

Td n° 1 d'Analyse fonctionnelle

DUALITÉ DANS LES ESPACES DE BANACH

Séance du 15 février 2010

Solution 1. *Métrisabilité de la boule unité de E' pour la topologie faible**

1. Soit $f_0 \in B_{E'}$. et

$$V = \{f \in B_{E'}, |(f - f_0, y_i)| < \epsilon, i = 1..k\}$$

un voisinage faible* de f_0 . On va montrer que ce voisinage contient une boule

$$B_d(f_0, r) = \{f \in B_{E'}, d(f, f_0) < r\}.$$

Pour tout i , il existe n_i tel que $\|y_i - x_{n_i}\| \leq \frac{\epsilon}{4}$. Soit $r > 0$ tel que $2^{n_i} r \leq \frac{\epsilon}{2}$ pour $i = 1..k$. Montrons que $B_d(f_0, r) \subset V$. Soit $f \in B_d(f_0, r)$. Alors pour $i = 1..k$ on a

$$|(f - f_0, x_{n_i})| < 2^{n_i} r \leq \frac{\epsilon}{2},$$

donc $|(f - f_0, y_i)| < \frac{\epsilon}{2} + 2\frac{\epsilon}{4} = \epsilon$.

Pour l'autre sens, montrons que $B_d(f_0, r)$ contient un voisinage faible, de la forme $V = \{f \in B_{E'}, |(f - f_0, x_i)| < \epsilon, i = 1..k\}$. Si $f \in V$, on a

$$d(f_0, f) = \sum_{n=1}^k \frac{1}{2^n} |(f - f_0, x_n)| + \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |(f - f_0, x_n)| < \epsilon + 2 \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \epsilon + \frac{1}{2^{k-1}}.$$

Il suffit donc de choisir $\epsilon < \frac{r}{2}$ et k tel que $\frac{1}{2^{k-1}} < \frac{r}{2}$.

2. Réciproquement, supposons $B_{E'}$ métrisable. Soit $U_n = \{f \in B_{E'}, d(f, 0) < \frac{1}{n}\}$. Il existe $V_n = \{f \in B_{E'}, |(f, x)| < \epsilon_n \forall x \in \Phi_n\}$, avec Φ_n ensemble fini, tel que $V_n \subset U_n$. Alors $D = \cup_n \Phi_n$ est dénombrable. Montrons que $\text{Vect}_{\mathbb{R}} D$ est dense en montrant que toute forme linéaire qui s'annule sur D est en fait identiquement nulle : si $(f, x) = 0$, alors $f \in \cap_n V_n \subset \cap_n U_n = \{0\}$. $\text{Vect}_{\mathbb{Q}} D$ est donc une partie dénombrable dense de E .

Ce dernier point est une conséquence du théorème d'Hahn-Banach. Si $F = \text{Vect}_{\mathbb{R}} D$ n'était pas dense, on pourrait trouver $x \in E \setminus \overline{F}$, et il existerait $l \in E'$ séparant $\{x\}$ convexe compact, et \overline{F} convexe fermé. On aurait donc par exemple, $l(y) < c < l(x)$ pour tout $y \in \overline{F}$ et donc par homogénéité, $l = 0$ sur \overline{F} . Par contre on aurait $l(x) > 0$, et donc l ne serait pas identiquement nulle.

★

Solution 2. *La sphère unité n'est pas fermée pour la topologie faible*

1. Vu la forme d'un voisinage élémentaire, il suffit de montrer qu'une intersection finie hyperplans n'est pas réduite à $\{0\}$. Supposons que $\cap_{i=1}^n \text{Ker } \ell_i = \{0\}$ où ℓ_i est une famille finie de E' , et considérons $\Phi : E \rightarrow \mathbb{R}^n, x \mapsto (\ell_1(x), \dots, \ell_n(x))$. Alors Φ est injective vu la condition sur les noyaux, et donc $\dim E \leq n$, ce qui est absurde. Il existe donc $x \in \cap_{i=1}^n \text{Ker } \ell_i \setminus \{0\}$ et $x\mathbb{R} \subset \cap_{i=1}^n \text{Ker } \ell_i$, donc $x\mathbb{R}$ est contenu dans tout voisinage élémentaire ne faisant intervenir que les ℓ_i .

2. Soit $x_0 \in E$ tel que $\|x_0\| < 1$, et soit V un voisinage faible contenant x_0 . V contient donc une droite passant par x_0 , et par continuité, cette droite intersecte \mathbb{S} . x_0 est donc dans l'adhérence faible de \mathbb{S} .

