Correction Td n° 2 d'Analyse fonctionnelle

Distributions 1

Séance du 27 février 2010

Solution 1. *Convergence faible mais pas forte : trois exemples fondamentaux*

1. On raisonne par densité de $\mathcal{D}$ dans L^2. Il suffit de voir que pour tout $\psi \in D$, $\int u_n\psi \to 0$, ce qui est immédiat (support disjoints si n assez grand). Comme $\|u_n\|_{L^2} = \|\phi\|_{L^2} \neq 0$ pour tout n, cette convergence ne peut pas être forte.

2. Pour v_n, il suffit de constater que $\mathcal{D}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ est dense dans L^2. Comme $\|v_n\|_{L^2} = \|\phi\|_{L^2} \neq 0$ pour tout n, cette convergence ne peut pas être forte.

3. Enfin, pour w_n, on commence par le cas où $w(x) = e^{ikx}$, $k \neq 0$. Soit $\psi \in \mathcal{C}^1_{per}((0, 2\pi))$. Il suffit alors de faire une intégration par partie (lemme de Riemann-Lebesgue) :

$$\int e^{iknx}\psi(x)dx = -\frac{1}{ikn}\int e^{iknx}\psi'(x)dx = \mathcal{O}(1/n).$$

Dans le cas général, on écrit $w(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k e^{ikx}$. Comme $e^{iknx} \rightharpoonup \delta_{0,k}$ quand $n \to +\infty$, on trouve que pour tout $N \in \mathbb{N}$, $w^n_N = \sum_{|k|\leq N} a_k e^{iknx} \rightharpoonup a_0$ quand $n \to +\infty$. Donc pour tout $\phi \in L^2(\mathbb{R})$, comme $w^n_N \to w(n\cdot)$ quand $N \to +\infty$ dans $L^2((0, 2\pi))$, et ceci uniformément par rapport à n, on a :

$$| < w(n\cdot) - a_0, \phi > | \leq | < w^n_N - a_0, \phi > | + | < w(n\cdot) - w^n_N, \phi > | \to 0$$

quand $n \to +\infty$. Conclusion : $w(n\cdot) \rightharpoonup \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} w$ quand $n \to +\infty$ dans $L^2(0, 2\pi)$. Evidemment la suite $(w(n\cdot))_n$ ne converge pas fortement car $\|w_n\|_{L^2(0,2\pi)} = \|w\|_{L^2} \neq \|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} w\|_{L^2((0,2\pi))}$ (cf cas d'égalité dans Cauchy-Schwarz).

⋆

Solution 2. *Partition de l'unité et fonction plateau*

1. Considérons $f(x) = e^{-\frac{1}{1-x^2}}$ pour $|x| < 1$ et $f(x) = 0$ si $|x| \geq 1$. On vérifie par récurrence que pour $|x| < 1$

$$\frac{d^n}{dx^n} f(x) = \frac{P_n(x)}{(1 - x^2)^{2n}} e^{-\frac{1}{1-x^2}},$$

où P_n est polynôme. En particulier, $\frac{d^n}{dx^n} f$ tend vers 0 quand $x \to \pm 1$, et par prolongement de la dérivée, f est une fonction C^{n-1} pour tout n, donc C^∞, à support dans $[-1, 1]$. On pose $h(x) = C\int_{-\infty}^x f(x)dx$, où la constante C est ajustée pour que $h(x) = 1$ si $x \geq 1$. h est positive, croissante et pour $x \leq -1$, $h(x) = 0$. La fonction $g(x) = h(3 + 2x)h(3 - 2x)$ répond à la question.

2. Soit x_n une suite dense de Ω. Si c'est possible, on choisit ε_n tel que $B(x_n, 2\varepsilon_n) \subset V_i$ pour un certain i, et $B(x_n, 3\varepsilon_n)$ n'est inclus dans aucun V_i : sinon, on choisit $\varepsilon_n = 1$, et $B(x_n, 3) \subset V_i$. Montrons que pour tout $x \in \Omega$, il existe n tel que $x \in B(x_n, \varepsilon_n)$. Soit i tel que $x \in V_i$, il existe $\varepsilon \in]0, 1[$ tel que $B(x, \varepsilon) \subset V_i$. Soit x_n tel que $d(x, x_n) < \varepsilon/4 < 1$. Si

$\varepsilon_n = 1$, $x \in B(x_n, \varepsilon_n)$. Sinon $B(x_n, 3\varepsilon/4) \subset B(x, \varepsilon) \subset V_i$, donc $3\varepsilon_n \geq 3\varepsilon/4$. Ainsi, $\varepsilon_n \geq \frac{\varepsilon}{4}$ et $x \in B(x_n, \varepsilon_n)$. Dans tous les cas $x \in B(x_n, \varepsilon_n)$.

