

# Correction du Td n° 11 d'Analyse fonctionnelle

## ESPACES DE HILBERT ET OPÉRATEURS COMPACTS

Séance du 17 Mai 2013

### Solution 1. Convergence faible dans un Hilbert

1. On note  $x^p = \lim_n (e_p | x_n)$ . On a  $(\sum_{i=1}^k x^p e_p, x_n) \rightarrow \sum_{i=1}^k |x^p|^2$  donc par Cauchy-Schwarz :

$$\sum_{i=1}^k |x^p|^2 \leq \liminf \left\| \sum_{i=1}^k x^p e_p \right\| \|x_n\|.$$

Soit :  $\sum_{i=1}^k |x^p|^2 \leq \liminf \|x_n\|^2$ . Ainsi,  $\sum |x^p|^2 < \infty$ , on pose  $x = \sum x^p e_p$ . Pour tout  $p$ ,  $(e_p, x_n) \rightarrow (e_p, x)$ . Considérons  $F = \{y \in H | (y, x_n) \rightarrow (y, x)\}$ .  $F$  est un s.e.v. fermé fort (car  $x_n$  est bornée), dense (car il contient  $e_n$ ), donc  $F = H$  et  $x_n \rightharpoonup x$ .

Comme  $(e_p, e_n) = \delta_{n,p} \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow +\infty$  pour tout  $p$ , on a  $e_n \rightarrow 0$ .

2. Montrons que l'adhérence faible de  $\mathbb{S}$  est la boule unité fermée  $\mathbb{B} = \{x | \|x\| \leq 1\}$ . Tout d'abord,  $\mathbb{B}$  est convexe fermé fort, donc fermé faible, et comme  $\mathbb{S} \subset \mathbb{B}$ ,  $\overline{\mathbb{S}}^w \subset \mathbb{B}$ .

Pour l'inclusion inverse, rappelons que la boule unité muni de la topologie faible est métrisable, donc l'adhérence faible de  $\overline{\mathbb{S}}^w$  est en fait l'adhérence séquentielle faible de  $\mathbb{S}$ . La suite  $e_n \rightarrow 0$ , donc  $0 \in \overline{\mathbb{S}}^w$ . Soit Ensuite  $x \in \mathbb{B}$ , on pose  $x_n = x + \alpha_n e_n$ , où  $\alpha_n$  est tel que  $\|x_n\| = 1$  ( $\alpha_n = -(x, e_n) + \sqrt{(x, e_n)^2 - \|x\|^2 + 1}$ ). Ainsi,  $(x_n, e_p) = (x, e_p)$  pour  $n > p$ , et comme à la question précédente,  $x_n \rightharpoonup x$ . Finalement  $x \in \overline{\mathbb{S}}^w$ , et  $\overline{\mathbb{S}}^w = \mathbb{B}$ .

3. Rappelons que  $e_n \rightarrow 0$ . Supposons que  $e_{m_k} + m_k e_{n_k} \rightarrow 0$ . Si  $m_k$  est bornée, quitte à extraire on peut supposer  $m_k$  constant, valant  $m$ . Si  $n_k$  est elle aussi bornée, on peut la supposer constante : la convergence faible vers 0 est alors absurde. Sinon,  $m e_{n_k} \rightarrow 0$  et on a convergence faible vers  $e_m \neq 0$ . Enfin, si  $m_k$  n'est pas bornée, la suite n'est pas bornée (en norme) : elle ne converge pas faiblement, ce qui est contradictoire. En effet, dans un e.v.n.  $E$ , si  $x_n \rightharpoonup x$  alors  $(x_n)$  est bornée : on considère les formes linéaires sur  $E'$   $\varphi_n : \ell \mapsto \ell(x_n)$ .  $\varphi_n$  est de norme  $\|x_n\|$ . Si  $\|x_n\| \rightarrow \infty$ , par le théorème de Banach-Steinhaus, il existe  $\ell$  tel que  $\sup |\varphi_n(\ell)| = \infty$ , mais  $\varphi_n(\ell) = \ell(x_n) \rightarrow \ell(x)$  par convergence faible.

Ainsi 0 n'est pas dans l'adhérence séquentielle faible. Par contre  $e_n$  y appartient, et comme  $e_n \rightarrow 0$ , 0 est dans la double adhérence.

On n'est certainement pas dans un cadre métrique.

