

Correction du Td n° 3 d'Analyse fonctionnelle

ESPACES L^1 ET L^∞

Séance du 1 mars 2013

Solution 1. *Théorème de représentation sur $(L^1)'$*

1. L'application $f \mapsto \langle \Phi, wf \rangle$ est une forme linéaire continue sur L^2 . Il existe donc $v \in L^2$ tel que $\langle \Phi, wf \rangle = \int vf$ pour tout $f \in L^2$. On va poser $u = \frac{v}{w}$. On remarque que Φ et $f \mapsto \int uf$ coïncident sur les fonctions L^2 à support compact.

2. Montrons que u est dans L^∞ avec $\|u\|_{L^\infty} \leq \|\Phi\|_{(L^1)'}$. Soit $C > \|\Phi\|_{(L^1)'}$. Notons $A = \{x \in \Omega, |u(x)| > C\}$. Montrons que A est négligeable. Pour cela on va montrer que $A \cap K$ est négligeable pour tout compact K . Comme $\text{sgn}(u)\mathbb{1}_{A \cap K}$ est à support compact on a

$$\langle \Phi, \text{sgn}(u)\mathbb{1}_{A \cap K} \rangle = \int u \text{sgn}(u)\mathbb{1}_{A \cap K} \geq \text{mes}(A \cap K)C,$$

et de plus

$$\langle \Phi, \text{sgn}(u)\mathbb{1}_{A \cap K} \rangle \leq \|\Phi\|_{(L^1)'} \|\text{sgn}(u)\mathbb{1}_{A \cap K}\|_{L^1} = \|\Phi\|_{(L^1)'} \text{mes}(A \cap K),$$

donc $\text{mes}(A \cap K) = 0$.

Comme $u \in L^\infty$, $f \mapsto \int uf$ est une forme linéaire sur L^1 , de norme inférieure ou égale à $\|u\|_{L^\infty}$. Φ et $f \mapsto \int uf$ sont donc des formes linéaires continues sur L^1 qui coïncident sur un sous espace dense, donc elles sont égales.

3. Soit $f : x_0 \in \Omega$. Considérons l'application $u \mapsto u(x_0)$ qui est définie sur $\mathcal{C}_c(\Omega)$, les fonctions continues à support compact. On a $u(x_0) \leq \|u\|_{L^\infty}$ donc d'après le théorème de Hahn Banach, on peut prolonger f en une forme linéaire continue sur L^∞ . Supposons qu'il existe $g \in L^1$ telle que $\langle f, u \rangle = \int gu$ pour tout $u \in L^\infty$. Alors pour toute fonction continue à support compact dans $\Omega \setminus \{x_0\}$ on a $\int gu = 0$, donc $u = 0$ presque partout sur $\Omega \setminus \{x_0\}$ donc sur Ω .

★

Solution 2. *Application du théorème de Krein Milman*

1. Soit $f \in L^1([0, 1])$ un possible point extrémal de la boule unité. On sait que $\|f\|_{L^1} = 1$ (pourquoi?). Soit $\theta \in [0, 1]$ tel que $\int_0^\theta |f| = \frac{1}{2}$. On pose $g(t) = f(t)$ si $t \in [0, \theta]$, 0 sinon et $h = f - g$. Alors $\|2g\|_{L^1} = 1$ et $\|2h\|_{L^1} = \|2f\|_{L^1} - \|2g\|_{L^1} = 1$. Comme $f = \frac{1}{2}(2g + 2h)$ et f est un point extrémal, on a $f = 2g$ ou $f = 2h$, c'est-à-dire $\theta = 0$ ou 1, ce qui est impossible. D'où la contradiction.

Si $L^1([0, 1])$ était l'espace dual d'un e.v.n, alors d'après le théorème de Banach-Alaoglu-Bourbaki et le théorème de Krein-Milman, alors la boule unité serait enveloppe convexe de ses points extrémaux, ce qui est impossible par 1.

★

Solution 3. *L^∞ n'est pas séparable*

1. Supposons E séparable. Soit $\{x_n\}$ dénombrable dense. Pour tout i , on choisit n_i tel que $x_{n_i} \in O_i$. L'application $i \in I \mapsto n_i$ est injective car $O_i \cap O_j = \emptyset$ pour $i \neq j$. I est donc dénombrable : absurde.

