Correction du Td n° 10 d'Analyse fonctionnelle

Equations elliptiques

Séance du 26 avril 2013

Solution 1. *Inégalité de Poincaré-Wirtinger*

1. Rappelons que l'injection $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ est compacte. Supposons que l'inégalité désirée n'ait pas lieu. Il existerait donc $u_n \in H^1(\Omega)$ tel que $\|u_n - \bar{u}_n\|_{L^2} = 1$ et $\|\nabla u_n\|_{L^2} \to 0$. Ainsi, $v_n = u_n - \bar{u}_n$ est bornée dans $H^1(\Omega)$, donc quitte à extraire, converge vers v fortement dans L^2 et faiblement dans $H^1(\Omega)$. Comme $\|\nabla u_n\|_{L^2} = \|\nabla v_n\|_{L^2} \to 0$, en fait, $v_n \to v$ fortement dans $H^1(\Omega)$ et $\nabla v = 0$. Comme Ω est connexe, v est constante. Comme $\int v_n = 0$ (et Ω de mesure finie), $\int v = 0$ et donc $v = 0$. Ceci contredit que $\|v\|_{L^2} = \lim \|v_n\|_{L^2} = 1$.

⋆

Solution 2. *Problème de Neumann*

1. Comme u est régulière, si u est solution forte, on a le droit de faire l'intégration par partie, qui donne

$$\begin{aligned}\int fv &= -\int \Delta u.v + \int_\Omega uv = -\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v + \int_\Omega (\nabla u, \nabla v) + \int_\Omega uv \\ &= \int_\Omega (\nabla u, \nabla v) + \int_\Omega uv,\end{aligned}$$

par la condition au bord.

Réciproquement, si u est solution faible, on déduit de cette même intégration par parties que

$$\int_\Omega (-\Delta u + u - f)v - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v = 0$$

pour tout $v \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}) \subset H^1(\Omega)$. On en déduit (en utilisant des fonctions $\mathcal{C}_c^1(\Omega)$), que $-\Delta u + u = f$ p.p. dans Ω, puis pour tout x dans Ω (puisque u est $\mathcal{C}^2$), puis enfin que $\partial u / \partial n = 0$ sur $\partial\Omega$.

2. Soit

$$B(u, v) = \int_\Omega (\nabla u, \nabla v + uv).$$

Cette application est clairement bilinéaire, continue et coercive sur $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$. Le lemme de Lax-Milgram nous donne l'existence d'une unique fonction $u \in H^1(\Omega)$ telle que $B(u, v) = \int_\Omega fv$ pour tout $v \in H^1(\Omega)$. D'où l'existence et l'unicité de la solution faible.

De plus, comme $B(u, v) = B(v, u)$ pour tout u, v, on sait que u est l'unique minimiseur sur $H^1(\Omega)$ de $J(u) = \int_\Omega (\frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \frac{1}{2}u^2 - fu)$.

3. Si (1) admet une solution faible, alors $\int_\Omega \nabla u \nabla v = \int_\Omega fv$ pour tout $v \in H^1(\Omega)$. En prenant $v \equiv 1$, on en déduit que

$$\int_\Omega f = 0.$$

Montrons que cette condition sur f est suffisante pour avoir l'existence d'une solution faible. Pour cela, nous allons montrer que B est bilinéaire, continue et coercive sur $H^1_K(\Omega)\times H^1_K(\Omega)$. La bilinéarité et la continuité sont évidentes. Pour tout $u \in H^1_K(\Omega)$,

$$B(u,u) = \int_\Omega |\nabla u|^2.$$

Or l'inégalité de Poincaré-Wirtinger nous donne l'existence d'une constante C telle que pour tout $v \in H^1(\Omega)$,

$$\left\| v - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega v \right\|_{L^2(\Omega)} \le C\|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Donc si $u \in H^1_K(\Omega)$, $\|u\|_{L^2(\Omega)} \le C\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$ (ce qui signifie que $\|u\|_{H^1(\Omega)}$ et $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$ sont deux normes équivalentes sur $H^1_K(\Omega)$). D'où la coercivité de B :

$$B(u,u) \ge \frac{1}{C}\|u\|_{H^1(\Omega)}.$$

Donc il existe une unique fonction $u \in H^1_K(\Omega)$ telle que pour tout $\mathbf{v} \in \mathbf{H^1_K(\Omega)}$, $B(u,v) = \int_\Omega fv$. **L'exercice n'est pas fini ! Il faut maintenant étendre cette identité aux fonctions $v \in H^1(\Omega)$ (et non $H^1_K(\Omega)$).**

