Correction du Td n° 4 d'Analyse fonctionnelle

Distributions

Séance du 8 mars 2013

Solution 1. *Partition de l'unité et fonction plateau*

1. Considérons $f(x) = e^{-\frac{1}{1-x^2}}$ pour $|x| < 1$ et $f(x) = 0$ si $|x| \geq 1$. On vérifie par récurrence que pour $|x| < 1$

$$\frac{d^n}{dx^n} f(x) = \frac{P_n(x)}{(1-x^2)^{2n}} e^{-\frac{1}{1-x^2}},$$

où P_n est polynôme. En particulier, $\frac{d^n}{dx^n} f$ tend vers 0 quand $x \to \pm 1$, et par prolongement de la dérivée, f est une fonction C^{n-1} pour tout n, donc C^∞, à support dans $[-1, 1]$. On pose $h(x) = C \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$, où la constante C est ajustée pour que $h(x) = 1$ si $x \geq 1$. h est positive, croissante et pour $x \leq -1$, $h(x) = 0$. La fonction $g(x) = h(3+2x)h(3-2x)$ répond à la question.

2. Soit x_n une suite dense de Ω. Si c'est possible, on choisit ε_n tel que $B(x_n, 2\varepsilon_n) \subset V_i$ pour un certain i, et $B(x_n, 3\varepsilon_n)$ n'est inclus dans aucun V_i : sinon, on choisit $\varepsilon_n = 1$, et $B(x_n, 3) \subset V_i$. Montrons que pour tout $x \in \Omega$, il existe n tel que $x \in B(x_n, \varepsilon_n)$. Soit i tel que $x \in V_i$, il existe $\varepsilon \in]0, 1[$ tel que $B(x, \varepsilon) \subset V_i$. Soit x_n tel que $d(x, x_n) < \varepsilon/4 < 1$. Si $\varepsilon_n = 1$, $x \in B(x_n, \varepsilon_n)$. Sinon $B(x_n, 3\varepsilon/4) \subset B(x, \varepsilon) \subset V_i$, donc $3\varepsilon_n \geq 3\varepsilon/4$. Ainsi, $\varepsilon_n \geq \frac{\varepsilon}{4}$ et $x \in B(x_n, \varepsilon_n)$. Dans tous les cas $x \in B(x_n, \varepsilon_n)$.

On pose $\psi_n(x) = g(|x - x_n|/\varepsilon_n)$: alors ψ_n est à support dans $B(x_n, 2\varepsilon_n) \subset V_i$ et $\psi_n|_{B(x_n,\varepsilon_n)} = 1$. On définit maintenant $\varphi_1 = \psi_1$ et :

$$\varphi_n = (1 - \psi_1) \cdots (1 - \psi_{n-1})\psi_n.$$

On vérifie immédiatement par récurrence que pour tout n :

$$\varphi_1 + \cdots + \varphi_n = 1 - (1 - \psi_1) \cdots (1 - \psi_n).$$

Si $x \in \Omega$, $x \in B(x_n, \varepsilon_n)$ pour un certain n et donc $\varphi_m(x) = 0$ pour $m > n$ et :

$$\sum_m \varphi_m(x) = \sum_{m=1}^{n} \varphi_m(x) = 1.$$

D'autre part, φ_n est à support dans $B(x_n, 2\varepsilon_n)$, donc dans l'un des V_i. Enfin, si K est un compact de Ω, il existe m tel que $K \subset \bigcup_{n=1}^{m} B(x_n, \varepsilon_n)$ d'où le résultat.