3. Soit $x_0 \in E \setminus \mathbb{B}$. Comme \mathbb{B} est fermée pour la topologie forte, on peut utiliser le théorème de Hahn Banach qui nous donne une forme linéaire l séparant strictement \mathbb{B} et $\{x_0\}$: il existe alors c tel que par exemple, $x_0 \in \{l(y) > c\}$ et $\mathbb{B} \in \{l(y) < c\}$, donc x_0 n'est pas dans l'adhérence faible de \mathbb{B} .

★

Solution 3. *Non métrisabilité de la topologie faible*

1. On considère $\Phi : E \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, $\Phi(x) = (\phi_0(x), \dots, \phi_n(x))$. Alors $\Phi(E)$ est un convexe fermé (s.e.v. de \mathbb{R}^{n+1}), et par la condition sur les noyaux, $a = (1, 0, \dots, 0) \notin \Phi(E)$.

Par le théorème de Hahn-Banach, il existe donc une forme linéaire sur \mathbb{R}^{n+1} $\ell(x) = \sum_{i=0}^n \lambda_i x_i$ qui sépare strictement $\Phi(E)$ de a . Par exemple, pour tout $x \in \Phi(E)$, $\ell(x) < c$ et $\ell(a) > c$. Comme $0 \in \Phi(E)$, $c > 0$ et par homogénéité, on a que $\ell(x) = 0$ pour tout $x \in \Phi(E)$. Cela signifie que

$$\forall y \in E, \quad \sum_{i=0}^n \lambda_i \phi_i(y) = 0 \quad \text{i.e.} \quad \sum_{i=0}^n \lambda_i \phi_i = 0.$$

Mais $\ell(a) = \lambda_0 > c > 0$, et donc $\phi_0 \in \text{Vect}(\phi_1, \dots, \phi_n)$.

2. Un voisinage élémentaire (de 0) pour la topologie faible est

$$U = \{x \mid |\ell_1(x)| < \varepsilon_1, \dots, |\ell_k(x)| < \varepsilon_k\}.$$

où $\ell_1, \dots, \ell_k \in E'$ et $\varepsilon_1, \varepsilon_k > 0$ sont donnés. Si E est métrisable, il existe une base dénombrable de voisinages (élémentaires) de 0 : chacun de ces voisinages ne fait intervenir qu'un nombre fini de formes linéaires, notons F l'ensemble dénombrable des formes linéaires mises en jeu.

Soit $\ell \in E'$. Alors $\{x \mid |\ell(x)| < 1\}$ est un voisinage faible de 0, donc il existe $\ell_1, \dots, \ell_k \in F$ et $\varepsilon_1, \varepsilon_k > 0$ tels que :

$$\{x \mid |\ell_1(x)| < \varepsilon_1, \dots, |\ell_k(x)| < \varepsilon_k\} \subset \{x \mid |\ell(x)| < 1\}.$$

En particulier, si $x \in \bigcap_{i=1}^k \text{Ker } \ell_i$, alors $\lambda x \in \bigcap_{i=1}^k \text{Ker } \ell_i$ et $|\ell(\lambda x)| < 1$, et ce pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. Ainsi, $x \in \text{Ker } \ell$. Par la question précédente on en déduit que $\ell \in \text{Vect}(\ell_1, \dots, \ell_k)$.

3. La question précédente montre que E' est une base au plus dénombrable (au sens algébrique). Mais E' est complet (et de dimension infinie) : par le théorème de Baire, c'est absurde.

4. Les boules $B(0, 1/n)$ (pour la distance) sont des ouverts faibles : elles contiennent une droite $y_n \mathbb{R}$. On pose $x_n = ny_n / \|y_n\|$. Alors $\|x_n\| = n$ et $x_n \in B(0, 1/n)$ donc $x_n \rightarrow 0$.

C'est une contradiction avec le théorème de Banach-Steinhaus qui assure que toute suite faiblement convergente est bornée.

★

Solution 4. *ℓ^1 a la propriété de Schur*

1. Voir exercice précédent.

2. Soit $\phi^k \in \ell^1$ définie par $\phi_i^k = \delta_i^k$. Alors $(u^n, \phi^k) = u_k^n \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$.

3. Si u^n ne tend pas vers 0 dans ℓ^1 , alors, il existe $\epsilon > 0$ et une sous-suite $u^{\phi(n)}$ extraite telle que $\|u^{\phi(n)}\| \geq \epsilon$. On considère maintenant $v^n = \frac{u^{\phi(n)}}{\|u^{\phi(n)}\|_{\ell^1}}$. On a $\|v_n\|_{\ell^1} = 1$ et pour tout $w \in \ell^1$, $|(v^n, w)| \leq \frac{1}{\epsilon} |(u^{\phi(n)}, w)| \rightarrow 0$.

