Td n° 10 d'Analyse fonctionnelle

Espaces de Hilbert et opérateurs compacts

Séance du 22 mai 2010

Solution 1. *Convergence faible dans un Hilbert*

1. On note $x^p = \lim_n (e_p|x_n)$. On a $(\sum_{i=1}^k x^p e_p, x_n) \to \sum_{i=1}^k |x^p|^2$ donc par Cauchy-Schwarz :

$$\sum_{i=1}^k |x^p|^2 \leq \liminf \left\| \sum_{i=1}^k x^p e_p \right\| \|x_n\|.$$

Soit : $\sum_{i=1}^k |x^p|^2 \leq \liminf \|x_n\|^2$. Ainsi, $\sum |x^p|^2 < \infty$, on pose $x = \sum x^p e_p$. Pour tout p, $(e_p, x_n) \to (e_p, x)$. Considérons $F = \{y \in H | (y, x_n) \to (y, x)\}$. F est un s.e.v. fermé fort (car x_n est bornée), dense (car il contient e_n), donc $F = H$ et $x_n \rightharpoonup x$.

Comme $(e_p, e_n) = \delta_{n,p} \to 0$ quand $n \to +\infty$ pour tout p, on a $e_n \rightharpoonup 0$.

2. Montrons que l'adhérence faible de $\mathbb{S}$ est la boule unité fermée $\mathbb{B} = \{x | \|x\| \leq 1\}$. Tout d'abord, $\mathbb{B}$ est convexe fermé fort, donc fermé faible, et comme $\mathbb{S} \subset \mathbb{B}$, $\overline{\mathbb{S}}^w \subset \mathbb{B}$.

Pour l'inclusion inverse, rappelons que la boule unité muni de la topologie faible est métrisable, donc l'adhérence faible de $\overline{\mathbb{S}}^w$ est en fait l'adhérence séquentielle faible de $\mathbb{S}$. La suite $e_n \rightharpoonup 0$, donc $0 \in \overline{\mathbb{S}}^w$. Soit Ensuite $x \in \mathbb{B}$, on pose $x_n = x + \alpha_n e_n$, où α_n est tel que $\|x_n\| = 1$ ($\alpha_n = -(x, e_n) + \sqrt{(x, e_n)^2 - \|x\|^2 + 1}$). Ainsi, $(x_n, e_p) = (x, e_p)$ pour $n > p$, et comme à la question précédente, $x_n \rightharpoonup x$. Finalement $x \in \overline{\mathbb{S}}^w$, et $\overline{\mathbb{S}}^w = \mathbb{B}$.

3. Rappelons que $e_n \rightharpoonup 0$. Supposons que $e_{m_k} + m_k e_{n_k} \rightharpoonup 0$. Si m_k est bornée, quitte à extraire on peut supposer m_k constant, valant m. Si n_k est elle aussi bornée, on peut la supposer constante : la convergence faible vers 0 est alors absurde. Sinon, $me_{n_k} \rightharpoonup 0$ et on a convergence faible vers $e_m \neq 0$. Enfin, si m_k n'est pas bornée, la suite n'est pas bornée (en norme) : elle ne converge pas faiblement, ce qui est contradictoire. En effet, dans un e.v.n. E, si $x_n \rightharpoonup x$ alors (x_n) est bornée : on considère les formes linéaires sur E' $\varphi_n : \ell \mapsto \ell(x_n)$. φ_n est de norme $\|x_n\|$. Si $\|x_n\| \to \infty$, par le théorème de Banach-Steinhaus, il existe ℓ tel que $\sup |\varphi_n(\ell)| = \infty$, mais $\varphi_n(\ell) = \ell(x_n) \to \ell(x)$ par convergence faible.

Ainsi 0 n'est pas dans l'adhérence séquentielle faible. Par contre e_n y appartient, et comme $e_n \rightharpoonup 0$, 0 est dans la double adhérence.

On n'est certainement pas dans un cadre métrique.