3. K étant compact, il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, $V_\varepsilon = \{x | d(x, K) < \varepsilon\}$ soit un voisinage ouvert de K, d'adhérence compacte, et inclus dans Ω. On considère le recouvrement de Ω par les ouverts $V_{2\varepsilon_0/3}$ et $\Omega \backslash \overline{V_{\varepsilon_0/3}}$. Par la question précédente, on dispose d'un partition de l'unité φ_n. On pose :

$$\varphi(x) = \sum_{n : \mathrm{Supp}\, \varphi_n \subset V_{2\varepsilon_0/3}} \varphi_n(x).$$

Alors la somme étant localement finie, φ est C^∞ à support dans $V_{2\varepsilon_0/3}$, donc compact et prend ses valeurs dans $[0,1]$. Enfin, pour $x \in V_{\varepsilon_0/3}$,

$$\varphi(x) = 1 - \sum_{n:\operatorname{Supp}\varphi_n \subset \Omega \setminus \overline{V_{\varepsilon_0/3}}} \varphi_n(x) = 1.$$

Ainsi φ répond à la question.

$\star$

Solution 2. *Support d'une distribution*

1. Soit O_i des ouverts sur lesquels u est nulle, et $\phi \in \mathcal{D}(\mathcal{O})$, où $\mathcal{O} = \bigcup O_i$. Soit $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une partition de l'unité adaptée à $(O, (O_i)_{i\in I})$.

Soit $\phi \in \mathcal{D}(O)$, $\operatorname{Supp}(\phi)$ est un compact, donc par construction des $(\psi_n)_n$, il existe un nombre m fini de (ψ_n) tel que $\sum_{n=1}^m \psi_n|_{\operatorname{Supp}(\phi)} = 1$. En particulier, cela signifie que

$$\phi = \sum_{n=1}^m \psi_n \phi.$$

Mais $\psi_n\phi \in \mathcal{D}(O_i)$ pour un certain i, donc $(u, \psi_n\phi) = 0$ pour tout n. En sommant les m premiers termes, on voit que $(u, \phi) = 0$. Ainsi, u est nulle sur $\bigcup O_i$.

L'union des ouverts sur lesquels u est nul est donc un ouvert sur lesquel u est nul : le support de u est son complémentaire.

2. Soit $\psi \in C^0(\Omega)$, $\operatorname{Supp}\psi = \overline{\{x|\psi(x) \neq 0\}}$. Considérons donc O, l'intérieur de $\{x|\psi(x) = 0\}$. Si $x_0 \in O$, il existe un voisinage $B(x_0, \varepsilon)$ sur lequel ψ est nulle, et donc pour tout $\phi \in \mathcal{D}(B(x_0,\varepsilon))$, $(\psi, \phi) = \int \psi\phi = 0$ et donc ψ s'annule sur $B(x_0, \varepsilon)$ au sens des distributions.

Réciproquement, si ψ s'annule sur un ouvert O au sens des distributions, soit $x_0 \in O$ et $B(x_0, \varepsilon) \subset O$. Soit ϕ_k une approximation de l'unité : $\phi \in \mathcal{D}(B(0,1))$ d'intégrale 1 et $\phi_k(x) = k^{-n}\phi(k(x - x_0))$, alors ϕ_k est d'intégrale 1 et est à support dans $B(x_0, 1/k)$. Pour k assez grand, $\phi_k \in \mathcal{D}(B(x_0,\varepsilon)) \subset \mathcal{D}(O)$ et on voit que

$$\int \phi_k\psi \to \psi(x_0).$$

Comme $(\phi_k, \psi) = 0$, on en déduit que $\psi(x_0) = 0$, et comme cela est vrai pour tout $x \in O$, $x_0 \notin \operatorname{Supp}(\psi)$.

Support de δ_0 : si $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^*)$, alors $\delta_0(\phi) = 0$. Ainsi $\operatorname{Supp}(\delta_0) \subset \{0\}$. Mais comme $\delta_0 \neq 0$, $\operatorname{Supp}(\delta_0) = \{0\}$.

3. Soit u une distribution à support compact K. il existe $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ telle que $\psi = \mathbb{1}$ sur un voisinage V (compact) de K. Alors pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\operatorname{Supp}(\phi(1-\psi)) \subset \overline{V^c} \subset K^c$, donc $(u, \phi(1-\psi)) = 0$ et $(u, \phi) = (u, \phi\psi)$.

