Correction Td n° 3 d'Analyse fonctionnelle

Distributions et convolution

Séance du 29 février 2010

Solution 1. *Support et ordre*

1. Soit $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, il existe $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\phi(x) = \phi(0) + \phi'(0)x + \psi(x)x^2$. Alors le terme d'ordre n vaut :

$$n\phi(0) + \phi'(0)\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\psi(1/i)}{i^2} - n\phi(0) - \phi'(0)\log n.$$

il est bien connu que que $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} - \log n \to \gamma$ et la série résiduelle est convergente car ψ est bornée sur $[0,1]$: $u(\phi)$ est bien défini. Enfin, comme on a $\|\psi\|_{L^\infty([0,1])} \leq C\|\phi''\|_{L^\infty}$ (formule de Taylor avec reste intégral), on en déduit que $|u(\phi)| \leq C\|\phi''\|_{L^\infty}$ et u est d'ordre au plus 2.

1. Soit $K = \{0\} \cup \bigcup_{i=1}^{\infty}\{1/i\}$. Bien sûr, $S \subset K$ car si $x \notin K$, il existe un voisinage V de x ne rencontrant pas K, et toute fonction test à support dans V s'annule contre T. D'autre part, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, en choisissant une fonction test ayant son support dans $]1/j - \varepsilon, 1/j + \varepsilon[$, on voit que $1/j \in S$. S est un support, donc est fermé et $0 \in S$. Finalement, $S = K$.

2. On voit que $u(\phi_k) \sim \sqrt{k}$, mais comme $\partial^\alpha \phi_k(1/j) = 0$ si $\alpha \geq 1$,

$$\sum_{i=0}^{p} \sup_{x\in S} |\partial_x^i \phi_k(x)| \leq 1/\sqrt{k}.$$

D'où le résultat.

3. Si u était d'ordre 1, on aurait une relation du type :

$$|u(\varphi)| \leq C(\|\varphi\|_{L^\infty} + \|\varphi'\|_{L^\infty}).$$

On introduit donc le cut-off d'une primitive seconde d'une fonction test : soit $\phi \in \mathcal{D}(]0,1[)$, positive, d'intégrale 1. Soit $\psi \in \mathcal{D}(]-1,2[$, $0 \leq \psi \leq 1$ et $\psi|_{[0,1]} = 1$. On pose :

$$\psi_k(x) = \psi(x)\int_0^x \int_0^y \phi(kt)dtdy.$$

Alors $\|\psi_k'\|_{L^\infty} \leq \frac{C}{k}$ et $\|\psi_k\|_{L^\infty} \leq \frac{C}{k}$. Le membre de droite dans l'inégalité supposée est majoré par C/k.

D'autre part :

$$u(\psi_k) = \sum_{i=1}^{\infty} \psi_k(1/i) = \sum_{i=1}^{k} \psi_k(1/i) + \sum_{i=k+1}^{\infty} \psi_k(1/i).$$

Remarquons que par définition, $|\psi_k(x)| \leq \|\phi\|_{L^\infty} x^2/2$ si $x \in [0,1]$. Donc :

$$\left|\sum_{i=k+1}^{\infty} \psi_k(1/i)\right| \leq C\|\phi\|_{L^\infty} 1/k.$$

Enfin, sur $[1/k, 1]$, ψ_k est affine de pente $1/k$, donc :

$$\sum_{i=1}^{k} \psi_k(1/i) = \sum_{i=1}^{k} (\psi_k(1/k) + 1/k(1/i - 1/k)) = k\psi_k(1/k) + \log k/k + O(1/k).$$

Comme $|\psi_k(x)| \leq \|\phi\|_{L^\infty} x^2/2$, $k\psi_k(1/k) \leq C/k$ et $u(\psi_k) \sim \log k/k$, d'où la conclusion.

⋆

Solution 2. *Distributions qui sont régulières*

1. $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans L^p ($p < \infty$) (considérer la régularisation par convolution avec une approximation de l'identité), donc $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ peut etre étendue à en $\tilde{T}$ application continue $L^p \to \mathbb{R}$ (avec la meme inégalité). Par dualité, il existe $f \in L^q$ telle que $\tilde{T}(\phi) = \int f\phi$ pour tout $\phi \in L^p$, donc pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$. En identifiant, on obtient $T = T_f$.