Soit donc $v \in H^1(\Omega)$ et $w = v - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega v$. Comme $w \in H^1_K(\Omega)$ et $\nabla v = \nabla w$, on a

$$B(u,v) = B(u,w) = \int_\Omega fw = \int_\Omega fv - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega\int_\Omega f(x)v(y)dxdy = \int_\Omega fv$$

car $\int_\Omega f = 0$. D'où la conclusion.

Si u_0 est une autre solution de cette équation, alors $-\Delta(u-u_0) = 0$ et $\partial_n(u-u_0) = 0$ sur $\partial\Omega$. On en déduit facilement que $\int_\Omega |\nabla(u-u_0)|^2 = 0$, donc $u - u_0$ est constante. Réciproquement, $u + c$ est solution de (1) pour toute constante c.

$\star$

Solution 3. *Un problème elliptique non linéaire*

1. On a :

$$H^1_g(\Omega) = g + H^1_0(\Omega).$$

2. Soit donc u_n une suite de minimiseurs, alors bien sûr $\int_\Omega |\nabla u_n|^2$ est une suite bornée, et donc $\int_\Omega |\nabla(u_n-u_0)|^2$ est bornée. Mais $u_n - u_0 \in H^1_0(\Omega)$, et par l'inégalité de Poincaré, $\int_\Omega |\nabla u|^2$ est une norme équivalente à $\|\cdot\|_{H^1}$ sur $H^1_0(\Omega)$. Ainsi, quitte à extraire, $u_n - u_0 \rightharpoonup u - u_0$ $H^1_0(\Omega)$-faible et par injection de Sobolev, dans $L^{p+1}(\Omega)$-faible. Comme $u - u_0 \in H^1_0(\Omega)$, $u \in H^1_g(\Omega)$.

On remarque que la fonctionnelle est fortement s.c.i. et convexe donc elle est faiblement s.c.i. En prenant la limite faible, on obtient

$$\int |\nabla u|^2 \le \liminf_{n\to\infty}\int |\nabla u_n|^2, \quad \int |u|^{p+1} \le \liminf_{n\to\infty}\int |u|^{p+1}.$$

Or $J(u_n) \to \inf J(v)$ par définition et donc u réalise le minimum.

Le minimiseur est unique car la fonctionnelle est strictement convexe.

3. Comme u est un minimiseur, on a que $J(u+tv) \ge J(u)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, $v \in H^1_0$. Notons $F(x) = \frac{1}{p+1}|x|^{p+1}$, $f(x) = |x|^{p-1}x$. En développant, cela donne

$$t\int \nabla u\nabla v + \frac{t^2}{2}\int |\nabla v|^2 + \int F(u+tv) - F(u) \ge 0.$$

On divise par t, et on fait tendre $t \to 0$ par valeur positives. Or par Taylor-Lagrange, on a pour chaque $x \in \Omega$

$$\frac{1}{t}(F(u+tv) - F(v)) - f(u)v = t \int_0^1 f'(u+\theta tv)(1-\theta)d\theta.$$