Maintenant, $\operatorname{Supp}(\phi\psi) \subset V$ compact fixe, donc il existe des constantes $C(V) > 0$ et $m(V) \in \mathbb{N}$ telle que :

$$|(u, \phi\psi)| \leq C(V)\|(\phi\psi)\|_{m(V)} \leq C(\psi, V)\|\phi\|_{m(V)}.$$

(par la formule de Leibniz), V et ψ sont fixes, donc $C(\psi, V) = C'$, $m(V) = m$, et finalement u est d'ordre m : $|(u,\phi)| \leq C'\|\phi\|_m$).

$\star$

Solution 3. *Quelques exemples de distributions*

1. La formule définit bien une distribution (d'ordre au plus k sur le compact $[-k, k]$). Supposons l'ordre fini, disons k, alors, en faisant une translation de $k+1$, il existe C, tel que pour $\phi \in \mathcal{D}(]-1,1[)$, on ait

$$|\phi^{(k+1)}(0)| \leq C \sum_{i=1}^{k} \sup_{x \in]-1,1[} |\partial^i \phi(x)|.$$

Une telle inégalité ne peut pas avoir lieu, vu qu'il existe des fonctions $\mathcal{C}^k$ qui ne sont pas $\mathcal{C}^{k+1}$.

2. On calcule :

$$(\partial_x u + \partial_y u, \phi) = -\int (\phi_x(t,t) + \phi_y(t,t))dt = -\int \frac{d}{dt}(\phi(t,t))dt = 0.$$

3. $e^{1/x^2} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*)$ car étant donné un compact K de R_+^*, $e^{1/x^2} \in C^0(K)$. Par contre, considérons $\phi \in \mathcal{D}(]1,2[)$ positive, d'intégrale 1, et la suite $\phi_k(x) = 2^{-k}\phi(kx)$. Alors on calcule et $\phi_k \to 0$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$: en effet, $\phi_k \in \mathcal{D}([0,2])$ et pour tout m,

$$\|\partial_x^m \phi_k\|_{C^0} = 2^{-k} k^m \|\partial_x^m \phi\|_{C^0} \to 0 \text{ quand } k \to \infty.$$

Mais :

$$\int e^{1/x^2} \phi_k(x)dx \geq e^{k^2/4} 2^{-k} \frac{1}{k} \to \infty.$$

4. On cherche v tel que pour tout $\phi \in \mathcal{D}$, $(v, \phi') = -(u, \phi)$. Il faut remarquer que les fonctions de $\mathcal{D}$ d'intégrale nulle sont exactement les dérivées de fonctions de $\mathcal{D}$. Ainsi, si ψ est d'intégrale nulle, $\psi = \phi'$ ($\phi \in \mathcal{D}$ est uniquement déterminée : $\phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \psi(t)dt$) et $(v, \psi) = -(u, \phi)$.

Maintenant, soit $\chi \in \mathcal{D}$, d'intégrale 1. On choisit comme on veut (v, χ) : ensuite, si $\psi \in \mathcal{D}$, $\psi - (\int \psi)\chi$ est d'intégrale nulle, donc c'est un certain ϕ', et :

$$(v, \psi) = -(u, \phi) + \left(\int \psi\right)(v, \chi).$$

On obtient ainsi un espace de dimension 1 de primitives de u.

Réciproquement, si v est une primitive de u, v est déterminé sur l'hyperplan des fonctions de $\mathcal{D}$ d'intégrale nulle, et sa valeur en χ la définie complétement, donc l'espace des primitives est de dimension 1.

⋆

Solution 4. *Support et ordre*

1. Soit $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, il existe $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\phi(x) = \phi(0) + \phi'(0)x + \psi(x)x^2$. Alors le terme d'ordre n vaut :

$$n\phi(0) + \phi'(0)\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\psi(1/i)}{i^2} - n\phi(0) - \phi'(0)\log n.$$

il est bien connu que que $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} - \log n \to \gamma$ et la série résiduelle est convergente car ψ est bornée sur $[0,1]$: $u(\phi)$ est bien défini. Enfin, comme on a $\|\psi\|_{L^\infty([0,1])} \leq C\|\phi''\|_{L^\infty}$ (formule de Taylor avec reste intégral), on en déduit que $|u(\phi)| \leq C\|\phi''\|_{L^\infty}$ et u est d'ordre au plus 2.

