

Correction du Td n° 12 d'Analyse fonctionnelle

PROBLÈMES VARIATIONNELS

Séance du 24 Mai 2013

Solution 1. *Preliminaires*

1. L'égalité est vraie pour $u \in C^1$. On approche ensuite $u \in H^1(\Omega)$ par des fonctions C^1 et on montre qu'il y a convergence des deux côtés de l'égalité.

2. On approche la fonction $(x)_+$ par des fonctions C^1 et on conclue de même en montrant la convergence des deux côtés de l'égalité.

★

Solution 2. *Régularité elliptique*

1. Si u est solution faible, pour tout $v \in H^1(\mathbb{R}^n)$ on a

$$\int \nabla u \cdot \nabla v + \int uv = \int fv.$$

On applique cette égalité avec $v = D_{-h}D_h u$, et après changement de variable et intégration par partie on obtient

$$\|D_h \nabla u\|_{L^2} \leq C \|f\|_{L^2} \|D_{-h}D_h u\|_{L^2}.$$

Or pour tout $v \in H^1(\mathbb{R}^n)$ on a $\|D_h v\|_{L^2} \leq C \|\nabla v\|_{L^2}$. En effet

$$|\tau_h v(x) - v(x)| \leq \left| \int_0^1 h \cdot \nabla v(x + th) dt \right|,$$

donc

$$\int |\tau_h v(x) - v(x)|^2 dx \leq |h|^2 \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^1 |\nabla v(x + th)|^2 \leq |h|^2 \|\nabla v\|_{L^2}^2.$$

2. On peut supposer $h = \epsilon e_i$. Soit $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. On a

$$\int (D_h \partial_j u) \phi = \int \partial_j u D_{-h} \phi \longrightarrow \int \partial_j u \partial_i \phi$$

quand $\epsilon \rightarrow 0$. On a donc, en utilisant la question précédente

$$\left| \int \phi \partial_i \partial_j u \right| \leq C \|\phi\|_{L^2}$$

donc $\partial_i \partial_j u \in L^2$.

3. Le raisonnement précédent nous dit que $\partial_i \partial_j u \in L^2$ si on n'a pas $i = j = 1$. Mais comme

$$\partial_1^2 u = \Delta u - \sum_{j=2}^n \partial_j^2 u,$$

on peut conclure.

★

Solution 3. *Première valeur propre du laplacien*

1. Soit $f, g \in L^2$, et $u = (-\Delta)^{-1}f$. Par définition,

$$((-\Delta)^{-1}f, g) = (u, (-\Delta((-\Delta)^{-1}g))) = (-\Delta u, (-\Delta)^{-1}g) = (f, (-\Delta)^{-1}g),$$

donc $(-\Delta)^{-1}$ est auto-adjoint. De plus comme $(-\Delta)^{-1}(B_{L^2}(0, 1)) \subset B_{H_0^1}(0, C)$, c'est un opérateur compact. Enfin,

$$((-\Delta)^{-1}f, f) = (u, (-\Delta u)) = \|\nabla u\|_{L^2}^2 \geq 0,$$

donc c'est un opérateur positif.

On sait donc qu'il existe une base de vecteurs propres de l'opérateur compact auto-adjoint $(-\Delta)^{-1}$ sur $L^2(\Omega)$. Soit $(e_n)_n$ cette base et $(\mu_n)_n$ la suite décroissante de valeurs propres associées. Celles-ci sont toutes strictement positives par positivité de l'opérateur et tendent vers 0 (voir Thm 4.7 du cours). On conclut en posant $\lambda_n = 1/\mu_n$.

2. Tout d'abord, comme $-\Delta e_n = \lambda_n e_n$, on voit que

$$\|\nabla e_n\|_{L^2}^2 = \lambda_n \|e_n\|_{L^2}^2 = \lambda_n.$$

D'autre part,

$$\int \nabla e_n \nabla e_m = - \int \Delta e_n e_m = \lambda_n \int e_n e_m = \lambda_n \delta_{n,m},$$

donc e_n est une base orthogonale pour $H_0^1(\Omega)$. Soit $u \in H_0^1$. $u = \sum_n \alpha_n e_n$. Alors

$$\|u\|_{L^2}^2 = \sum \alpha_n^2, \quad \|\nabla u\|_{L^2}^2 = \sum \lambda_n \alpha_n^2.$$

Comme λ_n est une suite croissante, on en déduit que

$$\|\nabla u\|_{L^2}^2 \geq \lambda_1 \|u\|_{L^2}^2.$$

avec inégalité stricte si u n'est pas dans l'espace propre associé à λ_1 .

