_t se fait par récurrence sur la compléxité des termes. Supposons $t_1(\bar{x}) = y$ et $t_2(\bar{x}) = y$ définis par les formules $\varphi_{t_1}(\bar{x}, y)$ et $\varphi_{t_2}(\bar{x}, y)$. Alors $t_1(\bar{x}) + t_2(\bar{x}) = y$ sera défini par la formule $\exists y_1, y_2\, \varphi_{t_1}(\bar{x}, y_1) \wedge \varphi_{t_2}(\bar{x}, y_2) \wedge \varphi_+(y_1, y_2, y)$, et $t_1(\bar{x}) \times t_2(\bar{x}) = y$ par la formule $\exists y_1, y_2\, \varphi_{t_1}(\bar{x}, y_1) \wedge \varphi_{t_2}(\bar{x}, y_2) \wedge \varphi_\times(y_1, y_2, y)$.

Soit Ω la $\mathcal{L}_{ar}$-structure $(\omega, S, +, \times, ...)$. Par ce que nous admettons, nous pouvons montrer que pour toute $\mathcal{L}_{ar}$ formule $\varphi(\bar{v})$ il existe une $\{\in\}$-formule $\varphi^*(\bar{v})$ telle que pour tout uplet $\bar{a}$ de ω, nous avons

$$\mathcal{U} \models \varphi^*(\bar{a}) \text{ si et seulement si } \Omega \models \varphi(\bar{a}).$$

La formule φ^* se construit par induction sur la compléxité :

- $(t_1(\bar{x}) = t_2(\bar{x}))^*$, où t_1 et t_2 sont des termes : $\exists z, \varphi_{t_1}(\bar{x}, z) \wedge \varphi_{t_2}(\bar{x}, z)$.
- $(t_1(\bar{x}) < t_2(\bar{x}))^*$: $\exists z, u\, \varphi_{t_1}(\bar{x}, z) \wedge \varphi_{t_2}(\bar{x}, u) \wedge z \in u$
- $(\varphi_1 \wedge \varphi_2)^* = \varphi_1^* \wedge \varphi_2^*$; $(\neg\varphi)^* = \neg\varphi^*$; $(\exists y\, \varphi(\bar{x}, y))^*$: $\exists y(y \in \omega \wedge \varphi(\bar{x}, y)^*)$.

On vérifie facilement que cette construction donne une formule φ^* avec la propriété désirée, par induction sur la compléxité. Pour les formules atomiques, c'est par définition des formules φ_t ; supposons la condition vérifiée pour φ_1 et φ_2, alors elle est vraie pour $\varphi_1 \wedge \varphi_2$ et pour $\neg\varphi_1$. Il ne reste que l'étape $\varphi = \exists x\, \varphi_1(x, \bar{y})$: si $\bar{a}$ est dans ω, alors on a les équivalences suivantes :
$\mathcal{U} \models \varphi(\bar{a})^*$;
$\mathcal{U} \models \exists x\, x \in \omega \wedge \varphi_1^*(x, \bar{a})$;
il existe $b \in \omega$ tel que $\mathcal{U} \models \varphi_1^*(b, \bar{a})$;
$\Omega \models \varphi_1(b, \bar{a})$;
$\Omega \models \varphi(\bar{a})$.

On remarque maintenant que $\Omega \models \mathcal{P}_0$. En effet certains de ces axiomes sont vrais juste par définition de $S, +, \times$ sur les ordinaux, par exemple : $x + 0 = x$, $x + S(y) = S(x + y)$, $x \times 0 = 0$ ou encore $x \times S(y) = x \times y + x$. Certains autres sont essentiellement triviaux à démontrer, par exemple $S(x) = S(y)$ implique $x = \max\{\alpha \in S(x)\} = \max\{\alpha \in S(y)\} = y$ ou encore $x = 0 \wedge \exists y\, x = S(y)$ (car ω ne contient pas d'ordinal limite).