1. Soit $K = \{0\} \cup \bigcup_{i=1}^{\infty}\{1/i\}$. Bien sûr, $S \subset K$ car si $x \notin K$, il existe un voisinage V de x ne rencontrant pas K, et toute fonction test à support dans V s'annule contre T. D'autre part, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, en choisissant une fonction test ayant son support dans $]1/j - \varepsilon, 1/j + \varepsilon[$, on voit que $1/j \in S$. S est un support, donc est fermé et $0 \in S$. Finalement, $S = K$.

2. On voit que $u(\phi_k) \sim \sqrt{k}$, mais comme $\partial^\alpha \phi_k(1/j) = 0$ si $\alpha \geq 1$,

$$\sum_{i=0}^{p} \sup_{x \in S} |\partial_x^i \phi_k(x)| \leq 1/\sqrt{k}.$$

D'où le résultat.

3. Si u était d'ordre 1, on aurait une relation du type :

$$|u(\varphi)| \leq C(\|\varphi\|_{L^\infty} + \|\varphi'\|_{L^\infty}).$$

On introduit donc le cut-off d'une primitive seconde d'une fonction test : soit $\phi \in \mathcal{D}(]0,1[)$, positive, d'intégrale 1. Soit $\psi \in \mathcal{D}(]-1,2[$, $0 \leq \psi \leq 1$ et $\psi|_{[0,1]} = 1$. On pose :

$$\psi_k(x) = \psi(x) \int_0^x \int_0^y \phi(kt)dtdy.$$

Alors $\|\psi_k'\|_{L^\infty} \leq \frac{C}{k}$ et $\|\psi_k\|_{L^\infty} \leq \frac{C}{k}$. Le membre de droite dans l'inégalité supposée est majoré par C/k.

D'autre part :

$$u(\psi_k) = \sum_{i=1}^{\infty} \psi_k(1/i) = \sum_{i=1}^{k} \psi_k(1/i) + \sum_{i=k+1}^{\infty} \psi_k(1/i).$$

Remarquons que par définition, $|\psi_k(x)| \leq \|\phi\|_{L^\infty} x^2/2$ si $x \in [0,1]$. Donc :

$$\left| \sum_{i=k+1}^{\infty} \psi_k(1/i) \right| \leq C\|\phi\|_{L^\infty} 1/k.$$

Enfin, sur $[1/k, 1]$, ψ_k est affine de pente $1/k$, donc :

$$\sum_{i=1}^{k} \psi_k(1/i) = \sum_{i=1}^{k} (\psi_k(1/k) + 1/k(1/i - 1/k)) = k\psi_k(1/k) + \log k/k + O(1/k).$$

Comme $|\psi_k(x)| \leq \|\phi\|_{L^\infty} x^2/2$, $k\psi_k(1/k) \leq C/k$ et $u(\psi_k) \sim \log k/k$, d'où la conclusion.

$\star$

Solution 5. *Distributions qui sont régulières*

1. $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans L^p ($p < \infty$) (considérer la régularisation par convolution avec une approximation de l'identité), donc $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ peut etre étendue à en $\tilde{T}$ application continue $L^p \to \mathbb{R}$ (avec la meme inégalité). Par le théorème de représentation de Riesz, il existe $f \in L^q$ telle que $\tilde{T}(\phi) = \int f\phi$ pour tout $\phi \in L^p$, donc pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$. En identifiant, on obtient $T = T_f$.

