Correction du Td n° 2 d'Analyse fonctionnelle

Dualité dans les espaces de Banach

Séance du 22 février 2013

Solution 1. *Fonction convexe conjuguée*

1. Le supremum d'une famille de fonction convexes (resp. s.c.i) est convexe (resp. s.c.i).
2. Supposons d'abord que $\phi \geq 0$. Par définition de ϕ^*, on a pour tout $(f, x) \in E' \times E$:

$$< f, x >_{E' \times E} \leq \phi(x) + \phi^*(f).$$

On en déduit immédiatement que $\phi^{**} \leq \phi$.

Supposons qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $\phi^{**}(x_0) < \phi(x_0)$. Notons A l'épigraphe de ϕ. C'est un ensemble fermé et convexe car ϕ est s.c.i convexe. On peut donc séparer $\{x_0, \phi^{**}(x_0)\}$ de A au sens strict dans $E \times \mathbb{R}$. Donc il existe $f \in E'$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{R}$ tels que

$$< f, x >_{E' \times E} + k\lambda > \alpha \ \forall (x, \lambda) \in A,$$

$$< f, x_0 >_{E' \times E} + k\phi^{**}(x_0) < \alpha.$$

En choisissant une suite $\lambda_n \to +\infty$, on obtient que $k \geq 0$ (mais attention, on peut éventuellement avoir $k = 0$, dans le cas où $D(E) \neq E$). Soit $\epsilon > 0$, alors comme $\phi \geq 0$, on a

$$< f, x >_{E' \times E} + (k + \epsilon)\phi(x) \geq \alpha \ \forall x \in E.$$

D'où $\phi^*(\frac{-f}{k+\epsilon}) \leq \frac{-\alpha}{k+\epsilon}$. D'après la définition de ϕ^{**}, il vient

$$\phi^{**}(x_0) \geq < \frac{-f}{k+\epsilon}, x_0 > -\phi^*(\frac{-f}{k+\epsilon}) \geq < \frac{-f}{k+\epsilon}, x_0 > + \frac{\alpha}{k+\epsilon}.$$

Par suite

$$< f, x_0 > + (k + \epsilon)\phi^{**}(x_0) \geq \alpha.$$

Comme c'est vrai pour tout $\epsilon > 0$, cela contredit $\phi^{**}(x_0) < \phi(x_0)$.

Si ϕ n'est plus positive, fixons $f_0 \in E'$ et posons

$$\psi(x) = \phi(x) - < f_0, x > + \phi^*(f_0).$$

Cette fonction est convexe, s.c.i et positive, donc $\psi^{**} = \psi$. Or on calcule facilement

$$\psi^*(f) = \phi^*(f + f_0) - \phi^*(f_0)$$

et

$$\psi^{**}(x) = \phi^{**}(x) - < f_0, x > + \phi^*(f_0).$$

D'où la conclusion.

⋆

Solution 2. *Métrisabilité de la boule unité de E' pour la topologie faible**

1. C'est une conséquence de l'exercice 2 du TD 1. Si x_n est un ensemble dénombrable dense de E, alors les $p_n(f) = | < f, x_n > |$ sont des semi normes, séparantes. Elles engendrent la topologie faible sur $B_{E'}$. En effet, considérons une semi-boule de la forme $\{f, | < f - f_0, y > | \leq \varepsilon\}$. Comme la famille des x_n est dense dans E, , il existe n tel que $\|x_n - y\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$, et

$$\{f, | < f - f_0, x_n > | \leq \frac{\varepsilon}{2}\} \subset \{f, | < f - f_0, y > | \leq \varepsilon\}.$$

2. Réciproquement, supposons $B_{E'}$ métrisable. Soit $U_n = \{f \in B_{E'}, d(f,0) < \frac{1}{n}\}$. Il existe $V_n = \{f \in B_{E'}, |(f,x)| < \epsilon_n \forall x \in \Phi_n\}$, avec Φ_n ensmble fini, tel que $V_n \subset U_n$. Alors $D = \cup_n \Phi_n$ est dénombrable. Montrons que $\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\, D$ est dense en montrant que toute forme linéaire qui s'annule sur D est en fait identiquement nulle : si $(f,x) = 0$, alors $f \in \cap_n V_n \subset \cap_n U_n = \{0\}$. $\mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}}\, D$ est donc une partie dénombrable dense de E.

Ce dernier point est une conséquence du théorème d'Hahn-Banach. Si $F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\, D$ n'était pas dense, on pourrait trouver $x \in E \setminus \overline{F}$, et il existerait $l \in E'$ séparant $\{x\}$ convexe compact, et $\overline{F}$ converxe fermé. On aurait donc par exemple, $l(y) < c < l(x)$ pour tout $y \in \overline{F}$ et donc par homogénéité, $l = 0$ sur $\overline{F}$. Par contre on aurait $l(x) > 0$, et donc l ne serait pas identiquement nulle.