On remarque alors aussi que vu la description qu'on a donné de ϕ^*, il existe une fonction rcursive qui calcule le code de ϕ^* à partir de celui de ϕ. Si la théorie de $\mathcal{U}$ était décidable, alors l'ensemble des énoncés φ^* vrais dans $\mathcal{U}$, où φ parcourt l'ensemble des énoncés de $\mathcal{L}_{ar}$, serait aussi décidable. Mais cette ensemble n'est autre que $Th(\Omega)$ une théorie consistante qui contient $\mathcal{P}_0$, ce qui contredit le théorème de Church.

Exercice 3. Soient $\mathcal{L}$ un langage, et $(M_n)_{n\in\omega}$ une suite croissante de $\mathcal{L}$-structures telles que $M_n \prec M_{n+1}$ pour tout n. Si $M_\omega = \bigcup_{n\in\omega} M_n$, montrez que $M_n \prec M_\omega$ pour tout n.

Proof. La preuve est par induction sur la compléxité des formules, et nous la faisons pour tous les M_n en même temps. Soit $\varphi(\bar{x})$ une formule. Nous voulons montrer

$$(*) \qquad (\forall n \in \mathbb{N}, \forall \bar{a} \in M_n) : \ M_\omega \models \varphi(\bar{a}) \text{ ssi } M_n \models \varphi(\bar{a}).$$

Si $\varphi(\bar{x})$ est atomique, alors $(*)$ est évident. De même, si $\varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2$, ou bien $= \neg\varphi_1$, où φ_1 et φ_2 satisfont $(*)$, alors φ aussi. Il reste le cas d'un quantificateur : $\varphi(\bar{x}) = \exists y\, \psi(\bar{x}, y)$. Si $M_n \models \varphi(\bar{a})$, alors il existe $b \in M_n$ tel que $M_n \models \psi(\bar{a}, b)$, et l'HI nous donne $M_\omega \models \psi(\bar{a}, b)$, i.e., $M_\omega \models \varphi(\bar{a})$.

Supposons $M_\omega \models \varphi(\bar{a})$ et soit $b \in M_\omega$ tel que $M_\omega \models \psi(\bar{a}, b)$. Si $m \geq n$ est tel que $b \in M_m$, alors par HI, on a $M_m \models \psi(\bar{a}, b)$ (c'est ici le point qui coince si on essaie d'utiliser Tarski-Vaught), d'où $M_m \models \varphi(\bar{a})$; puisque $M_n \prec M_m$ (montré ci-dessous), on aura $M_n \models \varphi(\bar{a})$.

Pour tout $m < n$, nous avons $M_m \prec M_n$. C'est montré par induction sur n. Pour $n = m + 1$, c'est par hypothèse. Supposons le vrai pour n, alors nous avons $M_m \prec M_n$ et $M_n \prec M_{n+1}$, d'où (par transitivité de $\prec$), $M_m \prec M_{n+1}$.

Exercice 4. Soient φ et ψ des formules.
(1) Montrez que $\forall x(\varphi \to \psi) \models (\forall x\varphi) \to (\forall x\psi)$.
(2) Déduisez-en que $\forall x(\varphi \to \psi) \vdash (\forall x\varphi) \to (\forall x\psi)$, si possible en donnant une preuve formelle (points supplémentaires pour la preuve formelle). [Dans une preuve, vous pouvez utiliser les formules que nous avons montrées en classe être prouvables. En voici quelques-unes : Axiomes du quantificateur $\exists$ et du quantificateur $\forall$; $\exists$-intro et $\forall$-intro ; universalisation : Si $T \vdash \varphi$, alors $T \vdash \forall x\, \varphi$.]

Proof. (1) Soit M une $\mathcal{L}$-structure, et supposons que $M \models (\forall x(\varphi \implies \psi)) \wedge (\forall x\varphi)$. Nous voulons montrer $M \models \forall x\psi$. Soit $a \in M$. Alors $M \models \varphi(a)$, et comme $M \models \forall x(\varphi \implies \psi)$, nous avons $M \models \psi(a)$.
(2) On peut bien sûr utiliser le théorème de complétude, qui dit exactement ce que nous voulons montrer. Voici une preuve de $\{\forall x(\varphi \implies \psi), \forall x\varphi\}$ implique $\forall x\psi$:
$\forall x(\varphi \implies \psi)$
$\forall x\varphi$
$(\varphi \implies \psi)$ (axiome $\forall$, avec $t = x$)
φ (axiome $\forall$, avec $t = x$)
ψ (MP)
$\forall x\psi$ (universalisation).