⋆

Solution 2. *Opérateurs compacts*

1. Un s.e.v. de dim fini est localement compact, donc un opérateur continu de rang fini est compact. D'autre part, la limite d'opérateurs compact est compacte. En effet, soit $T_n \in \mathcal{K}(E, F)$ et $T \in \mathcal{L}(E, F)$ tels que $\|T_n - T\| \to 0$. Montrons que $T(B_E)$ est précompacte. Soit $\varepsilon > 0$, il existe N tel que $\|T_N - T\| < \varepsilon$ et comme $\overline{T_N(B_E)}$ est compacte, $T_N(B_E)$ est précompacte. On peut donc la recouvrir par un nombre fini de boules de rayon ε, $B(T_N x_i, \varepsilon)$. Soit alors $Tx \in T(B_E)$, il existe i tel que $T_N x \in B(T_N x_i, \varepsilon)$ et donc

$$\|Tx - Tx_i\| \leq \|(T - T_N)x\| + \|T_N x - T_N x_i\| + \|(T_N - T)x_i\| \leq 3\varepsilon.$$

Finalement, $Tx \in B(Tx_i, 3\varepsilon)$ et $T(B_E) \subset \cup B(Tx_i, 3\varepsilon)$. $T(B_E)$ est donc précompacte, et comme F est complet, T est compact.

2. Soit $\varepsilon > 0$. $T(B_E)$ est précompacte, on peut donc la recouvrir par des boules de rayon ε $B(Tx_i, \varepsilon)$. Soit $F_\varepsilon = \mathrm{Vect}(x_i)$ (de dim fini) et P_F la projection orthogonale sur F_ε. On pose $T_\varepsilon = P_F \circ T$. T_ε est un opérateur de rang fini. D'autre part, si $x \in B_E$, il existe i tel que $\|Tx - Tx_i\| < \varepsilon$ et donc ($Tx_i = P_F Tx_i$)

$$\|Tx - T_\varepsilon x\| = \|Tx - P_F(Tx)\| \leq \|Tx - Tx_i\| + \|P_F(Tx_i - Tx)\| \leq 2\varepsilon,$$

car $\|P_F\| \leq 1$. Ainsi on a $\|T - T_e\| \leq 2\varepsilon$, et $\lim_{\varepsilon \to 0} T_\varepsilon = T$.

3. Si T est compact, ce résultat a été vu en cours (et E réflexif n'est pas nécessaire). Montrons la réciproque. Soit B la boule unité fermée de rayon 1 et de centre 0 de E. Soit $(x_n)_n$ une suite déléments de B. Comme E est réflexif, on peut supposer que $x_n \rightharpoonup x$ dans B. L'hypothèse de l'énoncé nous donne alors que $(Tx_n)_n$ tend vers Tx. Donc l'image de la boule unité est bien relativement compact et T est compact.

4. On a $M_a \delta_{kn} = a_k \delta_{kn}$, donc si $M_a \in \mathcal{L}(E, F)$, (a_n) est bornée. Réciproquement on a bien sur $\|M_a u\|_{\ell^2} \leq \|a_n\|_{\ell^\infty} \|u\|_{\ell^2}$.

Si $a_n \to 0$, considérons les suites $a^m = (a_n^m \mathbb{1}_{n \leq m})_n$. Alors M_{a^m} est de rang fini, et on voit que $\|M_a - M_{a^m}\| = \sup_{n \geq m} |a_n| \to 0$ quand $m \to \infty$. Ainsi, M_a est limite d'opérateur de rang fini, et est donc compact.

Réciproquement, supposons M_a est compact. Considérons $\delta^k = (\delta_{kn})_n$. $\delta^k \rightharpoonup 0$ donc $M_a \delta^k$ converge fortement vers 0 dans ℓ^2. Mais $\|M_a \delta^k\| = \|a_k \delta^k\| \to 0$.

⋆

Solution 3. *Opérateurs de Hilbert-Schmidt*

1. Par définition, $(T^* f_p | e_n) = (f_p | Te_n)$, donc $\|T^* f_p\|^2 = \sum_n |(f_p|Te_n)|^2$. Ainsi,

$$\sum_p \|T^* f_p\|^2 = \sum_p \sum_n |(f_p|Te_n)|^2 = \sum_n \sum_p |(f_p|Te_n)|^2 = \sum_n \|Te_n\|^2,$$

car (f_p) est une base hilbertienne de G (tous les termes son positifs, ce qui autorise é faire les calculs). Étant donné une autre base hilbertienne $(\tilde{e}_n)$ de H, on a également que $\sum_n \|T\tilde{e}_n\|^2 = \sum_n \|T^* f_p\|^2$, ce qui entraine que $\sum_n \|T\tilde{e}_n\|^2 < \infty$ et l'égalité demandée.