4. Comme $\sum |u_j^0| = 1$, il existe a_1 tel que $\sum_{j=0}^{a_1-1} |u_j^0| \geq \frac{3}{4}$. Supposons a_k et n_{k-1} construits. D'après la question 2, il existe $n_k > n_{k-1}$ tel que $\sum_{j=0}^{a_k-1} |u_j^{n_k}| \leq \frac{1}{8}$. Comme $\sum |u_j^{n_k}| = 1$, il existe donc $a_{k+1} > a_k$ tel que $\sum_{j=a_k}^{a_{k+1}-1} |u_j^{n_k}| \geq \frac{3}{4}$.

5. La suite v définie par $v_j = \text{sgn}(u_j^{n_k})$ pour $a_k \leq j \leq a_{k+1} - 1$ fonctionne.

★

Solution 5. *Convergence faible mais pas forte : trois exemples fondamentaux*

1. On raisonne par densité de \mathcal{D} dans L^2 . Il suffit de voir que pour tout $\psi \in \mathcal{D}$, $\int u_n \psi \rightarrow 0$, ce qui est immédiat (support disjoints si n assez grand). Comme $\|u_n\|_{L^2} = \|\phi\|_{L^2} \neq 0$ pour tout n , cette convergence ne peut pas être forte.

2. Pour v_n , il suffit de constater que $\mathcal{D}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ est dense dans L^2 . Comme $\|v_n\|_{L^2} = \|\phi\|_{L^2} \neq 0$ pour tout n , cette convergence ne peut pas être forte.

3. Enfin, pour w_n , on commence par le cas où $w(x) = e^{ikx}$, $k \neq 0$. Soit $\psi \in \mathcal{C}_{per}^1((0, 2\pi))$. Il suffit alors de faire une intégration par partie (lemme de Riemann-Lebesgue) :

$$\int e^{iknx} \psi(x) dx = -\frac{1}{ikn} \int e^{iknx} \psi'(x) dx = \mathcal{O}(1/n).$$

Dans le cas général, on écrit $w(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k e^{ikx}$. Comme $e^{iknx} \rightarrow \delta_{0,k}$ quand $n \rightarrow +\infty$, on trouve que pour tout $N \in \mathbb{N}$, $w_N^n = \sum_{|k| \leq N} a_k e^{iknx} \rightarrow a_0$ quand $n \rightarrow +\infty$. Donc pour tout $\phi \in L^2(\mathbb{R})$, comme $w_N^n \rightarrow w(n \cdot)$ quand $N \rightarrow +\infty$ dans $L^2((0, 2\pi))$, et ceci uniformément par rapport à n , on a :

$$| \langle w(n \cdot) - a_0, \phi \rangle | \leq | \langle w_N^n - a_0, \phi \rangle | + | \langle w(n \cdot) - w_N^n, \phi \rangle | \rightarrow 0$$

quand $n \rightarrow +\infty$. Conclusion : $w(n \cdot) \rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} w$ quand $n \rightarrow +\infty$ dans $L^2(0, 2\pi)$. Evidemment la suite $(w(n \cdot))_n$ ne converge pas fortement car $\|w_n\|_{L^2(0, 2\pi)} = \|w\|_{L^2} \neq \|\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} w\|_{L^2(0, 2\pi)}$ (cf cas d'égalité dans Cauchy-Schwarz).

★

Solution 6. *Série de Fourier*

1. Voir le cours.

2. En calculant, on trouve $D_N(y) = \frac{\sin(y(N + \frac{1}{2}))}{\sin(\frac{y}{2})}$. Si $(N + \frac{1}{2})y \in [\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi]$, alors $|\sin(y(N + \frac{1}{2}))| \geq \frac{1}{2}$, et donc

$$\int_0^{2\pi} |D_N(y)| dy \geq \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}} \int_{y=\frac{1}{N+\frac{1}{2}}(\frac{\pi}{6}+2\pi k)}^{\frac{1}{N+\frac{1}{2}}(\frac{5\pi}{6}+2\pi k)} \frac{1}{2} \frac{N + \frac{1}{2}}{\frac{5\pi}{6} + 2\pi k} dy \geq \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}} \frac{1}{\frac{5}{2} + 6k} \rightarrow \infty.$$

3. Soit $g_k \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ qui onverge simplement vers $\text{sgn}(D_N)$. Soit $x_0 \in [0, 2\pi]$ et $\tilde{g}_k = g_k(x_0 - \cdot)$. On a $S_N(\tilde{g}_k)(x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g_k(x_0 - t) D_N(x_0 - t) dt \rightarrow \frac{1}{2\pi} \int |D_N|$ quand $k \rightarrow \infty$. De plus pour tout $v \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ on a $|S_N(v)(x)| \leq \frac{1}{2\pi} \|D_N\|_{L^1} \|v\|_{L^\infty}$, donc on peut conclure.

★