On pose $\psi_n(x) = g(|x - x_n|/\varepsilon_n)$: alors ψ_n est à support dans $B(x_n, 2\varepsilon_n) \subset V_i$ et $\psi_n|_{B(x_n,\varepsilon_n)} = 1$. On définit maintenant $\varphi_1 = \psi_1$ et :

$$\varphi_n = (1 - \psi_1) \cdots (1 - \psi_{n-1})\psi_n.$$

On vérifie immédiatement par récurrence que pour tout n :

$$\varphi_1 + \cdots + \varphi_n = 1 - (1 - \psi_1) \cdots (1 - \psi_n).$$

Si $x \in \Omega$, $x \in B(x_n, \varepsilon_n)$ pour un certain n et donc $\varphi_m(x) = 0$ pour $m > n$ et :

$$\sum_m \varphi_m(x) = \sum_{m=1}^{n} \varphi_m(x) = 1.$$

D'autre part, φ_n est à support dans $B(x_n, 2\varepsilon_n)$, donc dans l'un des V_i. Enfin, si K est un compact de Ω, il existe m tel que $K \subset \bigcup_{n=1}^{m} B(x_n, \varepsilon_n)$ d'où le résultat.

3. K étant compact, il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, $V_\varepsilon = \{x | d(x, K) < \varepsilon\}$ soit un voisinage ouvert de K, d'adhérence compacte, et inclus dans Ω. On considère le recouvrement de Ω par les ouverts $V_{2\varepsilon_0/3}$ et $\Omega \backslash \overline{V_{\varepsilon_0/3}}$. Par la question précédente, on dispose d'un partition de l'unité φ_n. On pose :

$$\varphi(x) = \sum_{n : \operatorname{Supp} \varphi_n \subset V_{2\varepsilon_0/3}} \varphi_n(x).$$

Alors la somme étant localement finie, φ est C^∞ à support dans $V_{2\varepsilon_0/3}$, donc compact et prend ses valeurs dans $[0, 1]$. Enfin, pour $x \in V_{\varepsilon_0/3}$,

$$\varphi(x) = 1 - \sum_{n : \operatorname{Supp} \varphi_n \subset \Omega \backslash \overline{V_{\varepsilon_0/3}}} \varphi_n(x) = 1.$$

Ainsi φ répond à la question.

⋆

Solution 3. *Support d'une distribution*

1. Soit O_i des ouverts sur lesquels u est nulle, et $\phi \in \mathcal{D}(\bigcup_i O_i)$. Soit $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une partition de l'unité adaptée à $(O, (O_i)_{i \in I}$.

Soit $\phi \in \mathcal{D}(O)$, $\operatorname{Supp}(\phi)$ est un compact, donc par construction des $(\psi_n)_n$, il existe un nombre m fini de (ψ_n) tel que $\sum_{n=1}^{m} \psi_n|_{\operatorname{Supp}(\phi)} = 1$. En particulier, cela signifie que

$$\phi = \sum_{n=1}^{m} \psi_n \phi.$$

Mais $\psi_n \phi \in \mathcal{D}(O_i)$ pour un certain i, donc $(u, \psi_n \phi) = 0$ pour tout n. En sommant les m premiers termes, on voit que $(u, \phi) = 0$. Ainsi, u est nulle sur $\bigcup O_i$.

L'union des ouverts sur lesquels u est nul est donc un ouvert sur lesquel u est nul : le support de u est son complémentaire.

2. Soit $\psi \in C^0(\Omega)$, $\operatorname{Supp} \psi = \overline{\{x | \psi(x) \neq 0\}}$. Considérons donc O, l'intérieur de $\{x | \psi(x) = 0\}$. Si $x_0 \in O$, il existe un voisinage $B(x_0, \varepsilon)$ sur lequel ψ est nulle, et donc pour tout

$\phi \in \mathcal{D}(B(x_0,\varepsilon))$, $(\psi,\phi) = \int \psi\phi = 0$ et donc ψ s'annule sur $B(x_0,\varepsilon)$ au sens des distributions.