2. On essaye d'appliquer le résultat précédent. Comme pour la primitivation d'une distribution, on introduit $\chi \in \mathcal{D}(]0, 1[)$, $\int \chi = 1$ et $\chi \geq 0$. Soit donc $\phi \in \mathcal{D}(]0, 1[$. Alors il existe $\psi \in \mathcal{D}(]0, 1[)$ telle que $\phi = \psi' + \left(\int \phi\right) \chi$. Ainsi :

$$T(\phi) = T(\psi') + \left(\int \phi\right) T(\chi) = -\int f\psi + \left(\int \phi\right) T(\chi).$$

Mais $T(\chi)$ est une constante C et $|\int \phi| \leq \|\phi\|_{L^2}$ (par Holder). Enfin, $\left|\int f\psi\right| \leq \|f\|_{L^2}\|\psi\|_{L^2}$. Il reste donc à estimer $\|\psi\|_{L^2}$ en fonction de ϕ. Pour cela, on a :

$$\psi^2(x) = 2\int_0^x \psi'(t)\psi(t)dt \leq 2\|\psi'\|_{L^2}\|\psi\|_{L^2}.$$

Quand on intègre en x, entre 0 et 1, on obtient $\|\psi\|_{L^2}^2 \leq 2\|\psi'\|_{L^2}\|\psi\|_{L^2}$, d'où $\|\psi\|_{L^2} \leq 2\|\psi'\|_{L^2}$. Et donc :

$$\|\psi\|_{L^2} \leq 2\left\|\phi - \left(\int \phi\right) \chi\right\|_{L^2} \leq 2(1 + \|\chi\|_{L^2})\|\phi\|_{L^2}.$$

Ce qui permet de conclure que :

$$|T(\phi)| \leq 2(1 + \|\chi\|_{L^2} + |T(\chi)|)\|\phi\|_{L^2}.$$

Par 1., T s'identifie à $u \in L^2(]0, 1[)$.

Ensuite, considérons $v \in C^1([0, 1])$ avec $v(0) = 0$. Alors :

$$|v^2(x)| = 2\left|\int_0^x v'(t)v(t)dt\right| \leq 2\|v\|_{L^2}\|v'\|_{L^2}.$$

Donc $\|v\|_{L^\infty} \leq 2(\|v\|_{L^2} + \|v'\|_{L^2})$. On raisonne maintenant par densité : $\mathcal{D}$ est dense dans L^2, soit donc $v_n \in \mathcal{D}(]0, 1[)$ telle que $v_n \to f$ dans L^2. En reprenant les estimées précédentes, on voit $u_n(x) = \int_0^x v_n(t)dt$ est de Cauchy dans $L^2(]0, 1[)$, puis $C^0([0, 1])$, donc converge vers $\tilde{u}$. Par continuité de la dérivation au sens des distributions, on a que $\tilde{u}' = \lim_{n\to\infty} v_n = f$. Donc $\tilde{u}$ et u diffèrent d'une constante (primitivation d'une distribution), et $u \in C^0([0, 1])$.

3. L'hypothèse s'écrit que pour tout $\phi \in \mathcal{D}$, :

$$\int f\phi + T(\phi') = 0.$$

Soit maintenant $\chi \in \mathcal{D}$, positive, telle que $\int \chi = 1$. On définit g la primitive de f telle que $\int g\chi = T(\chi)$ (g est C^1). Alors on a également, par intégration par partie $\int f\phi + T_g(\phi') = 0$. On en déduit que pour tout $\phi \in \mathcal{D}$, $(T - T_g)(\phi') = 0$. Pour $\psi \in \mathcal{D}$, $\int(\psi - (\int \psi)\chi) = 0$, donc si $\phi(x) = \int_{-\infty}^{x}(\psi - (\int \psi)\chi)$, $\phi \in \mathcal{D}$ et $\phi' = \psi - (\int \psi)\chi$. Vu ce qui précède :

$$(T - T_g)(\psi) = \int \psi \cdot (T - T_g)(\chi) = 0.$$

Donc finalement, $\forall \psi \in \mathcal{D}, (T - T_g)\psi = 0$. On en déduit que $T = T_g$, et par définition $g' = f$.

4. $g(x) = \exp(-\int_0^x a(t)dt)$ est une fonction C^∞, on peut donc calculer :

$$(gu)'(\phi) = -gu(\phi') = -u(g\phi') = u(g'\phi - (g\phi)').$$

Mais $g' = -ag$, donc : $u(g'\phi - (g\phi)') = au(g\phi) + u'(g\phi) = fg\phi$, donc $(gu)'$ s'identifie à la fonction continue fg, et donc gu s'identifie à une fonction C^1. Comme g ne s'annule jamais, u est C^1.

$\star$

Solution 3.

1. On sait que $\delta_0 * f = f$. Il suffit donc de trouver H tel que $H' = \delta_0$. On "primitive" : posons $H = \mathbb{1}_{x\geq 0} \in L^1_{\text{loc}}$. Alors pour $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$:

$$(H', \psi) = -(H, \psi') = -\int_0^\infty \psi'(x)dx = \psi(0) = \delta_0(\psi),$$

donc $H' = \delta_0$ répond à la question.