3. Par l'exercice 3 du Td n° 8, $|f| \in H_0^1$, $\nabla|f| = (\mathbb{1}_{f>0} - \mathbb{1}_{f<0})\nabla f$. En particulier, $\| |f| \|_{L^2} = 1$ et $\|\nabla|f|\|_{L^2} = \|\nabla f\|_{L^2}$. Ainsi, $|f|$ réalise également l'optimum dans l'inégalité de Poincaré, ce qui entraîne par ce qui précède que $|f| \in E_{\lambda_1}$.

4. Soit $f \in E_{\lambda_1}$, alors comme $-\Delta|f| = \lambda_1|f| \geq 0$, $|f|$ est sous harmonique (et C^∞ , par régularité elliptique). On a donc que pour tout point $x \in \partial\Omega$ pour $\varepsilon < d(x, \partial\Omega)$,

$$\frac{1}{|B(x, \varepsilon)|} \int_{B(x, \varepsilon)} |f|(y) dy \leq |f|(x).$$

(Rappel : étant donnée $g \in C^\infty$, en utilisant le fait que $\nabla|x|^2 = 2x$ et $\Delta|x|^2 = 2d$, on a (au point 0) :

$$\begin{aligned} \int_{B(0,r)} g(x) dx &= \frac{1}{2d} \int_{B(0,r)} g(x) \Delta(|x|^2 - r^2) dx = \frac{1}{n} \int_{\partial B(0,r)} g r d\sigma - \frac{1}{d} \int_{B(0,r)} \nabla g \cdot x dx \\ &= \frac{r}{d} \int_{\partial B(0,r)} g d\sigma - \frac{1}{d} \int_{\partial B(0,r)} \frac{\partial g}{\partial r} (|x|^2 - r^2) + \frac{1}{d} \int \Delta g (|x|^2 - r^2). \end{aligned}$$

Le terme du milieu vaut 0 car on est sur le bord. Si $\Delta g \leq 0$, le dernier est négatif, et

$$\int_{B(0,r)} g(x)dx - \frac{r}{d} \int_{\partial B(0,r)} g d\sigma \leq 0.$$

On note $F : r \mapsto \frac{1}{|B(0,r)|} \int_{B(0,r)} g(x)dx$. Comme $|B(0,r)| = r^n |B(0,1)|$, on a $F'(r) = \frac{1}{|B(0,r)|} \int_{\partial B(0,r)} g d\sigma - \frac{n}{r|B(0,r)|} \int_{B(0,r)} f(x)dx$, et donc $F'(r) \leq 0$. F est C^1 , et $F(0) = g(0)$, d'où l'on déduit que $F(r) \leq g(0)$. Ce calcul peut être en tout point d'un ouvert sur lequel $\Delta g \leq 0$, d'où l'inégalité mentionnée.)

Supposons que f s'annule en x , alors f s'annule sur $B(x, \varepsilon)$. Par connexité de Ω , $f = 0$.

Si $e, f \in E_{\lambda_1}$, soit $x \in \Omega$ tel que $e(x) \neq 0$. Il existe λ tel que $f(x) - \lambda e(x) = 0$. Par ce qui précède, vu que $f - \lambda e \in E_{\lambda_1}$, $f - \lambda e = 0$. Ainsi $\dim E_{\lambda_1} = 1$.

5. Par ce qui précède, $|e_1| \in E_{\lambda_1}$ donc $|e_1| = \lambda e_1$ ($|\lambda| = 1$) et donc que e_1 est de signe constant (presque partout).

Si $\Omega = B(0,1)$, pour toute rotation R , Re_1 vérifie également $-\Delta Re_1 = \lambda_1 Re_1$ donc il existe λ_R tel que $Re_1 = \lambda_R e_1$. On a bien sûr que $|\lambda_R| = 1$ donc $\lambda_R = \pm 1$ (e_1 prend des valeurs réelles). Comme (pour $d \geq 2$), SO_d est connexe et que $R \mapsto \lambda_R$ est continue, $\lambda_R = \text{cte} = 1$. Ainsi, $e_1 = Re_1$ et e_1 est à symétrie sphérique.

★

Solution 4. *Problème de Yamabe*

1. On considère une suite u_n minimisante, elle est bornée dans H^1 donc on peut en extraire une sous suite qui converge faiblement dans H^1 et fortement dans $L^2 \cap L^q$. u_n converge donc bien vers un minimiseur de I_q .

2. Si $q = 2^*$, on n'a pas convergence forte dans L^q , et rien ne nous dit à priori que $u \in \mathcal{H}_q$.

3. On peut commencer par montrer que pour tout ε , il existe C_ε tel que

$$||a + b|^q - |a|^q| \leq \varepsilon |a|^q + C_\varepsilon |b|^q.$$

On montre ensuite par convergence dominée que $||u_0|^q - |u_n|^q - |u_0 - u_n|^q - \varepsilon |u - u_n|^q| \rightarrow 0$.

4. On utilise l'injection de Sobolev, la question précédente, et le fait que $\mu \leq I(\frac{u_0}{\|u_0\|_{L^q}})$.

★