★

### Solution 2. Opérateurs compacts

1. Un s.e.v. de dim fini est localement compact, donc un opérateur continu de rang fini est compact. D'autre part, la limite d'opérateurs compact est compacte. En effet, soit  $T_n \in \mathcal{K}(E, F)$  et  $T \in \mathcal{L}(E, F)$  tels que  $\|T_n - T\| \rightarrow 0$ . Montrons que  $T(B_E)$  est précompacte. Soit  $\varepsilon > 0$ , il existe  $N$  tel que  $\|T_N - T\| < \varepsilon$  et comme  $\overline{T_N(B_E)}$  est compacte,  $T_N(B_E)$  est précompacte. On peut donc la recouvrir par un nombre fini de boules de rayon  $\varepsilon$ ,  $B(T_N x_i, \varepsilon)$ . Soit alors  $Tx \in T(B_E)$ , il existe  $i$  tel que  $T_N x \in B(T_N x_i, \varepsilon)$  et donc

$$\|Tx - T x_i\| \leq \|(T - T_N)x\| + \|T_N x - T_N x_i\| + \|(T_N - T)x_i\| \leq 3\varepsilon.$$

Finalement,  $Tx \in B(Tx_i, 3\varepsilon)$  et  $T(B_E) \subset \cup B(Tx_i, 3\varepsilon)$ .  $T(B_E)$  est donc précompacte, et comme  $F$  est complet,  $T$  est compact.

2. Soit  $\varepsilon > 0$ .  $T(B_E)$  est précompacte, on peut donc la recouvrir par des boules de rayon  $\varepsilon$   $B(Tx_i, \varepsilon)$ . Soit  $F_\varepsilon = \text{Vect}(x_i)$  (de dim fini) et  $P_F$  la projection orthogonale sur  $F_\varepsilon$ . On pose  $T_\varepsilon = P_F \circ T$ .  $T_\varepsilon$  est un opérateur de rang fini. D'autre part, si  $x \in B_E$ , il existe  $i$  tel que  $\|Tx - Tx_i\| < \varepsilon$  et donc  $(Tx_i = P_F Tx_i)$

$$\|Tx - T_\varepsilon x\| = \|Tx - P_F(Tx)\| \leq \|Tx - Tx_i\| + \|P_F(Tx_i - Tx)\| \leq 2\varepsilon,$$

car  $\|P_F\| \leq 1$ . Ainsi on a  $\|T - T_\varepsilon\| \leq 2\varepsilon$ , et  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T_\varepsilon = T$ .

3. Si  $T$  est compact, ce résultat a été vu en cours (et  $E$  réflexif n'est pas nécessaire). Montrons la réciproque. Soit  $B$  la boule unité fermée de rayon 1 et de centre 0 de  $E$ . Soit  $(x_n)_n$  une suite d'éléments de  $B$ . Comme  $E$  est réflexif, on peut supposer que  $x_n \rightharpoonup x$  dans  $B$ . L'hypothèse de l'énoncé nous donne alors que  $(Tx_n)_n$  tend vers  $Tx$ . Donc l'image de la boule unité est bien relativement compacte et  $T$  est compact.

4. On a  $M_a \delta_{kn} = a_k \delta_{kn}$ , donc si  $M_a \in \mathcal{L}(E, F)$ ,  $(a_n)$  est bornée. Réciproquement on a bien sur  $\|M_a u\|_{\ell^2} \leq \|a_n\|_{\ell^\infty} \|u\|_{\ell^2}$ .

Si  $a_n \rightarrow 0$ , considérons les suites  $a^m = (a_n^m \mathbb{1}_{n \leq m})_n$ . Alors  $M_{a^m}$  est de rang fini, et on voit que  $\|M_a - M_{a^m}\| = \sup_{n > m} |a_n| \rightarrow 0$  quand  $m \rightarrow \infty$ . Ainsi,  $M_a$  est limite d'opérateur de rang fini, et est donc compact.

Réciproquement, supposons  $M_a$  est compact. Considérons  $\delta^k = (\delta_{kn})_n$ .  $\delta^k \rightharpoonup 0$  donc  $M_a \delta^k$  converge fortement vers 0 dans  $\ell^2$ . Mais  $\|M_a \delta^k\| = \|a_k \delta^k\| \rightarrow 0$ .

★

### Solution 3. Opérateurs de Hilbert-Schmidt

1. Par définition,  $(T^* f_p | e_n) = (f_p | T e_n)$ , donc  $\|T^* f_p\|^2 = \sum_n |(f_p | T e_n)|^2$ . Ainsi,

$$\sum_p \|T^* f_p\|^2 = \sum_p \sum_n |(f_p | T e_n)|^2 = \sum_n \sum_p |(f_p | T e_n)|^2 = \sum_n \|T e_n\|^2,$$

car  $(f_p)$  est une base hilbertienne de  $G$  (tous les termes sont positifs, ce qui autorise à faire les calculs). Étant donné une autre base hilbertienne  $(\tilde{e}_n)$  de  $H$ , on a également que  $\sum_n \|T \tilde{e}_n\|^2 = \sum_n \|T^* f_p\|^2$ , ce qui entraîne que  $\sum_n \|T \tilde{e}_n\|^2 < \infty$  et l'égalité demandée.