⋆

Solution 3. *La sphère unité n'est pas fermée pour la topologie faible*

1. Vu la forme d'un voisinage élémentaire, il suffit de montrer qu'une intersection finie hyperplans n'est pas réduite à $\{0\}$. Supposons que $\cap_{i=1}^n \mathrm{Ker}\, \ell_i = \{0\}$ où ℓ_i est une famille finie de E', et considérons $\Phi : E \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto (\ell_1(x), \dots, \ell_n(x))$. Alors Φ est injective vu la condition sur les noyaux, et donc $\dim E \leq n$, ce qui est absurde. Il existe donc $x \in \cap_{i=1}^n \mathrm{Ker}\, \ell_i \setminus \{0\}$ et $x\mathbb{R} \subset \cap_{i=1}^n \mathrm{Ker}\, \ell_i$, donc $x\mathbb{R}$ est contenu dans tout voisinage élémentaire ne faisant intervenir que les ℓ_i.

2. Soit $x_0 \in E$ tel que $\|x_0\| < 1$, et soit V un voisinage faible contenant x_0. V contient donc une droite passant par x_0, et par continuité, cette droite intersecte $\mathbb{S}$. x_0 est donc dans l'adhérence faible de $\mathbb{S}$.

3. Soit $x_0 \in E \setminus \mathbb{B}$. Comme $\mathbb{B}$ est fermée pour la topologie forte, on peut utiliser le théorème de Hahn Banach qui nous donne une forme linéaire l séparant strictement $\mathbb{B}$ et $\{x_0\}$: il existe alors c tel que par exemple, $x_0 \in \{l(y) > c\}$ et $\mathbb{B} \in \{l(y) < c\}$, sonc x_0 n'est pas dans l'adhérence faible de $\mathbb{B}$.

⋆

Solution 4. *Non métrisabilité de la topologie faible*

1. On considère $\Phi : E \to \mathbb{R}^{n+1}$, $\Phi(x) = (\phi_0(x), \dots, \phi_n(x)$. Alors $\Phi(E)$ est un convexe fermé (s.e.v. de $\mathbb{R}^{n+1}$), et par la condition sur les noyaux, $a = (1, 0, \dots, 0) \notin \Phi(E)$.

Par le théorème de Hahn-Banach, il existe donc une forme linéaire sur $\mathbb{R}^{n+1}$ $\ell(x) = \sum_{i=0}^n \lambda_i x_i$ qui sépare strictement $\Phi(E)$ de a. Par exemple, pour tout $x \in \Phi(E)$, $\ell(x) < c$ et $\ell(a) > c$. Comme $0 \in \Phi(E)$, $c > 0$ et par homogénéité, on a que $\ell(x) = 0$ pour tout $x \in \Phi(E)$. Cela signifie que

$$\forall y \in E, \quad \sum_{i=0}^n \lambda_i \phi_i(y) = 0 \quad \text{i.e.} \quad \sum_{i=0}^n \lambda_i \phi_i = 0.$$

Mais $\ell(a) = \lambda_0 > c > 0$, et donc $\phi_0 \in \mathrm{Vect}(\phi_1, \dots, \phi_n)$.

2. Un voisinage élémentaire (de 0) pour la topologie faible est

$$U = \{x| \ |\ell_1(x)| < \varepsilon_1, \dots, |\ell_k(x)| < \varepsilon_k\}.$$

où $\ell_1, \dots, \ell_k \in E'$ et $\varepsilon_1, \varepsilon_k > 0$ sont donnés. Si E est métrisable, il existe une base dénombrable de voisinages (élémentaires) de 0 : chacun de ces voisinages ne fait intervenir qu'un nombre fini de formes linéaires, notons F l'ensemble dénombrable des formes linéaires mises en jeu.

Soit $\ell \in E'$. Alors $\{x| \ |\ell(x)| < 1\}$ est un voisinage faible de 0, donc il existe $\ell_1, \dots, \ell_k \in F$ et $\varepsilon_1, \varepsilon_k > 0$ tels que :

$$\{x| \ |\ell_1(x)| < \varepsilon_1, \dots, |\ell_k(x)| < \varepsilon_k\} \subset \{x| \ |\ell(x)| < 1\}.$$

En particulier, si $x \in \cap_{i=1}^k \operatorname{Ker} \ell_i$, alors $\lambda x \in \cap_{i=1}^k \operatorname{Ker} \ell_i$ et $|\ell(\lambda x)| < 1$, et ce pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. Ainsi, $x \in \operatorname{Ker} \ell$. Par la question précédente on en déduit que $\ell \in \operatorname{Vect}(\ell_1, \dots, \ell_k)$.