Cela nous donne donc que $\{\forall x(\varphi \implies \psi)\} \vdash (\forall x\varphi \implies \forall x\psi)$.

Exercice 5. Nous avons d'abord besoin de deux définitions. Soient $\mathcal{L}$ un langage dénombrable, M une $\mathcal{L}$-structure.

Définitions. (a) Un ensemble $\Sigma(x)$ de formules avec seule variable libre x est *finiment satisfaisable dans* M si pour tout sous-ensemble fini Σ_0 de Σ, $M \models \exists x \bigwedge_{\varphi \in \Sigma_0} \varphi(x)$. Une *réalisation* de $\Sigma(x)$ (dans M) est un élément a (dans M) satisfaisant toutes les formules de $\Sigma(x)$.
(b) On dit que M est ω*-saturé* si pour tout sous-ensemble fini $A \subset M$, et tout ensemble $\Sigma(x)$ de $\mathcal{L}(A)$-formules en x qui est finiment satisfaisable dans M, il existe un élément $a \in M$ qui réalise $\Sigma(x)$. ($\mathcal{L}(A)$ = langage $\mathcal{L}$ auquel nous ajoutons des symboles de constantes pour les éléments de A)

Soit M ω-saturé.
(1) (ω-homogénéité). Soient n un entier quelconque, et $a_1, \dots, a_n, a, b_1, \dots, b_n$ des éléments de M. On suppose que

$$(M, a_1, \dots, a_n) \equiv (M, b_1, \dots, b_n),$$

c'est-à-dire : pour toute $\mathcal{L}$-formule $\varphi(x_1, \dots, x_n)$, $M \models \varphi(a_1, \dots, a_n)$ si et seulement si $M \models \varphi(b_1, \dots, b_n)$. Montrez qu'il existe $b \in M$ tel que

$$(M, a_1, \dots, a_n, a) \equiv (M, b_1, \dots, b_n, b).$$

(2) Parmi les structures suivantes (avec leur structure naturelle d'ensemble ordonné, de groupe, de groupe ordonné, ou de corps), lesquelles sont ω-saturées ?
(a) $(\mathbb{Q}, <)$
(b) $(\mathbb{Q}, +, 0)$
(c) $(\mathbb{R}, +, 0)$
(d) $(\mathbb{R}, +, <, 0)$
(e) $(\mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1)$.
Pour celles qui ne sont pas ω-saturées, vous donnerez un exemple montrant la non-ω-saturation. (Pour celles qui sont ω-saturées, vous n'avez pas besoin de donner de preuve). Résultat admis : ces structures ont toutes l'élimination des quantificateurs.
(3) (ω-universalité - Bonus) Donnez une esquisse de la preuve du résultat suivant : si N est dénombrable et $N \equiv M$, alors il existe $f : N \to M$ tel que $f(N) \prec M$.

Proof. (1) Soit $\Sigma = \{\varphi(x, a_1, \dots, a_n) \mid M \models \varphi(a, a_1, \dots, a_n)\}$. Alors l'ensemble $\Sigma'(x) = \{\varphi(x, b_1, \dots, b_n) \mid \varphi(x, a_1, \dots, a_n) \in \Sigma\}$ est finiment satisfaisable dans M : notons d'abord que $\Sigma'(x)$ est clos par conjonction finie, et donc il suffit de montrer que chaque formule est satisfaisable dans M ; si $\varphi(x, b_1, \dots, b_n) \in \Sigma'$, alors $M \models \exists x\, \varphi(x, a_1, \dots, a_n)$ (puisque a réalise Σ), et donc $M \models \exists x\, \varphi(x, b_1, \dots, b_n)$. Par ω-saturation de M, il existe $b \in M$ qui satisfait toutes les formules de Σ', et c'est le b désiré.
(2) (a), (c) et (e) sont ω-saturés. Dans toutes les structures, les formules (avec paramètres) en une variable sont de deux sortes. Ou bien elles n'ont qu'un nombre fini de réalisations : $x = a$ pour (a), $nx = m$ pour (b), (c) et (d), et $p(x) = 0$, p un polynome sur $\mathbb{C}$, pour (e). J'appellerai ces formules des formules "algébriques".