2. Soit  $u_n$  une suite bornée de  $H$ . Quitte à extraire, on peut supposer que  $u_n \rightharpoonup u$  dans  $H$ -faible. On note  $u_n = \sum_m a_{n,m} e_m$ . Par convergence faible, on a que pour tout  $m$ ,  $a_{n,m} \rightarrow a_m$  quand  $n \rightarrow \infty$ , et que  $u = \sum_m a_m e_m$ . Comme la suite  $u_n$ , donc  $u_n - u$ , est bornée, il existe  $C$  tel que pour tout  $n$ ,

$$\sum_m |a_{nm} - a_m|^2 \leq C.$$

Par continuité de  $T$ ,  $Tu_n = \sum_m a_{n,m} T e_m$ . Soit  $\varepsilon > 0$ , il existe  $M$  tel que  $\sum_{m \geq M} \|T e_m\|^2 \leq \varepsilon/C$ , et  $N$  tel que pour  $n \geq M$ ,

$$\sum_{m < M} |a_{n,m} - a_m|^2 \leq \frac{\varepsilon}{\|T\|_{HS}^2}.$$

Alors

$$\begin{aligned}
\|Tu_n - Tu\|^2 &= \left\| \sum_m (a_{n,m} - a_m)Te_m \right\|^2 \\
&\leq \left| \sum_{m < M} |a_{n,m} - a_m| \|Te_m\| \right|^2 + \left| \sum_{m \geq M} |a_{n,m} - a_m| \|Te_m\| \right|^2 \\
&\leq \sum_{m < M} |a_{n,m} - a_m|^2 \sum_{m < M} \|Te_m\|^2 + \sum_{m \geq M} |a_{n,m} - a_m|^2 \sum_{m \geq M} \|Te_m\|^2 \\
&\leq \frac{\varepsilon}{\|T\|_{HS}^2} \|T\|_{HS}^2 + C \frac{\varepsilon}{C} \leq 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

Donc  $Tu_n \rightarrow Tu$  dans  $H$  fort.  $T$  est donc compact.

Réciproquement il existe des opérateurs  $T$  compacts mais qui ne sont pas de Hilbert-Schmidt : par exemple la multiplication  $M_a$  avec  $a_n = \frac{1}{1+\ln n}$  ( $n \geq 1$ ).

3. Vérifier en prenant des produits scalaires avec  $e_n$

4. Soit  $T$  un opérateur de Hilbert-Schmidt, on pose  $Te_n = \sum_m a_{m,n}e_m$  et

$$K(x, y) = \sum_{m,n} a_{m,n}e_n(x)e_m(y).$$

Alors  $K \in L^2(\Omega \times \Omega)$  car  $T$  est de Hilbert-Schmidt ( $\|K\|_{L^2}^2 = \sum_{n,m} a_{nm}^2 = \|T\|_{HS}^2 < \infty$ ). Par construction,  $T_K$  vérifie que pour tout  $p, q$ ,  $(T_K e_p | e_q) = a_{p,q}$  et donc  $T_K e_p = T e_p$ .  $T_K$  est continue sur  $L^2(\Omega)$  et coïncide avec  $T$  sur  $\text{Vect}(e_n)$  qui est dense, donc est égal à  $T$ .

Supposons que  $Tf = \int K_1 f = \int K_2 f$ . Alors l'opérateur é associé à  $K_1 - K_2$  est nul donc  $0 = \|T_{K_1 - K_2}\|_{L^2} = \|K_1 - K_2\|_{L^2}$  et  $K_1 = K_2$ .

★

#### Solution 4. Opérateurs à noyaux

1. L'inégalité de Holder donne

$$|Tf(x)| \leq \left( \int_{X \times Y} |k(x, y)|^2 d\eta(y) \right)^{1/2} \left( \int_Y |f(y)|^2 d\eta(y) \right)^{1/2}.$$

En intégrant le carré de cette inégalité sur  $X$  et en utilisant le théorème de Fubini, on en déduit que

$$\|Tf\|_{L^2(X)} \leq \|k\|_{L^2(X \times Y)} \|f\|_{L^2(Y)}.$$

D'où la continuité de  $T$ .

Comme  $L^2(X, \mu)$  est réflexif, alors on a vu que pour montrer la compacité de  $T$ , il suffit de montrer que si  $f_n \rightharpoonup f$  dans  $L^2(X, \mu)$ , alors  $(Tf_n)_n$  converge fortement vers  $Tf$ . Par linéarité, on peut supposer que  $f = 0$ . Or si  $f_n \rightharpoonup 0$ , alors  $Tf_n(x) \rightarrow 0$  pour tout  $x$  tel que  $y \mapsto k(x, y) \in L^2(Y, \eta)$ , c'est-à-dire pour presque tout  $x$ . De plus, on a vu que dans ce cas

$$|Tf(x)| \leq \left( \int_{X \times Y} |k(x, y)|^2 d\eta(y) \right)^{1/2} \|f_n\|_{L^2(Y)}.$$

Comme une suite faiblement convergente est bornée, on en déduit  $(Tf_n)_n$  est bornée presque partout par une fonction  $L^2(X, \mu)$ . donc le théorème de convergence dominée entraîne que  $Tf_n \rightarrow 0$  dans  $L^2(X, \mu)$  fortement.

★