En dimension supérieure, on vérifie que $\partial_{x_1 \cdots x_n}(\mathbb{1}_{x_1\geq 0, \ldots, x_n \geq 0}) = \delta_0$.

2. • δ_a est à support compact, il n'y a pas de problème pour calculer :

$$(\delta_a * H)' = (\delta_a * \delta_0) = \delta_a,$$

donc $(\delta_a * H)(x) = \mathbb{1}_{x\geq a}$. On peut aussi remarquer que $(\delta_a * \psi)(x) = \psi(x - a)$.

• On calcule : $\delta' * \mathbb{1} = (\delta * \mathbb{1})' = \mathbb{1}' = 0$.

• Il faut remarquer que si $m > n$, $x^m \delta_0^{(n)} = 0$ (calcul sur une fonction test). Par ailleurs, on calcule pour $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}(x^m\delta_0^{(n)}, \psi) &= (\delta_0^{(n)}, x^m\psi(x)) = (x^m\psi)^{(n)}(0) \\ &= (-1)^n C_n^m m! \psi^{(n-m)}(0) = (-1)^n A_n^m \psi^{(n-m)}(0) = (-1)^m A_n^m (\delta_0^{(n-m)}, \psi).\end{aligned}$$

Et ainsi, $x^m\delta_0^{(n)} = (-1)^m A_n^m \delta_0^{(n-m)}$. On va donc supposer que $m \leq n$ et $p \leq q$. On a alors que :

$$x^m\delta_0^{(n)} * x^p\delta_0^{(q)} = (-1)^{m+p}A_n^m A_q^p \delta_0^{(n-m)} * \delta_0^{(q-p)} = (-1)^{m+p}A_n^m A_q^p \delta_0^{(n+q-m-p)}.$$

• $(\mathbb{1}_{[a,b]} * \mathbb{1}_{[c,d]})''$ ne fait intervenir que des ditributions de $\mathcal{E}'$, il n'y a pas de problème. Ensuite :

$$(\mathbb{1}_{[a,b]} * \mathbb{1}_{[c,d]})'' = \mathbb{1}'_{[a,b]} * \mathbb{1}'_{[c,d]} = (\delta_a - \delta_b) * (\delta_c - \delta_d).$$

Or $\delta_x * \delta_y = \delta_{x+y}$ donc

$$(\mathbb{1}_{[a,b]} * \mathbb{1}_{[c,d]})'' = \delta_{a+c} + \delta_{b+d} - \delta_{a+d} - \delta_{b+c}.$$

• $T * \mathbb{1}$ est une distribution bien définie car $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$. Ensuite :

$$(T * \mathbb{1}, \psi) = (T, \check{\mathbb{1}} * \psi) = (T, \mathbb{1} * \psi) = \int \psi \cdot (T, \mathbb{1}).$$

Ainsi, $T * \mathbb{1} = (T, \mathbb{1})\mathbb{1}$ est une distribution constante.

• $T * \exp$ est bien définie comme précédemment. On calcule :

$$(T * \exp, \psi) = (T, \check{\exp} * \psi) = (T, x \mapsto \int \exp(y - x)\psi(y)dy)$$
$$= \int \psi(y)e^y dy (T, \exp(-x)).$$

Et donc $T * \exp = (T, \exp(-x)) \exp$.

On peut aussi voir directement que $(T * \exp)' = T * \exp$, donc on a que $T * \exp = C \exp$. Ensuite, on calcule :

$$C = (T * \exp)(0) = (T, \check{\exp}) = (T, \exp(-x)).$$

3. $(\mathbb{1} * \delta') * H = 0 * H = 0$ et $\mathbb{1} * (\delta' * H) = \mathbb{1} * \delta = \mathbb{1}$. Ainsi, si deux des trois distributions ne sont pas à support compact, on n'a pas nécessairement l'associativité de la convolution.

4. On veut en fait :

$$u * (\delta_0 - \delta_1) = u - u(\cdot - 1) = \delta_0'.$$

Ceci donne l'idée de choisir :

$$u = \sum_{k \in \mathbb{N}} \delta_k'.$$

Calculons alors $\delta_a' * \mathbb{1}_{[0,1]} = \delta_a * (\delta_0 - \delta_1) = \delta_a - \delta_{a+1}$. Donc, si on note $T_n = \sum_{k=0}^n \delta_k'$, alors :

$$T_n * \mathbb{1}_{[0,1]} = \delta_0 - \delta_n \rightharpoonup \delta_0.$$

Comme $T_n \rightharpoonup u$, $u * \mathbb{1}_{[0,1]} = \delta_0$.

⋆

Solution 4.

1.