Toutes les autres formules atomiques et négatomiques ont une infinité de réalisations. Donc quand vous avez un ensemble fini de $\mathcal{L}(A)$-formules, ou bien il contient une formule algébrique, et dans ce cas tous les éléments satisfaisant cet ensemble fini de formules seront dans la "clôture algébrique" de A, $\mathrm{acl}(A)$, qui est contenue dans le modèle dans lequel vous travaillez ; ou s'il ne contient pas de formules algébriques et est satisfaisable dans la structure, alors il aura des réalisations partout en dehors d'un nombre fini d'éléments.

Pour (a), c'est donc clair: $\mathrm{acl}(A) = A$. Pour (c), on a $\mathrm{acl}(A)$ est le groupe divisible engendré par A. Comme $\mathbb{R}$ est non-dénombrable, si Σ est un ensemble de $\mathcal{L}(A)$-formules qui est finiment satisfaisable et ne contient pas de formule algébrique, alors tout élément de $\mathbb{R} \setminus \mathrm{acl}(A)$ satisfera $\Sigma(x)$. De même, dans (3), $\mathrm{acl}(A)$ est la clôture algébrique (au sens des corps) du sous-corps de $\mathbb{C}$ engendré par A ; si $\Sigma(x)$ ne contient pas de formule algébrique et est finiment satisfaisable, alors il sera satisfait par tout élément de $\mathbb{C} \setminus \mathrm{acl}(A)$: notez que $\mathrm{acl}(A)$ est dénombrable.

Vous n'aviez pas à donner ce raisonnement.

(b) Exemple montrant que $(\mathbb{Q}, +, 0)$ n'est pas ω-saturé. Soit $A = \{1\}$, et on regarde $\Sigma(x) = \{\underline{n}x \neq \underline{m}1 \mid n \in \mathbb{N}^{>0}, m \in \mathbb{Z}\}$, où $\underline{n}x$ est une abbréviation pour le terme $x + x + \cdots + x$ (n fois), et $\underline{m}1$ une abbréviation pour le terme $1+1+\cdots+1$ (m fois). Cet ensemble de formules n'est pas réalisé dans $\mathbb{Q}$, car il dit $x \neq m/n$ pour tout $m \in \mathbb{Z}$ et $n > 0$. Mais il est finiment satisfaisable : en effet, tout sous-ensemble fini ne mentionnera qu'un nombre fini de paires (n, m), et donc sera réalisé par n'importe quel rationnel non représenté par une de ces paires.

(d) Exemple montrant que $(\mathbb{R}, +, <, 0)$ n'est pas ω-saturé. On prend $A = \{1\}$, et $\Sigma(x) = \{x > \underline{m}1 \mid m \in \mathbb{N}\}$. Alors Σ est finiment satisfaisable dans $\mathbb{R}$, mais n'est pas réalisé.

(3) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une énumération de N. On va trouver une suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout $n \in \omega$, on a

$$(*) \qquad (M, a_0, \ldots, a_n) \equiv (N, b_0, \ldots, b_n).$$

L'application $N \to M$ qui envoie a_n sur b_n sera alors une application élémentaire. Supposons $a_0, \ldots, a_{n-1}$ construits et satisfaisant $(*)$, ou bien $n = 0$. On prend $A = \{a_0, \ldots, a_{n-1}\}$, on définit $\Sigma(x) = \{\varphi(x, a_0, \ldots, a_{n-1}) \mid N \models \varphi(a_n, a_0, \ldots, a_{n-1})\}$, et on regarde

$$\Sigma' = \{\varphi(x, b_0, \ldots, b_{n-1}) \mid \varphi(x, a_0, \ldots, a_{n-1}) \in \Sigma\}.$$

Comme dans le (1), Σ' est clos par conjonction finie, pour montrer que Σ' est finiment satisfaisable dans M, il suffit de montrer que chaque formule de Σ' est satisfaisable dans M. Par HI si $n > 0$, ou parce que $n = 0$ et $M \equiv N$, le fait que pour toute formule $\varphi \in \Sigma'$, N soit un modèle de $\exists x\, \varphi(x, a_0, \ldots, a_{n-1})$ entraine que M est un modèle de $\exists x\, \varphi(x, b_0, \ldots, b_{n-1})$. Par ω-saturation de M, il existe $b \in M$ qui satisfait toutes les formules de Σ'. Nous posons $b = b_n$.