2. On essaye d'appliquer le résultat précédent. Comme pour la primitivation d'une distribution, on introduit $\chi \in \mathcal{D}(]0,1[)$, $\int \chi = 1$ et $\chi \geq 0$. Soit donc $\phi \in \mathcal{D}(]0,1[$. Alors il existe $\psi \in \mathcal{D}(]0,1[)$ telle que $\phi = \psi' + \left(\int \phi\right)\chi$. Ainsi :

$$T(\phi) = T(\psi') + \left(\int \phi\right) T(\chi) = -\int f\psi + \left(\int \phi\right) T(\chi).$$

Mais $T(\chi)$ est une constante C et $|\int \phi| \leq \|\phi\|_{L^2}$ (par Holder). Enfin, $\left|\int f\psi\right| \leq \|f\|_{L^2}\|\psi\|_{L^2}$. Il reste donc à estimer $\|\psi\|_{L^2}$ en fonction de ϕ. Pour cela, on a :

$$\psi^2(x) = 2\int_0^x \psi'(t)\psi(t)dt \leq 2\|\psi'\|_{L^2}\|\psi\|_{L^2}.$$

Quand on intègre en x, entre 0 et 1, on obtient $\|\psi\|_{L^2}^2 \leq 2\|\psi'\|_{L^2}\|\psi\|_{L^2}$, d'où $\|\psi\|_{L^2} \leq 2\|\psi'\|_{L^2}$. Et donc :

$$\|\psi\|_{L^2} \leq 2\left\|\phi - \left(\int \phi\right)\chi\right\|_{L^2} \leq 2(1 + \|\chi\|_{L^2})\|\phi\|_{L^2}.$$

Ce qui permet de conclure que :

$$|T(\phi)| \leq 2(1 + \|\chi\|_{L^2} + |T(\chi)|)\|\phi\|_{L^2}.$$

Par 1., T s'identifie à $u \in L^2(]0,1[)$.

Ensuite, considérons $v \in C^1([0,1])$ avec $v(0) = 0$. Alors :

$$|v^2(x)| = 2\left|\int_0^x v'(t)v(t)dt\right| \leq 2\|v\|_{L^2}\|v'\|_{L^2}.$$

Donc $\|v\|_{L^\infty} \leq 2(\|v\|_{L^2} + \|v'\|_{L^2})$. On raisonne maintenant par densité : $\mathcal{D}$ est dense dans L^2, soit donc $v_n \in \mathcal{D}(]0,1[)$ telle que $v_n \to f$ dans L^2. En reprenant les estimées précédentes, on voit $u_n(x) = \int_0^x v_n(t)dt$ est de Cauchy dans $L^2(]0,1[)$, puis $C^0([0,1])$, donc converge vers $\tilde{u}$. Par continuité de la dérivation au sens des distributions, on a que $\tilde{u}' = \lim_{n\to\infty} v_n = f$. Donc $\tilde{u}$ et u diffèrent d'une constante (primitivation d'une distribution), et $u \in C^0([0,1])$.

3. L'hypothèse s'écrit que pour tout $\phi \in \mathcal{D}$, :

$$\int f\phi + T(\phi') = 0.$$

Soit maintenant $\chi \in \mathcal{D}$, positive, telle que $\int \chi = 1$. On définit g la primitive de f telle que $\int g\chi = T(\chi)$ (g est C^1). Alors on a également, par intégration par partie $\int f\phi + T_g(\phi') = 0$. On en déduit que pour tout $\phi \in \mathcal{D}$, $(T - T_g)(\phi') = 0$. Pour $\psi \in \mathcal{D}$, $\int(\psi - (\int \psi)\chi) = 0$, donc si $\phi(x) = \int_{-\infty}^x (\psi - (\int \psi)\chi)$, $\phi \in \mathcal{D}$ et $\phi' = \psi - (\int \psi)\chi$. Vu ce qui précède :

$$(T - T_g)(\psi) = \int \psi \cdot (T - T_g)(\chi) = 0.$$

Donc finalement, $\forall \psi \in \mathcal{D}, (T - T_g)\psi = 0$. On en déduit que $T = T_g$, et par définition $g' = f$.