2. Soit u_n une suite bornée de H. Quitte à extraire, on peut supposer que $u_n \rightharpoonup u$ dans H-faible. On note $u_n = \sum_m a_{n,m} e_m$. Par convergence faible, on a que pour tout m, $a_{n,m} \to a_m$ quand $n \to \infty$, et que $u = \sum_m a_m e_m$. Comme la suite u_n, donc $u_n - u$, est bornée, il existe C tel que pour tout n,

$$\sum_m |a_{nm} - a_m|^2 \leq C.$$

Par continuité de T, $Tu_n = \sum_m a_{n,m} Te_m$. Soit $\varepsilon > 0$, il existe M tel que $\sum_{m \geq M} \|Te_m\|^2 \leq \varepsilon / C$, et N tel que pour $n \geq M$,

$$\sum_{m < M} |a_{n,m} - a_m|^2 \leq \frac{\varepsilon}{\|T\|_{HS}^2}.$$

Alors

$$\begin{aligned}
\|Tu_n - Tu\|^2 &= \left\|\sum_m (a_{n,m} - a_m) Te_m\right\|^2 \\
&\leq \left|\sum_{m<M} |a_{n,m} - a_m| \|Te_m\|\right|^2 + \left|\sum_{m\geq M} |a_{n,m} - a_m| \|Te_m\|\right|^2 \\
&\leq \sum_{m<M} |a_{n,m} - a_m|^2 \sum_{m<M} \|Te_m\|^2 + \sum_{m\geq M} |a_{n,m} - a_m|^2 \sum_{m\geq M} \|Te_m\|^2 \\
&\leq \frac{\varepsilon}{\|T\|_{HS}^2} \|T\|_{HS}^2 + C\frac{\varepsilon}{C} \leq 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

Donc $Tu_n \to Tu$ dans H fort. T est donc compact.

Réciproquement il existe des opérateurs T compacts mais qui ne sont pas de Hilbert-Schmidt : par exemple la multiplication M_a avec $a_n = \frac{1}{1+\ln n}$ $(n \geq 1)$.

3. Vérifier en prenant des produits scalaires avec e_n

4. Soit T un opérateur de Hilbert-Schmidt, on pose $Te_n = \sum_m a_{n,m} e_m$ et

$$K(x,y) = \sum_{m,n} a_{m,n} e_n(x) e_m(y).$$

Alors $K \in L^2(\Omega \times \Omega)$ car T est de Hilbert-Schmidt ($\|K\|_{L^2}^2 = \sum_{n,m} a_{nm}^2 = \|T\|_{HS}^2 < \infty$). Par construction, T_K vérifie que pour tout p, q, $(T_K e_p | e_q) = a_{p,q}$ et donc $T_K e_p = Te_p$. T_K est continue sur $L^2(\Omega)$ et coincide avec T sur $\mathrm{Vect}(e_n)$ qui est dense, donc est égal à T.

Supposons que $Tf = \int K_1 f = \int K_2 f$. Alors l'opérateur é associé à $K_1 - K_2$ est nul donc $0 = \|T_{K_1-K_2}\|_{L^2} = \|K_1 - K_2\|_{L^2}$ et $K_1 = K_2$.

⋆

Solution 4. *S.e.v. de fonctions dérivables fermé dans les fonctions continues*

1. On utilise le théorème du graphe fermé. Supposons que $(f_n, f_n') \to (f, g)$ dans la norme du graphe, ie C^0. On a :

$$f_n(x) = f_n(0) + \int_0^x f_n'(t)dt$$

Cette égalité passe à la limite dans, donc :

$$f(x) = f(0) + \int_0^x g(t)dt$$

Ce qui prouve que f est C^1 et que $f' = g$. Ainsi D est continue. On peut également considérer $Id : (F, \|\cdot\|_{C^1}) \to (F, \|\cdot\|_{C^0})$ (vérifier que les espaces en jeu sont complets) et utiliser le théorème d'isomorphisme de Banach.

2. Soit K la norme d'opérateur de D. On considère B la boule unité du Banach F (muni de la norme C^0). Si $f \in B$, $\|f'\|_{C^0} \leq K$. On en déduit que B est formé de fonctions uniformément borné (par 1), K-lipschitziennes donc équicontinues : le théorème d'Ascoli s'applique, et donc B est relativement compact. Mais la boule unité d'un e.v.n n'est relativement compacte que s'il est de dimension finie.

(Rappel : un e.v.n. E localement compact est de dimension finie. Tout d'abord E est bien évidemment complet. Soit donc U un voisinage ouvert de 0, tel que $\bar{U}$ soit compact.

