Correction Td n$^\circ$ 4 d'Analyse fonctionnelle

Distributions et convolution 2

Séance du 6 mars 2010

Solution 1. *Approximation de l'identité et convolution dans L^p*

1. Comme $\phi, \psi \in \mathcal{D}$, $y \mapsto |\phi(x-y)|^{1/p}|\psi(y)| \in L^p_y$ et :

$$|\phi(x-y)||\psi(y)| = |\phi(x-y)|^{1/p'}|\phi(x-y)|^{1/p}|\psi(y)|.$$

On intègre en y et on applique Hölder :

$$\int |\phi(x-y)||\psi(y)|dy \leq \|\phi(x-\cdot)\|_{L^1}^{1/p'} \left(\int |\phi(x-y)||\psi(y)|^p dy\right)^{1/p}.$$

Bien sûr, $\|\phi(x-\cdot)\|_{L^1} = \|\phi\|_{L^1}$ et donc (par Fubini-Tonelli) :

$$\|\phi * \psi\|_{L^p}^p \leq \|\phi\|_{L^1}^{p/p'} \int\int |\phi(x-y)||\psi(y)|^p dy dx$$
$$= \|\phi\|_{L^1} p/p' \int \|\phi(\cdot - y)\|_{L^1_x} |\psi(y)|^p dy = \|\phi\|_{L^1}^p \|\psi\|_{L^p}^p.$$

Ce qu'il fallait démontrer.

2. Comme $\|\phi_m\|_{L^1} = 1$, et $\mathrm{Supp}(\phi_m) \subset B(0, 1/m)$:

$$(\phi_m * f)(x) - f(x) = \int_{|y|\leq 1/m} m^n \phi(my)(f(x-y) - f(y))dy.$$

Donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, |\phi_m * f)(x) - f(x)| \leq \sup_{y:|y-x|\leq 1/m} |f(x) - f(y)|.$$

Comme f est continue, sur K compact, elle est uniformément continue sur $\overline{K + B(0, 1/m)}$ compact et $\sup_{y \in \overline{K+B(0,1/m)}:|y-x|\leq 1/m} |f(x) - f(y)| \to 0$.

Maintenant, soit $\varepsilon > 0$ et $g \in C_c(\mathbb{R}^n)$ tel que $\|f - g\|_{L^p} < \varepsilon$. On vérifie que les calculs de 1. s'appliquent si on a seulement $\psi \in L^p$. Alors :

$$\|\phi_m * (f-g)\|_{L^p} \leq \|\phi_m\|_{L^1}\|f - g\|_{L^p} \leq \varepsilon.$$

Ensuite, vu que $\mathrm{Supp}(\phi_m * g) \subset \mathrm{Supp}(\phi_m) + \mathrm{Supp}(g) \subset B(0, 1) + \mathrm{Supp}(g) = K$ (compact fixé), on a $\|\phi_m * g - g\|_{L^\infty} \to 0$ et donc $\|\phi_m * g - g\|_{L^p} = \|\phi_m * g - g\|_{L^p(K)} \to 0$). Finalement, pour m assez grand :

$$\|\phi_m * f - f\|_{L^p} \leq \|\phi_m(f - g)\|_{L^p} + \|\phi_m * g - g\|_{L^p} + \|g - f\|_{L^p} \leq 3\varepsilon.$$

Et donc $\|\phi_m * f - f\|_{L^p} \to 0$. Pour L^∞, il ne peut y avoir convergence (sur les compacts) que si f est continue. Si $f \in C_0$, il y a convergence uniforme.

On voit facilement que $\phi_m * f$ est C^∞ (dérivation sous le signe somme). Ensuite, soit $\chi \in \mathcal{D}(B(0,2)$ tel que $\chi|_{B(0,1)} = 1$. On pose $f_{n,m}(x) = \chi(x/n)(\phi_m * f)(x) \in \mathcal{D}$. Bien sur, pour tout m, $f_{n,m} \to \phi_m * f$ dans L^p, donc par un argument diagonal si on pose $f_m = f_{n(m),m}$ avec $n(m)$ tel que $\|f_{n(m),m} - \phi_m * f\|_{L^p} \leq 1/m$, on a que $f_m \to f$ dans L^p. Ainsi, $\mathcal{D}$ est dense dans L^p (et $\overline{\mathcal{S}}^{L^\infty} = C_0$).