Réciproquement, si ψ s'annule sur un ouvert O au sens des distributions, soit $x_0 \in O$ et $B(x_0,\varepsilon) \subset O$. Soit ϕ_k une approximation de l'unité $\phi \in \mathcal{D}(B(0,1))$ d'intégrale 1 et $\phi_k(x) = k^{-n}\phi(k(x-x_0)$: alors ϕ_k est d'intégrale 1 et est support dans $B(x_0,1/k)$. Pour k assez grand, $\phi_k \in \mathcal{D}(B(x_0,\varepsilon)) \subset \mathcal{D}(O)$ et on voit que

$$\int \phi_k\psi \to \psi(x_0).$$

Comme $(\phi_k,\psi) = 0$, on en déduit que $\psi(x_0) = 0$, et comme cela est vrai pour tout $x \in O$, $x_0 \notin \mathrm{Supp}(\psi)$.

Support de δ_0 : si $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^*)$, alors $\delta_0(\phi) = 0$. Ainsi $\mathrm{Supp}(\delta_0) \subset \{0\}$. Mais comme $\delta_0 \neq 0$, $\mathrm{Supp}(\delta_0) = \{0\}$.

3. Soit u une distribution à support compact K. il existe $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ telle que $\psi = \mathbb{1}$ sur un voisinage V (compact) de K. Alors pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\mathrm{Supp}(\phi(1-\psi)) \subset \overline{V^c} \subset K^c$, donc $(u,\phi(1-\psi)) = 0$ et $(u,\phi) = (u,\phi\psi)$.

Maintenant, $\mathrm{Supp}(\phi\psi) \subset V$ compact fixe, donc il existe des constantes $C(V) > 0$ et $m(V) \in \mathbb{N}$ telle que :

$$|(u,\phi\psi)| \leq C(V)\|(\phi\psi)\|_{m(V)} \leq C(\psi,V)\|\phi\|_{m(V)}.$$

(par la formule de Leibniz), V et ψ sont fixes, donc $C(\psi,V) = C'$, $m(V) = m$, et finalement u est d'ordre m : $|(u,\phi)| \leq C'\|\phi\|_m$).

⋆

Solution 4. *Quelques exemples de distributions*

1. La formule définit bien une distribution (d'ordre au plus k sur le compact $[-k,k]$). Supposons l'ordre fini, disons k. On considère $\phi(x) = \psi(x)e^{2x}$, avec $\psi \in \mathcal{D}(]-1/2,1/2[)$, et $\psi = 1$ au voisinage de 0. On a alors que $\phi^{(n)}(0) = 2^n$. On pose $\phi_n(x) = \phi(x-n)$: $(u,\phi_n) = 2^n$ mais $\|\phi_n\|_m = \|\phi\|_m = C(m)$. On a donc pas d'inégalité du type $|(u,\phi_n)| \leq C\|\phi_n\|_m$ uniforme en n.

2. On calcule :

$$(\partial_x u + \partial_y u, \phi) = -\int(\phi_x(t,t) + \phi_y(t,t))dt = -\int \frac{d}{dt}(\phi(t,t))dt = 0.$$

3. $e^{1/x^2} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*)$ car étant donné un compact K de R_+^*, $e^{1/x^2} \in C^0(K)$. Par contre, considérons $\phi \in \mathcal{D}(]1,2[)$ positive, d'intégrale 1, et la suite $\phi_k(x) = 2^{-k}\phi(kx)$. Alors on calcule et $\phi_k \to 0$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$: en effet, $\phi_k \in \mathcal{D}([0,2])$ et pour tout m,

$$\|\partial_x^m\phi_k\|_{C^0} = 2^{-k}k^m\|\partial_x^m\phi\|_{C^0} \to 0 \text{ quand } k \to \infty.$$

Mais :

$$\int e^{1/x^2}\phi_k(x)dx \geq e^{k^2/4}2^{-k}\frac{1}{k} \to \infty.$$

4. Soit K un compact de Ω, il s'agit de montrer qu'il existe C_K tel que pour tout $\phi \in C_c^\infty(K)$, $|(u,\phi)| \leq C_K\|\phi\|_{C^0(K)}$.

Considérons une fonction plateau ψ_K, positive : $\psi_K \in \mathcal{D}(\Omega)$ et vaut 1 au voisinage de K (par exemple, si $3\varepsilon = d(K,\partial\Omega)$, $K + B(0,\varepsilon)$ est un voisinage de K et en notant $\psi_\varepsilon \in \mathcal{D}(B(0,\varepsilon))$, $\psi_K = \psi_\varepsilon * \mathbb{1}_{K+B(0,2\varepsilon)}$ est une fonction de $\mathcal{D}(\Omega)$, valant 1 sur $K + B(0,\varepsilon)$).