2. Pour tout $a \in \Omega$, on fixe $r_a < \text{dist}(a, {}^c\Omega)$. On considère la famille $O_a = \{f \in L^\infty, \|f - \mathbb{1}_{B(a, r_a)}\|_{L^\infty} < \frac{1}{3}\}$. Les O_a vérifient bien les hypothèses de la question précédente.

★

Solution 4. *Uniforme intégrabilité*

1. Si \mathcal{F} est uniformément intégrable, soit $\epsilon > 0$ et $\delta > 0$ associé. Notons $C = \sup_{f \in \mathcal{F}} \|f\|_1$. Soit $f \in \mathcal{F}$ Notons pour tout $a > 0$:

$$A_a = \{x, |f|(x) \geq a\}.$$

On a $a \text{mes}(A_a) \leq \int_\Omega |f| \leq C$ pour tout $a > 0$ donc pour $a \geq \frac{C}{\delta}$ on a $\text{mes}(A_a) \leq \delta$, ce qui implique que

$$\int_{A_a} |f| \leq \epsilon.$$

Comme ceci est valable pour tout f , (1) est vérifiée.

Si (1) est vérifiée, on a pour tout $a > 0$, $f \in \mathcal{F}$ et A mesurable,

$$\int_A |f| \leq a \text{mes}(A) + \int_{\{|f| \geq a\} \cap A} |f|.$$

Soit $\epsilon > 0$ et $a > 0$ tel que $\sup_{f \in \mathcal{F}} \int_{\{|f| \geq a\}} |f| \leq \epsilon/2$ et $\delta = \epsilon/(2a)$. On a alors si $\text{mes}(A) \leq \delta$,

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} \int_A |f| \leq a \text{mes}(A) + \sup_{f \in \mathcal{F}} \int_{\{|f| \geq a\} \cap A} |f| \leq \epsilon.$$

2. Si une telle fonction g existe, soit $\epsilon > 0$ et a_0 telle que $|a|/g(|a|) \leq \epsilon$ si $|a| \geq a_0$. Alors pour tout $a > a_0$:

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} \int_{\{|f| \geq a\}} |f| \leq \epsilon \sup_{f \in \mathcal{F}} \int_\Omega g(|f|).$$

On peut donc conclure par la caractérisation du 1..

Réciproquement, supposons que \mathcal{F} est uniformément intégrable. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit a_n tel que

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} \int_{\{|f| \geq a_n\}} |f| \leq \frac{1}{2^n}.$$

On peut supposer que $(a_n)_n$ est croissante. Posons

$$g(x) = \sum_n \mathbb{1}_{\{x \geq a_n\}} |x|.$$

Alors $g(|x|)/|x| = \text{card}\{n, a_n \leq |x|\} \rightarrow +\infty$ quand $|x| \rightarrow +\infty$. Enfin,

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} \int_\Omega g(|f(x)|) dx < +\infty$$

est clair.

★

Solution 5. *Théorème de Dunford-Pettis*

1. $\sup_n \int |f_n - f_n^k| = \sup_n \int_{\{f_n \geq k\}} |f_n| \longrightarrow 0$ quand $k \longrightarrow \infty$.

2. Pour k fixé, la suite $(f_n^k)_n$ est bornée par k . On peut appliquer le théorème de Banach-Alaoglu sur la boule unité de L^∞ : on peut extraire une sous-suite de $f_{\phi_k(n)}^k$ qui converge pour la topologie faible étoile $\sigma^*(L^\infty, L^1)$ (vers $f^k \in L^\infty$. Comme Ω est borné, on a $L^\infty(\Omega) \subset L^1(\Omega)$ donc $f_{\phi_k(n)}^k$ converge en fait pour la topologie faible $\sigma(L^1, L^\infty)$ et $f^k \in L^1$. Il faut faire attention à extraire les sous suites les unes des autres pour avoir pour tout $k \leq l$ $f_{\phi_l(n)}^k$ converge.