U est relativement compact, donc U peut être recouvert par un nombre fini d'ouvert de type $x + \frac{1}{2}U$ (avec $x \in U$), disons :

$$U \subset \bigcup_{i=1}^{n} x_i + \frac{1}{2}U.$$

Soit $F = \mathrm{Vect}(x_i)$. On a en particulier : $U \subset F + \frac{1}{2}U$.

Par récurrence immédiate, on obtient : $U \subset F + \frac{1}{2^k}U$. U étant relativement compact, U est borné ; de plus F, de dimension finie, est un s.e.v. fermé. On en déduit que :

$$U \subset \bar{F} = F$$

U étant un voisinage de 0, on conclut par homogénéité que $E \subset F$, et $E = F$ est de dimension finie.)

3. F est encore de dimension finie. En effet, montrons que $(F, \|\cdot\|_{C^\alpha})$ est complet. Si f_n est de Cauchy, $f_n \to f \in F$ dans $C^0([0,1])$ car F est fermé. Vu la convergence ponctuelle et le fait que f_n est de Cauchy dans C^α,

$$\begin{aligned}\frac{|(f_n - f)(x) - (f_n - f)(y)|}{|x-y|^\alpha} &= \lim_m \frac{|(f_n - f_m)(x) - (f_n - f_m)(y)|}{|x-y|^\alpha} \\ &\leq \liminf_m \|f_n - f_m\|_{C^\alpha}.\end{aligned}$$

Ainsi, en passant au $\sup_{x \neq y}$, on obtient

$$\|f_n - f\|_{C^\alpha} \leq \|f_n - f\|_{C^0} + \liminf_m \|f_n - f_m\|_{C^\alpha} \to 0 \quad \text{quand} \quad n \to \infty.$$

Ainsi, $f_n \to f$ dans C^α et $(F, \|\cdot\|_{C^\alpha})$ est un Banach.

Comme $\|f\|_{C^0} \leq \|f\|_{C^\alpha}$, on en déduit (cf. exercice 1) que les deux normes sont équivalentes. Montrons enfin que la $B_{F,C^0}(0,1)$ est relativement compacte, ce qui conclura. $B_{F,C^0}(0,1)$ est borné, et par ce qui précède, $B_{F,C^0}(0,1) \subset B_{F,C^\alpha}(0,C)$. Ceci entraine que pour tout $f \in B_{F,C^0}(0,1)$,

$$\forall x, y \in [0,1], \quad |f(x) - f(y)| \leq C|x-y|^\alpha,$$

et donc $B_{F,C^0}(0,1)$ est équicontinue. Le théorème d'Ascoli montre que $B_{F,C^0}(0,1)$ est relativement compacte dans $(F, \|\cdot\|_{C^0})$. F est donc de dimension finie.

⋆

Solution 5. *Opérateurs à noyaux*

1. L'inégalité de Holder donne

$$|Tf(x)| \leq \Big(\int_{X\times Y} |k(x,y)|^2 d\eta(y)\Big)^{1/2} \Big(\int_Y |f(y)|^2 d\eta(y)\Big)^{1/2}.$$

En intégrant le carré de cette inégalité sur X et en utilisant le théorème de Fubini, on en déduit que

$$\|Tf\|_{L^2(X)} \leq \|k\|_{L^2(X\times Y)} \|f\|_{L^2(Y)}.$$

D'où la continuité de T.

Comme $L^2(X,\mu)$ est réflexif, alors on a vu que pour montrer la compacité de T, il suffit de montrer que si $f_n \rightharpoonup f$ dans $L^2(X,\mu)$, alors $(Tf_n)_n$ converge fortement vers Tf. Par linéarité, on peut supposer que $f = 0$. Or si $f_n \rightharpoonup 0$, alors $Tf_n(x) \to 0$ pour tout x tel que $y \mapsto k(x,y) \in L^2(Y,\eta)$, c'est-à-dire pour presque tout x. De plus, on a vu que dans ce cas

$$|Tf(x)| \leq \Big(\int_{X\times Y} |k(x,y)|^2 d\eta(y)\Big)^{1/2} \|f_n\|_{L^2(Y)}.$$

Comme une suite faiblement convergente est bornée, on en déduit $(Tf_n)_n$ est bornée presque partout par une fonction $L^2(X,\mu)$. donc le théorème de convergence dominée entraîne que $Tf_n \to 0$ dans $L^2(X,\mu)$ fortement.

$\star$