Alors $\phi + \|\phi\|_{C^0(K)}\psi_K \geq 0$ et $\|\phi\|_{C^0(K)}\psi_K - \phi \geq 0$ donc :

$$(u,\phi) \geq -\|\phi\|_{C^0(K)}(u,\psi_K), \quad \text{et} \quad (u,\phi) \leq \|\phi\|_{C^0(K)}(u,\psi_K),$$

soit :

$$|(u,\phi)| \leq (u,\psi_K)\|\phi\|_{C^0(K)}.$$

C'est le résultat avec $C_K = (u,\psi_K)$.

5. On cherche v tel que pour tout $\phi \in \mathcal{D}$, $(v,\phi') = -(u,\phi)$. Il faut remarquer que les fonctions de $\mathcal{D}$ d'intégrale nulle sont exactement les dérivées de fonctions de $\mathcal{D}$. Ainsi, si ψ est d'intégrale nulle, $\psi = \phi'$ ($\phi \in \mathcal{D}$ est uniquement déterminée : $\phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \psi(t)dt$) et $S(\psi) = -T(\phi)$.

Maintenant, soit $\chi \in \mathcal{D}$, d'intégrale 1. On choisit comme on veut (v,χ) : ensuite, si $\psi \in \mathcal{D}$, $\phi - (\int \psi)\chi$ est d'intégrale nulle, donc c'est un certain ϕ', et :

$$(v,\psi) = -(u,\phi) + \left(\int \psi\right)(v,\chi).$$

On obtient ainsi un espace de dimension 1 de primitives de T.

Réciproquement, si S est une primitive de T, S est déterminé sur l'hyperplan des fonction de $\mathcal{D}$ d'intégrale nulle, et sa valeur en χ la définie complétement, donc l'espace des primitives est de dimension 1.

$\star$

Solution 5. *Distribution dont le support est un point*

1. Par construction, $\mathrm{Supp}(1-\psi_r) \subset \mathbb{R}^n \setminus B(0,r/2)$. Soit alors $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, on a encore $\mathrm{Supp}(1-\psi_r)\phi \subset \mathbb{R}^n \setminus B(0,r/2)$ et donc par définition,

$$(u,(1-\psi_r)\phi) = 0 = (u,\phi) - (\psi_r u,\phi).$$

D'où le résultat.

2. Soit $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage K tel que si $|\alpha| = m$:

$$\forall x \in K, \quad |(D^\alpha\phi)(x)| \leq \varepsilon.$$

Montrons par récurrence décroissante sur $|\alpha|$ que :

$$\forall \alpha, |\alpha| \leq m, \ \forall x \in K, \quad |(D^\alpha\phi)(x)| \leq \varepsilon n^{m-|\alpha|}|x|^{m-|\alpha|}.$$

Pour $|\alpha| = m$, c'est ce qui précède. On suppose que c'est démontré pour $|\alpha| = k+1$. Soit β de longueur k. Alors :

$$\nabla(D^\beta\phi) = (\partial_{x_1}D^\beta\phi, \ldots, \partial_{x_n}D^\beta\phi).$$

Donc par hypothèse de récurrence :

$$|\nabla(D^\beta\phi)|(x) \leq n \cdot (\varepsilon n^{m-|\alpha|}|x|^{N-|\alpha|}) \leq \varepsilon n^{m-|\beta|}|x|^{m-|\alpha|}.$$

On applique alors le théorème des accroissement finis, avec $D^\beta(\phi)(0) = 0$, ce qui achève la récurrence.

On calcule maintenant par la formule de Leibniz :

$$D^\alpha(\psi_r\phi)(x) = \sum_{\beta \leq \alpha} c_{\alpha\beta}(D^{\alpha-\beta}\psi)\left(\frac{x}{r}\right)(D^\beta\phi)(x)r^{|\beta|-|\alpha|}.$$

Soit r assez petit de sorte que $B(0,r) \subset K$. Alors $\mathrm{Supp}(\psi_r\phi) \subset B(0,r) \subset K$.

Or pour $x \in B(0,r) \subset K$, et $|\alpha| \leq m$,

$$|D^\alpha(\psi_r\phi)(x)| \leq C(n,m)\varepsilon\|\psi\|_{|\alpha|}\|\phi\|_{|\alpha|}r^{m-|\alpha|}.$$

Cette majoration est donc valable pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. Finalement, en sommant pour tous les multi-indices de longueur inférieure à m, on obtient :

$$\|\psi_r\phi\|_m \leq C(n,m)\varepsilon\|\psi\|_m\|\phi\|_m.$$

(Pourvu que $r \leq 1$). D'où le résultat.