3. Soit a tel que $p = aq'$. On a :

$$|\phi(x-y)||\psi(y)| = |\phi(x-y)|^a |\phi(x-y)|^{1-a} |\psi(y)|.$$

Et par Hölder :

$$\int |\phi(x-y)||\psi(y)|dy \leq \|\phi(x-\cdot)\|^a_{L^{aq'}} \left(\int |\phi(x-y)|^{(1-a)q} |\psi(y)|^q dy \right)^{1/q}.$$

On pose $\tilde{\psi} = \psi / \|\psi\|_{L^q}$, alors $\tilde{\psi}^q dy$ est une mesure de masse 1, donc on peut appliquer l'inégalité de Jensen (avec $x \mapsto x^{r/q}$ convexe car $q \leq r$) :

$$\left(\int |\phi(x-y)|^{(1-a)q} \frac{|\psi(y)|^q dy}{\|\psi\|^q_{L^q}} \right)^{r/q} \leq \int |\phi(x-y)|^{(1-a)r} \frac{|\psi(y)|^q dy}{\|\psi\|^q_{L^q}}.$$

Mais $p = aq'$ donc $a/p = 1 - 1/q$, $(1/p - a/p)r = 1$ et $(1-a)r = p$. Donc :

$$|\phi * \psi(x)|^r \leq \|\phi\|^{ar}_{L^p} \|\psi\|^{r-q}_{L^q} \int |\phi(x-y)|^p |\psi(y)|^q dy.$$

Enfin, en intégrant en x, avec Fubini-Tonelli :

$$\|\phi * \psi\|^r_{L^r} \leq \|\phi\|^{ar+p}_{L^p} \|\psi\|^{r-q+q}_{L^q} = \|\phi\|^r_{L^p} \|\psi\|^r_{L^q}.$$

On conclut par densité de $\mathcal{D}$ dans les espaces L^p, L^q (avec la même estimée).

⋆

Solution 2. *Solution élémentaire du laplacien*

1. On calcule

$$\Delta(|x|^\alpha) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i}(a x_i |x|^{a-2}) = (Na + a(a-2))|x|^{a-2}.$$

2. Sur ${}^cB(0,\epsilon)$ on a $\Delta|x|^{2-N} = 0$ et donc pour tout $\phi \in \mathcal{D}$

$$0 = \int_{{}^cB(0,\epsilon}\Delta(|x|^{2-N})\phi = \int_{{}^cB(0,\epsilon})(\Delta\phi)|x|^{2-N} + \int_{\partial B(0,\epsilon)} (\phi \frac{\partial}{\partial n}|x|^{2-N} - |x|^{N-2}\frac{\partial}{\partial n}\phi).$$

En prenant la limite quand $\epsilon \longrightarrow 0$ on obtient

$$\int (\Delta\phi)|x|^{2-N} = lim_{\epsilon \longrightarrow 0} \int_{\partial B(0,\epsilon)} (\phi \frac{\partial}{\partial n}|x|^{2-N} - |x|^{N-2}\frac{\partial}{\partial n}\phi).$$

On conclut donc car au sens des distributions $< \Delta|x|^{2-N}, \phi > = < |x|^{2-N}, \phi >$.

3. On remarque

$$\int_{\partial B(0,\epsilon)} \phi \frac{\partial}{\partial n}|x|^{2-N} = (2-N)\int_{\partial B(0,\epsilon)} \phi |x|^{1-N} \longrightarrow (2-N)|\mathbb{S}^{N-1}|\phi(0)$$

$$\int_{\partial B(0,\epsilon)} |x|^{N-2} \frac{\partial}{\partial n}\phi \longrightarrow 0.$$

4. Si $f \in L^1$, alors $|x|^{N-2} * f$ est bien définie comme convolution d'une distribution et d'une distribution à support compact et on a

$$-\Delta(|x|^{N-2} * f) = (-\Delta|x|^{N-2}) * f = (N-2)|\mathbb{S}^{N-1}|f,$$

donc $\frac{1}{(N-2)|\mathbb{S}^{N-1}|}|x|^{N-2} * f$ est solution de $-\Delta u = f$ au sens des distributions.