4. $g(x) = \exp(-\int_0^x a(t)dt)$ est une fonction C^∞, on peut donc calculer :

$$(gu)'(\phi) = -gu(\phi') = -u(g\phi') = u(g'\phi - (g\phi)').$$

Mais $g' = -ag$, donc : $u(g'\phi - (g\phi)') = au(g\phi) + u'(g\phi) = fg\phi$, donc $(gu)'$ s'identifie à la fonction continue fg, et donc gu s'identifie à une fonction C^1. Comme g ne s'annule jamais, u est C^1.

⋆

Solution 6. *Valeur principale de* $\frac{1}{x}$

1. Par la formule de Taylor, $\phi(x) = \phi(0) + x\psi(x)$ avec $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ et $\|\psi\|_{L^\infty} \le \|\phi'\|_{L^\infty}$ (car $\psi(x) = \phi'(\theta(x))$ où $\theta(x) \in]0, x[$).

Ainsi,

$$\int_\varepsilon^1 \frac{\phi(x)}{x} dx = \phi(0) \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x} + \int_\varepsilon^1 \psi(x) dx = -\phi(0) \ln \varepsilon + \int_\varepsilon^1 \psi(x) dx.$$

Un calcul similaire pour $\int_{-\infty}^{-\varepsilon}$ montre que le terme en ε disparait : la limite existe et vaut

$$\int_{|x|\ge 1} \frac{\phi(x)}{x} dx + \int_{|x|\le 1} \psi(x) dx.$$

Cette distribution n'est pas d'ordre 0, sinon elle apparaitrait comme une mesure ; soit χ une fonction plateau au voisinage de 0, et la suite $\phi_n = \arctan(nx)\chi(x)$ est une suite de fonctions continues à support compact telles que $\phi_n(0) = 0$ et $\|\phi_n\|_{C^0} \le C$, mais les $(\mathrm{vp}\, x, \phi_n)$ divergent :

$$(\mathrm{vp}\, x, \phi_n) = 2 \int_0^\infty \frac{\arctan(nx)}{x} \chi(x) dx = \int_0^\infty \frac{\arctan(x)}{x} \chi(x/n) dx \to \infty.$$

Par contre, l'expression de ψ assure que c'est une distribution d'ordre au plus 1.

2. On a

$$\begin{aligned}(x\, \mathrm{vp}\, x, \phi) &= (\mathrm{vp}\, x, x\phi) \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \phi(x) dx + \int_\varepsilon^\infty \phi(x) dx \right) = \int \phi = (\mathbb{1}, \phi).\end{aligned}$$

On a donc $xu - x\, \mathrm{vp}\, x = 0$, et en particulier, $\mathrm{Supp}\, (u - \mathrm{vp}\, x) \subset \{0\}$. On en déduit qu'il existe $c_0, \dots, c_n$ tels que

$$u - \mathrm{vp}\, x = \sum_{i=0}^d c_i \delta_0^{(i)}.$$

On a donc également $\sum_{i=0}^d x\delta_0^{(i)} = 0$. Or $x\delta = 0$ et pour $i \ge 1$:

$$(x\delta_0^{(i)}, \phi) = (\delta_0^{(i)}, x\phi) = (-1)^i (x\phi)^{(i)}(0) = i(-1)^i \phi^{(i-1)}(0).$$

Comme la famille $(\delta_0, \delta_0', \dots)$ est libre, cela entraine que $c_i = 0$ pour $i \ge 1$. Ainsi

$$u - \mathrm{vp}\, x = c_0 \delta_0.$$

3. Remarquons que pour $\alpha > 1$, on a

$$(x|x|^{\alpha-1}, \phi) = \int_{|x|\ge 1} |x|^{\alpha+1} \frac{\phi(x)}{x} dx + \int_{-1}^1 |x|^{\alpha+1} \frac{\phi(x) - \phi(0)}{x} dx + \phi(0) \underbrace{\int_{-1}^1 x|x|^{\alpha-1} dx}_{0}.$$

Par convergence dominée sur chacun des deux termes, on voit que $(x|x|^{\alpha-1}, \phi) \to (\mathrm{vp}\, x, \phi)$ quand $\alpha \to -1$ $(\alpha > -1)$, ce que l'on voulait démontrer.

⋆