3. La question précédente montre que E' est une base au plus dénombrable (au sens algébrique). Mais E' est complet (et de dimension infinie) : par le théorème de Baire, c'est absurde.

4. Les boules $B(0, 1/n)$ (pour la distance) sont des ouverts faibles : elles contiennent une droite $y_n\mathbb{R}$. On pose $x_n = ny_n/\|y_n\|$. Alors $\|x_n\| = n$ et $x_n \in B(0, 1/n)$ donc $x_n \rightharpoonup 0$.

C'est une contradiction avec le théorème de Banach-Steinhaus qui assure que toute suite faiblement convergente est bornée.

⋆

Solution 5. *ℓ^1 a la propriété de Schur*

1. Voir exercice précédent.

2. Soit $\phi^k \in \ell^1$ définie par $\phi_i^k = \delta_i^k$. Alors $(u^n, \phi^k) = u_k^n \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow \infty$.

3. Si u^n ne tend pas vers 0 dans ℓ^1, alors, il existe $\epsilon > 0$ et une sous-suite $u^{\phi(n)}$ extraite telle que $\|u^{\phi(n)}\| \geq \epsilon$. On considère maintenant $v^n = \frac{u^{\phi(n)}}{\|u^{\phi(n)}\|_{\ell^1}}$. On a $\|v_n\|_{\ell^1} = 1$ et pour tout $w \in \ell^1$, $|(v^n, w)| \leq \frac{1}{\epsilon}|(u^{\phi(n)}, w)| \longrightarrow 0$.

4. Comme $\sum |u_j^0| = 1$, il existe a_1 tel que $\sum_{j=0}^{a_1-1} |u_j^0| \geq \frac{3}{4}$. Supposons a_k et n_{k-1} construits. D'après la question 2, il existe $n_k > n_{k-1}$ tel que $\sum_{j=0}^{a_k-1} |u_j^{n_k}| \leq \frac{1}{8}$. Comme $\sum |u_j^{n_k}| = 1$, il existe donc $a_{k+1} > a_k$ tel que $\sum_{j=a_k}^{a_{k+1}-1} |u_j^{n_k}| \geq \frac{3}{4}$.

5. La suite v définie par $v_j = sgn(u_j^{n_k})$ pour $a_k \leq j \leq a_{k+1} - 1$ fonctionne.

⋆

Solution 6. *Convergence failble mais pas forte : trois exemples fondamentaux*

1. On raisonne par densité de $\mathcal{D}$ dans L^2. Il suffit de voir que pour tout $\psi \in D$, $\int u_n \psi \to 0$, ce qui est immédiat (support disjoints si n assez grand). Comme $\|u_n\|_{L^2} = \|\phi\|_{L^2} \neq 0$ pour tout n, cette convergence ne peut pas être forte.

2. Pour v_n, il suffit de constater que $\mathcal{D}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ est dense dans L^2. Comme $\|v_n\|_{L^2} = \|\phi\|_{L^2} \neq 0$ pour tout n, cette convergence ne peut pas être forte.

3. Enfin, pour w_n, on commence par le cas où $w(x) = e^{ikx}$, $k \neq 0$. Soit $\psi \in \mathcal{C}_{per}^1((0, 2\pi))$. Il suffit alors de faire une intégration par partie (lemme de Riemann-Lebesgue) :

$$\int e^{iknx} \psi(x) dx = -\frac{1}{ikn} \int e^{iknx} \psi'(x) dx = \mathcal{O}(1/n).$$

Dans le cas général, on écrit $w(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k e^{ikx}$. Comme $e^{iknx} \rightharpoonup \delta_{0,k}$ quand $n \to +\infty$, on trouve que pour tout $N \in \mathbb{N}$, $w_N^n = \sum_{|k|\leq N} a_k e^{iknx} \rightharpoonup a_0$ quand $n \to +\infty$. Donc pour tout $\phi \in L^2(\mathbb{R})$, comme $w_N^n \to w(n\cdot)$ quand $N \to +\infty$ dans $L^2((0,2\pi))$, et ceci uniformément par rapport à n, on a :

$$| < w(n\cdot) - a_0, \phi > | \leq | < w_N^n - a_0, \phi > | + | < w(n\cdot) - w_N^n, \phi > | \to 0$$

quand $n \to +\infty$. Conclusion : $w(n\cdot) \rightharpoonup \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} w$ quand $n \to +\infty$ dans $L^2(0,2\pi)$. Évidemment la suite $(w(n\cdot))_n$ ne converge pas fortement car $\|w_n\|_{L^2(0,2\pi)} = \|w\|_{L^2} \neq \|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} w\|_{L^2((0,2\pi))}$ (cf cas d'égalité dans Cauchy-Schwarz).

$\star$