Exercice 6. Soient $\mathcal{L}$ un langage, M et N deux $\mathcal{L}$-structures.

(1) Nous avons un ensemble $\mathcal{I}$ non vide, dont les éléments sont des $\mathcal{L}$-isomorphismes $f : A \to B$, avec A une sous-structure de M, et B une sous-structure de N. On suppose que $\mathcal{I}$ a la propriété du va-et-vient, c'est à dire :

– (Va) Si $f \in \mathcal{I}$ et $a \in M$, alors il existe $g \in \mathcal{I}$ prolongeant f et ayant a dans son domaine.

– (Vient) Si $f \in \mathcal{I}$ et $b \in N$, alors il existe $g \in \mathcal{I}$ prolongeant f et ayant b dans son image.

Montrez que $M \equiv N$. En fait, il est plus facile de montrer la chose suivante : Pour tout $f \in \mathcal{I}$ et uplet fini $\bar{a}$ dans le domaine de f, on a $(M, \bar{a}) \equiv (N, f(\bar{a}))$. (Même notation que dans l'exercice

précédent).
(2) (Bonus) On suppose connu : toute structure a une extension élémentaire ω-saturée. Montrez que $M \equiv N$ si et seulement s'il existe des extensions élémentaires M^* de M et N^* de N, et un système d'isomorphismes partiels $\mathcal{I}$ comme dans (1), ayant la propriété du va-et-vient.

Proof. (1) On montre par induction sur la complexité des formules la chose suivante : pour toute formule $\varphi(\bar{x})$,
$(*)$: Pour tout $f \in \mathcal{I}$, pour tout uplet $\bar{a}$ dans $\mathrm{dom}(f)$, on a $M \models \varphi(\bar{a})$ ssi $N \models \varphi(f(\bar{a}))$.

Chaque f étant un isomorphisme de $\mathcal{L}$-structures, les formules sans quantificateurs satisfont $(*)$. Il est d'autre part clair que si φ_1 et φ_2 satisfont $(*)$, alors aussi $\varphi_1 \wedge \varphi_2$ et $\neg\varphi_1$. Supposons que la formule $\psi(x, \bar{y})$ satisfasse $(*)$, et montrons que $\exists x\, \psi(x, \bar{y})$ aussi.

Soit $f \in \mathcal{I}$, $\bar{a}$ dans le domaine de f, et supposons que $M \models \exists x\, \psi(x, \bar{a})$. Soient $c \in M$ tel que $M \models \psi(c, \bar{a})$ et $g \in \mathcal{I}$ qui prolonge f et a c dans son domaine (on utilise le "Va" pour les trouver). Alors par HI appliquée à g, on a $N \models \psi(g(c), g(\bar{a}))$, et donc $N \models \exists x\, \psi(f(\bar{a}))$.

Dans l'autre direction, supposons $N \models \exists x, \psi(f(\bar{a}))$; on raisonne de la même façon en utilisant la direction "Vient" pour trouver un $c \in N$ satisfaisant $\psi(f(\bar{a}))$, un g prolongeant f ayant c dans son image. Alors $M \models \psi(g^{-1}(c), \bar{a})$, $N \models \exists x\, \psi(x, \bar{a})$.

Cet exercice montre que tous les éléments de $\mathcal{I}$ sont ce qu'on appelle des *isomorphismes partiels élémentaires pour les structures M et N*, c'est à dire, ce sont des isomorphismes entre des $\mathcal{L}$-structures A et B contenues dans M et N respectivement, mais qui en plus préservent les $\mathcal{L}$-formules au sens des structures M et N. C'est ce que nous vous demandions de montrer. Cela n'entraine pas du tout que si A est le domaine d'un $f \in \mathcal{I}$ alors $A \prec M$.