En particulier, vu que $|f'(x)| \leq C(1+|x|^{p-1})$

$$\begin{aligned}
&\left| \int_\Omega \int_0^1 f'(u+\theta tv)(1-\theta)d\theta dx \right| \\
&\leq \int_0^1 \int_\Omega |f'(u+\theta tv)| dx d\theta \\
&\leq C \int_0^1 \int (1 + 2^{p-1}|u|^{p-1} + 2^{p-1}|v|^{p-1}) dx \leq C(u,v),
\end{aligned}$$

pour $t \leq 1$. En particulier, on a donc

$$\frac{1}{t} \int (F(u+tv) - F(v)) \to \int f(u)v,$$

et donc

$$\int \nabla u \nabla v + \int f(u)v \geq 0.$$

De même en faisant tendre t vers 0 par valeurs négatives, on trouve que $\int \nabla u \nabla v + \int f(u)v \leq 0$. Ceci est vrai pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$; il s'agit bien de la formulation faible souhaitée.

⋆

Solution 4. *Problème elliptique avec contrainte intégrale*

On remarque pour commencer que sur $H_0^1(\Omega)$, on a l'inégalité de Poincaré donc la norme H^1 est équivalente à la norme L^2 du gradient.

1. Comme d'habitude (revoir le cours au besoin) on considère une suite minimisante (w_k) dans $\mathcal{A}$ telle que :

$$I(w_k) \to \inf_{w \in \mathcal{A}} I(w).$$

En particulier w_k est borné dans H_0^1 donc on peut (quitte à extraire) supposer que $w_k \rightharpoonup u$ faiblement dans H_0^1. Par l'inégalité de Fatou, on a bien $I(u) = \inf_{w \in \mathcal{A}} I(w)$.

Mais ce n'est pas fini, il faut vérifier que $J(u) = 0$. Pour cela, par injection compacte de H^1 dans L^2 on a $w_k \to u$ fortement dans L^2. On écrit ensuite :

$$|J(u)| = |J(u) - J(w_k)| \leq \int_\Omega |G(u) - G(w_k)|.$$

Je vous laisse conclure.

2. C'est un peu plus délicat que d'habitude à cause de la "non linéarité" de G : si $v \in \mathcal{A}$, on n'a pas forcément $u + tv \in \mathcal{A}$. Voilà comment on s'en sort quand même. On fixe v une fonction de $H_0^1(\Omega)$.

Commençons par supposer que $g(u)$ n'est pas nul presque partout. On peut alors choisir w dans $H_0^1(\Omega)$ telle que :

$$\int_\Omega g(u)w \neq 0.$$

On considère alors $j(\tau,\sigma) = J(u+\tau v+\sigma w)$. On vérifie que l'on a

$$j(0,0) = 0, \quad \frac{\partial j}{\partial \sigma}(0,0) \neq 0.$$

D'après le théorème des fonctions implicites, il existe un C^1 difféomorphisme ϕ tel que $\phi(0) = 0$ et pour $|\tau|$ assez petit :

$$j(\tau, \phi(\tau)) = 0$$

On considère à présent $i(\tau) = I(u+\tau v+\phi(\tau)w)$ (on a bien $u+\tau v+\phi(\tau)w \in \mathcal{A}$). Comme u est minimum, i a un minimum en 0, ce qui entraine :

$$\int_\Omega \nabla u.(\nabla v + \phi'(0)\nabla w) = 0.$$

Or (pour le voir, différencier $j(\tau,\phi(\tau)) = 0$) ,

$$\phi'(0) = -\frac{\int_\Omega g(u)v}{\int_\Omega g(u)w}.$$

On définit alors

$$\lambda = \frac{\int_\Omega \nabla u.\nabla w}{\int_\Omega g(u)w}.$$

Dans le cas où $g(u) = 0$ p.p., alors $\nabla G(u) = 0$ p.p. . Donc comme Ω est connexe, $G(u) = C$ p.p., puis $G(u) = 0$ p.p.

Par le théorème de trace, $G(u) = 0$ sur $\partial\Omega$. Comme $u = 0$ sur $\partial\Omega$, on a forcément $G(0) = 0$. Cela implique que $0 \in \mathcal{A}$.

Donc on a $u = 0$, car sinon $I(u) > I(0) = 0$. L'identité demandée est donc trivialement vérifiée pour n'importe quel λ.

⋆