3. f^k est une suite croissante (pour tout $g > 0$ continue à support compact on a $\int (f_{\phi_{k+1}(n)}^{k+1} - f_{\phi_{k+1}(n)}^k)g > 0$ donc en passant à la limite quand $n \longrightarrow \infty$ on obtient le résultat souhaité). De plus $\|f^k\|_{L^1} \leq \sup_n \|f_n\|_{L^1} < +\infty$, donc on peut appliquer le théorème de convergence monotone qui dit que f^k converge dans L^1 vers f .

4. Soit $g \in L^\infty$. Soit $\epsilon > 0$. On décompose

$$|\int (f_{\phi_n(n)} - f)g| = |\int (f_{\phi_n(n)} - f_{\phi_n(n)}^k)g + \int (f_{\phi_n(n)}^k - f^k)g + \int (f^k - f)g|.$$

Soit k tel que $\|g\|_{L^\infty}(\sup_n \int |f_n - f_n^k|_{L^1} + \|f^k - f\|_{L^1}) \leq \frac{\epsilon}{2}$. On choisit alors n tel que $|\int (f_{\phi_n(n)}^k - f^k)g| \leq \frac{\epsilon}{2}$.

5. L'ensemble \mathfrak{X} est fermé L^1 fort, car si une suite u_n de points de \mathfrak{X} converge L^1 vers u , alors u est mesurable, et une sous-suite de u_n converge presque partout vers u . On voit facilement que u est à un ensemble négligeable près à valeurs dans $\{0, 1\}$. On voit aussi que les X_n sont fermés L^1 fort, par exemple en exploitant le fait que (f_n) est une partie bornée de L^1 et le théorème de convergence dominée.

6. On utilise alors le théorème de Baire sur \mathfrak{X} (qui est complet comme fermé de L^1), puisque de toute évidence, $\mathfrak{X} = \cup_{n \in \mathbb{N}} X_n$ (en utilisant la convergence L^1 -faible de f_k vers f). Un X_n au moins est d'intérieur non vide ; il existe $E \subset \Omega$ et $\delta > 0$ tel que

$$|A| \leq \delta \Rightarrow \forall k \geq n, \quad |\int_F (f_k - f)| \leq \epsilon \text{ pour } F = E \cup A \text{ et } F = E \setminus A.$$

On en déduit facilement :

$$|A| \leq \delta \Rightarrow \forall k \geq n, \quad |\int_A (f_k - f)| \leq 2\epsilon,$$

Cela implique l'uniforme intégrabilité car A_k^+ et A_k^- définis comme les sous-ensembles de A pour lesquels $f_k - f \geq 0$ (resp. $f_k - f < 0$) sont de mesure inférieure à $|A|$.

★

Solution 6. *Limite de produits*

1. La convergence presque partout implique que $\text{mes}(\cap_n E_n, k) = 0$ pour tout k . Pour tout k , il existe donc n_k tel que $\text{mes}(E_{n_k, k}) \leq \frac{\epsilon}{2^k}$. On a donc $\text{mes}(\cup_k E_{n_k, k}) \geq \epsilon$, et sur le complémentaire de $\cup_k E_{n_k, k}$, on a convergence uniforme.

2. Soit $\epsilon > 0$. Comme f_n converge faiblement dans $\sigma(L^1, L^\infty)$ d'après le théorème de Dunford-Petit, elle est équi intégrable. Soit donc δ tel que si $\text{mes}(B) \leq \delta$, $\int_B f_n \leq \epsilon$. Comme

g_n converge presque partout, il existe A partie mesurable de Ω telle que $\text{mes}(\Omega \setminus A) \leq \delta$ et telle que sur A la convergence de g_n est uniforme. On écrit

$$\begin{aligned} \int |f_n g_n| &= \int_A |f_n g_n| + \int_{\Omega \setminus A} |f_n g_n| \\ &\leq (\sup_k \|f_k\|_{L^1}) \|g_n\|_{L^\infty(A)} + (\sup_k \|g_k\|_{L^\infty}) \epsilon. \end{aligned}$$

Pour n assez grand on a donc

$$\int |f_n g_n| \leq (\sup_k \|f_k\|_{L^1}) + (\sup_k \|g_k\|_{L^\infty}) \epsilon.$$

★