5. On raisonne comme dans les questions 1 et 2 en remarquant $\Delta ln(|x|) = 0$ sur $\mathbb{R}^2\backslash\{0\}$.

⋆

Solution 3. *Propriété de la moyenne*

1. On calcule

$$\begin{aligned} < f_k, \phi_{x,r} > &= \int \psi(\frac{\rho}{r} f_k(x+\rho\omega)\rho^{n-1} d\rho d\omega \\ &= \int \psi(\frac{\rho}{r}) f_k(x)\rho^{n-1} d\rho d\omega \\ &= f_k(x)\|\phi_{x,r}\|_{L^1} \end{aligned}$$

En passant à la limite $k \longrightarrow \infty$ on obtient donc $f_k(x) \longrightarrow \frac{1}{\|\phi_{x,r}\|_{L^1}} < T, \phi_{x,r} >$. La formule précédente nous dit que

$$T(x) \int \psi(\frac{\rho}{r})\rho^{n-1} d\omega d\rho = \int \psi(\frac{\rho}{r}) \int T(x+\rho\omega)\rho^{n-1} d\omega d\rho.$$

On a donc, en notant $h(\rho) = \int T(x+\rho\omega)\rho^{n-1} d\omega$,

$$\int \psi(\frac{\rho}{r})(T(x)|\partial B(0,\rho)| - h(\rho))d\rho = 0.$$

Comme l'égalité est vraie pour tout $\psi \in \mathcal{D}(]0,1[)$, T satisfait la propriété de la moyenne (on n'a pas besoin en raisonnant de cette manière d'avoir la convergence uniforme sur les compacts, dont je ne suis pas sûre).

2. On a que $f(x+th) = f(x) + tdf(x).h + \frac{t^2}{2} d^2 f(x+\tau h)(h,h)$ avec $\tau \in]0,t[$ (développement de Taylor-Lagrange, ordre 2). Maintenant, en fixant $t = 1$, comme $h \mapsto f(x)$ et $h \mapsto df(x).h$ vérifient la propriété de la moyenne, on a pour tout r :

$$\frac{1}{|\partial B(0,r)|} \int d^2 f(x+\tau(\sigma)\sigma)(\sigma,\sigma)d\sigma = 0.$$

Mais $d^2 f(x+\tau(\sigma)\sigma) \to d^2 f(x)$ uniformément quand $r \to 0$ (par continuité de $d^2 f$, donc on a :

$$\int_{\partial B(0,r)} d^2 f(x)(\sigma,\sigma)d\sigma = 0.$$

Il exsite une base orthonormale dans laquelle la matrice de $d^2 f(x)$ est diagonale, $d^2 f(x) = diag(a_1, \ldots, a_n)$. Dans cette base, l'égalité s'écrit, par homogéénité

$$0 = \int_{\|h\|=1} \sum_{i=1}^n a_i h_i^2 dh_i = \sum_{i=1}^n a_i \cdot \int_{\|h\|=1} h_1^2 dh_i = CTr(d^2 f(x)).$$

Finalement, on trouve que $Tr(d^2f(x)) = \Delta f = 0$.

3. Soit ϕ_n une approximation de l'identité à support compact. On pose $f_n = \phi_n * f$. Alors f_n est $\mathcal{C}^\infty$ et satisfait la propriété de la moyenne. En effet, on calcule pour $x = 0$

$$\frac{1}{|\partial B(0,r)|}\int f_n(s)ds = \frac{1}{|\partial B(0,r)|}\int\int \phi_n(y)f(s_y)dyds = \int \phi_n(y)f(_y)dy = f(0).$$

On a donc d'après la question précedente $\Delta f_n = 0$ et donc pour tout $0 = \phi_n * \Delta f \longrightarrow \Delta f$ au sens des distributions, donc $\Delta f = 0$ au sens des distributions.

4. On résoud d'abord la question pour $f \in \mathcal{C}^\infty$. Soit donc $f_i n\mathcal{C}^\infty$ tel que $\Delta f = 0$. On a alors

$$\begin{aligned}\int_{B(0,r)} f\Delta(|x|^2 - r) = 2n\int f(x) \\ = \int_{\partial B(0,r)} 2rfds - \int_{\partial B(0,r)} (|x|^2 - r^2)\partial_n fds.\end{aligned}$$

On étudie ensuite la fonction $F : r \mapsto \frac{1}{|B(0,r)|} fdx$. Le calcul précédent nous donne $F'(r) = 0$ donc $F(r) = f(0)$. L'expression de F' nous donne ensuite la propriété de la moyenne.

Soit maintenant $T \in qD'$ tel que $\Delta T = 0$ au sens des distributions.On a alors $\phi_n * T \in C^\infty$ et $\Delta(\phi_n * T) = \phi_n * \Delta T = 0$. Le calcul précédent nous dit donc que $\phi_n * T$ satisfait la propriété de la moyenne, et comme $\phi_n * T \longrightarrow T$ au sens des didtributions, d'après la question 1, T satisfait la propriété de la moyenne.

⋆