3. Comme u est d'ordre m, il existe C tel que $|(u,\phi)| \leq C\|\phi\|_m$. Maintenant :

$$|(u,\phi)| = |(u,\psi_r\phi)| \leq C\|\psi_r\phi\|_m \to 0 \text{ quand } r \to 0.$$

Donc $(u,\phi) = 0$.

4. On a montré que $\cap_{k=0}^m \mathrm{Ker}\,\delta_0^{(k)} \subset \mathrm{Ker}\,u$. Par le lemme des noyaux, on en déduit que $u \in \mathrm{Vect}(\delta_0^{(k)}, k \in [\![0,m]\!])$, ce qui est le résultat demandé.

$\star$

Solution 6. *Valeur principale de* $\frac{1}{x}$

1. Par la formule de Taylor, $\phi(x) = \phi(0) + x\psi(x)$ avec $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ et $\|\psi\|_{L^\infty} \leq \|\phi'\|_{L^\infty}$ (car $\psi(x) = \phi'(\theta(x))$ où $\theta(x) \in]0,x[$).

Ainsi,

$$\int_\varepsilon^1 \frac{\phi(x)}{x}dx = \phi(0)\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x} + \int_\varepsilon^1 \psi(x)dx = -\phi(0)\ln\varepsilon + \int_\varepsilon^1 \psi(x)dx.$$

Un calcul similaire pour $\int_{-\infty}^{-\varepsilon}$ montre que le terme en ε disparait : la limite existe et vaut

$$\int_{|x|\geq 1} \frac{\phi(x)}{x}dx + \int_{|x|\leq 1} \psi(x)dx.$$

Cette distribution n'est pas d'ordre 0, sinon elle apparaitrait comme une mesure ; soit χ une fonction plateau au voisinage de 0, et la suite $\phi_n = \arctan(nx)\chi(x)$ est une suite de fonctions continues à support compact telles que $\phi_n(0) = 0$ et $\|\phi_n\|_{C^0} \leq C$, mais les $(\mathrm{vp}\,x, \phi_n)$ divergent :

$$(\mathrm{vp}\,x, \phi_n) = 2\int_0^\infty \frac{\arctan(nx)}{x}\chi(x)dx = \int_0^\infty \frac{\arctan(x)}{x}\chi(x/n)dx \to \infty.$$

Par contre, l'expression de ψ assure que c'est une distribution d'ordre au plus 1.

2. On a

$$\begin{aligned}(x\,\mathrm{vp}\,x, \phi) &= (\mathrm{vp}\,x, x\phi)\\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\phi(x)dx + \int_\varepsilon^\infty \phi(x)dx\right) = \int \phi = (\mathbb{1}, \phi).\end{aligned}$$

On a donc $xu - x\,\mathrm{vp}\,x = 0$, et en particulier, $\mathrm{Supp}\,(u - \mathrm{vp}\,x) \subset \{0\}$. On en déduit qu'il existe $c_0, \ldots, c_n$ tels que

$$u - \mathrm{vp}\,x = \sum_{i=0}^d c_i\delta_0^{(i)}.$$

On a donc également $\sum_{i=0}^{d} x\delta_0^{(i)} = 0$. Or $x\delta = 0$ et pour $i \geq 1$:

$$(x\delta_0^{(i)}, \phi) = (\delta_0^{(i)}, x\phi) = (-1)^i (x\phi)^{(i)}(0) = i(-1)^i \phi^{(i-1)}(0).$$

Comme la famille $(\delta_0, \delta_0', \ldots)$ est libre, cela entraine que $c_i = 0$ pour $i \geq 1$. Ainsi

$$u - \operatorname{vp} x = c_0 \delta_0.$$

3. Remarquons que pour $\alpha > 1$, on a

$$(x|x|^{\alpha-1}, \phi) = \int_{|x|\geq 1} |x|^{\alpha+1} \frac{\phi(x)}{x} dx + \int_{-1}^{1} |x|^{\alpha+1} \frac{\phi(x) - \phi(0)}{x} dx + \phi(0) \underbrace{\int_{-1}^{1} x|x|^{\alpha-1} dx}_{0}.$$

Par convergence dominée sur chacun des deux termes, on voit que $(x|x|^{\alpha-1}, \phi) \to (\operatorname{vp} x, \phi)$ quand $\alpha \to -1$ ($\alpha > -1$), ce que l'on voulait démontrer.

⋆