Le produit de convolution est bien défini car les support de deux distributions de $\mathcal{D}'_+$ sont convolutifs. Considérons trois fonctions f, g régulières à support dans $\mathbb{R}^+$, et $h \in \mathcal{D}$. Alors

$$(f * g, h) = \int \left(\int f(x - y)g(y)dy \right) h(x)dx$$
$$= \int f(x)g(y)h(x + y)dxdy$$

$f \otimes g : (x, y) \mapsto f(x)g(y)$ et $H_h : (x, y) \mapsto h(x + y)$ définissent bien sûr des fonctions régulière, mais il faut voir que $\mathrm{Supp}(f \otimes g) \cap \mathrm{Supp}\, H_h$ est compact. En effet si $(x, y) \in \mathrm{Supp}(f \otimes g) \cap \mathrm{Supp}\, H_h$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ et $x + y \leq \sup \mathrm{Supp}\, h \leq C$, donc $x \leq C$ et $y \leq C$.

Si $T, S \in \mathcal{D}'$, on peut définir (comme d'habitude) $(T \otimes S)(\phi \otimes \psi) = T(\phi)S(\psi)$ qui est une distribution de $\mathbb{R}^2$. Maintenant, pour $T, S \in \mathcal{D}'_+$ et $\phi \in \mathcal{D}$, on note $H_\phi(x, y) = \phi(x+y)$, on choisit $\psi \in \mathcal{D}$ telle que $\psi = \mathbb{1}$ au voisinage de $\mathrm{Supp}(f \otimes g) \cap \mathrm{Supp}\, H_\phi$. Alors comme précédemment, on vérifie que ψH_ϕ est à support compact, et on est fondé à poser :

$$(T * S)(\phi) = (T \otimes S)(\psi H_\phi).$$

On voit que cette définition ne dépend pas du choix ψ, et coïncide avec la définition de la convolution pour des fonctions régulières (par construction) - et également avec la convolution usuelle des distributions si S est à support compact. De plus, $T * S \in \mathcal{D}'_+$.

On vérifie que la convolution est alors associative et commutative. De plus, on voit immédiatement qui si $T, U \in \mathcal{D}'_+$, $\mathrm{Supp}(T * U) \subset \mathbb{R}^+$: on a donc une algèbre.

2. Il suffit de faire le cacul :

$$\begin{aligned}(\delta_0' - \lambda\delta_0) * (H(t)e^{\lambda t}) &= \delta_0' * (H(t)e^{\lambda t}) - \lambda\delta_0 * (H(t)e^{\lambda t}) \\ &= (\delta_0 * (H(t)e^{\lambda t}))' - \lambda(H(t)e^{\lambda t} \\ &= (H(t)e^{\lambda t})' - \lambda(H(t)e^{\lambda t} \\ &= \delta_0 e^{\lambda t} + \lambda H(t)e^{\lambda t} - \lambda(H(t)e^{\lambda t}.\end{aligned}$$

Mais bien sûr, $\delta_0 e^{\lambda t} = \delta_0$.

3. On pour $n = 1$, c'est la question précédente. Ensuite, c'est une récurrence :

$$\begin{aligned}(\delta_0' - \lambda\delta_0) * \left(H(t)\frac{t^{n-1}e^{\lambda t}}{(n-1)!}\right) = \left(H(t)\frac{t^{n-1}e^{\lambda t}}{(n-1)!}\right)' - \lambda\left(H(t)\frac{t^{n-1}e^{\lambda t}}{(n-1)!}\right) \\ = \delta_0\frac{t^{n-1}e^{\lambda t}}{(n-1)!} + H(t)\frac{t^{n-2}e^{\lambda t}}{(n-2)!} + H(t)\lambda\frac{t^{n-1}e^{\lambda t}}{(n-1)!} - \lambda H(t)\frac{t^{n-1}e^{\lambda t}}{(n-1)!} = H(t)\frac{t^{n-2}e^{\lambda t}}{(n-2)!}.\end{aligned}$$

Ce qui assure l'hérédité de la récurrence.

4. On considère l'EDO $\sum_k a_k y^{(k)}(t) = \delta_0$. Alors on peut réécrire l'équation $\sum_k a_k u^{(k)}(t) = \delta_0$ sous la forme :

$$\left(\sum_k a_k(-\delta_0')^{*k}\right) * u = \delta_0.$$

$\mathbb{C}$ est algébriquement clos, donc :

$$\sum_k a_k(-\delta_0')^{*k} = \bigstar_i(\delta' - \lambda_i\delta)^{n_i}.$$

On conclut donc que :

$$u = \left(\sum_k a_k(-\delta_0')^{*k}\right)^{*-1} = \bigstar_i\left(H(t)\frac{t^{n_i-1}e^{\lambda_i t}}{(n_i-1)!}\right).$$

$\star$