(2) Soient M' et N' des extensions élémentaires de M et N respectivement, possédant un système $\mathcal{I}$ d'isomorphismes partiels ayant la propriété du va-et-vient. Par le (1), nous savons donc que $M' \equiv N'$. Comme $M \prec M'$, en particulier $M \equiv M'$, et de même $N \equiv N'$, ce qui entraine $M \equiv N$.

Pour l'autre direction : soient M^* et N^* des extensions élémentaires de M et N respectivement, et qui sont ω-saturées. Nous prenons pour $\mathcal{I}$ l'ensemble des isomorphismes partiels entre des sous-structures A de M^* et B de N^* telles que A soit engendrée par un sous-ensemble fini de M^* (et donc B sera engendré par l'image par f de ce sous-ensemble), et qui satisfont, pour tout $\bar{a} \in A$,

$$(M^*, \bar{a}) \equiv (N^*, f(\bar{a})).$$

Il faut montrer que $\mathcal{I}$ est non vide, et a la propriété du va-et-vient.

Puisque $M \equiv N$, on a $M^* \equiv N^*$, et l'application vide satisfait la condition, et appartient donc à $\mathcal{I}$. Soit maintenant $f \in \mathcal{I}$, de domaine engendré par le uplet fini (ou vide) $\bar{a}$, et soit $c \in M^*$. Par hypothèse, nous avons $(M^*, \bar{a}) \equiv (N^*, f(\bar{a}))$. Soit $\Sigma = \{\varphi(x, \bar{a}) \mid M^* \models \varphi(c, \bar{a})\}$. Alors pour tout fragment fini Σ_0 de Σ, on a $N^* \models \exists x \bigwedge_{\varphi \in \Sigma_0} \varphi(x, f(\bar{a}))$, et donc l'ensemble $\Sigma' = \{\varphi(x, f(\bar{a})) \mid \varphi \in \Sigma\}$ est finiment satisfaisable dans N^*. Par ω-saturation, il existe $d \in N^*$ réalisant Σ', et on étend f à $g : \langle \bar{a}, c\rangle \to \langle f(\bar{a}), d\rangle$ en posant $g(c) = d$.

Exercice 7. Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une fonction injective et récursive. Montrez que f^{-1} est récursive.

Proof. Nous savons qu'une fonction est récursive si et seulement si son graphe est RE. Si Γ est le graphe de la fonction f, alors $\Gamma^t = \{(y,x) \mid (x,y) \in \Gamma\}$ est aussi RE ; comme f est injective, Γ^t est le graphe d'une fonction récursive, et celle-ci est f^{-1}.

Une autre possibilité, beaucoup plus simple, mais qui malheureusement ne marche que is f est totale : $f^{-1}(y) = (\mu x)(f(x) = y)$. (Rappelez-vous : pour que cette fonction prenne la valeur x_0, il faut que la fonction f soit définie pour toutes les valeurs de x inférieures ou égale à x_0.) Si f est totale, alors la fonction partielle définie par cette formule coïncide avec f^{-1}, et nous avons plus ou moins montré en classe qu'elle est récursive. En fait, il faudrait plutôt écrire : $f^{-1}(y) = (\mu x)((f(x) \dot{-} y)^2 + (y \dot{-} f(x))^2 = 0)$.

Mais quand f est partielle, la fonction ainsi définie est différente de f^{-1}.

Exercice 8. Donnez explicitement la formule définissant la relation fonctionnelle $y = V_\alpha$. Vous pouvez utiliser les abbréviations usuelles : $x \subseteq y$, $y = \mathcal{P}(x)$, $\mathrm{On}(x)$, $y = \bigcup_{z \in x} z$, etc.

Proof. $y = V_\alpha$: α est un ordinal et il existe une fonction f de domaine α, telle que pour tout $\beta \leq \alpha$, $f(\beta) = \bigcup_{x \in \beta} \mathcal{P}(f(x))$ et $f(\alpha) = y$.

(Etre une fonction de domaine u se dit : f est une fonction de domaine u ssi $\exists v\, f \subset u \times v \wedge \forall x \in u \exists y \in v\, (x,y) \in f \wedge \forall x, y_1, y_2\, (x, y_1) \in f \wedge (x, y_2) \in f \implies y_1 = y_2$.)