# Correction du Td n° 5 d'Analyse fonctionnelle

## Distributions et convolutions

Séance du 15 mars 2013

**Solution 1.** *Petit calculs de convolutions*

1. On sait que $\delta_0 * f = f$. Il suffit donc de trouver $H$ tel que $H' = \delta_0$. On "primitive" : posons $H = \mathbb{1}_{x\geq 0} \in L^1_{\text{loc}}$. Alors pour $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ :

$$(H', \psi) = -(H, \psi') = -\int_0^\infty \psi'(x)dx = \psi(0) = \delta_0(\psi),$$

donc $H' = \delta_0$ répond à la question.

En dimension supérieure, on vérifie que $\partial_{x_1\cdots x_n}(\mathbb{1}_{x_1\geq 0,\ldots,x_n\geq 0}) = \delta_0$.

2. • $\delta_a$ est à support compact, il n'y a pas de problème pour calculer :

$$(\delta_a * H)' = (\delta_a * \delta_0) = \delta_a,$$

donc $(\delta_a * H)(x) = \mathbb{1}_{x\geq a}$. On peut aussi remarquer que $(\delta_a * \psi)(x) = \psi(x-a)$.

• On calcule : $\delta' * \mathbb{1} = (\delta * \mathbb{1})' = \mathbb{1}' = 0$.

• Il faut remarquer que si $m > n$, $x^m \delta_0^{(n)} = 0$ (calcul sur une fonction test). Par ailleurs, on calcule pour $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ :

$$\begin{aligned}(x^m\delta_0^{(n)}, \psi) &= (\delta_0^{(n)}, x^m\psi(x)) = (x^m\psi)^{(n)}(0)\\ &= (-1)^n C_n^m m!\psi^{(n-m)}(0) = (-1)^n A_n^m \psi^{(n-m)}(0) = (-1)^m A_n^m(\delta_0^{(n-m)}, \psi).\end{aligned}$$

Et ainsi, $x^m\delta_0^{(n)} = (-1)^m A_n^m \delta_0^{(n-m)}$. On va donc supposer que $m \leq n$ et $p \leq q$. On a alors que :

$$x^m\delta_0^{(n)} * x^p\delta_0^{(q)} = (-1)^{m+p}A_n^m A_q^p \delta_0^{(n-m)} * \delta_0^{(q-p)} = (-1)^{m+p}A_n^m A_q^p \delta_0^{(n+q-m-p)}.$$

• $(\mathbb{1}_{[a,b]} * \mathbb{1}_{[c,d]})''$ ne fait intervenir que des ditributions de $\mathcal{E}'$, il n'y a pas de problème. Ensuite :

$$(\mathbb{1}_{[a,b]} * \mathbb{1}_{[c,d]})'' = \mathbb{1}'_{[a,b]} * \mathbb{1}'_{[c,d]} = (\delta_a - \delta_b) * (\delta_c - \delta_d).$$

Or $\delta_x * \delta_y = \delta_{x+y}$ donc

$$(\mathbb{1}_{[a,b]} * \mathbb{1}_{[c,d]})'' = \delta_{a+c} + \delta_{b+d} - \delta_{a+d} - \delta_{b+c}.$$

• $T * \mathbb{1}$ est une distribution bien définie car $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$. Ensuite :

$$(T * \mathbb{1}, \psi) = (T, \check{\mathbb{1}} * \psi) = (T, \mathbb{1} * \psi) = \int \psi \cdot (T, \mathbb{1}).$$

Ainsi, $T * \mathbb{1} = (T, \mathbb{1})\mathbb{1}$ est une distribution constante.

• $T * \exp$ est bien définie comme précédemment. On calcule :

$$\begin{aligned}(T * \exp, \psi) = (T, \check{\exp} * \psi) = (T, x \mapsto \int \exp(y-x)\psi(y)dy)\\ = \int \psi(y)e^y dy (T, \exp(-x)).\end{aligned}$$

Et donc $T * \exp = (T, \exp(-x)) \exp$.

On peut aussi voir directement que $(T*\exp)' = T*\exp$, donc on a que $T*\exp = C\exp$. Ensuite, on calcule :

$$C = (T*\exp)(0) = (T, \check{\exp}) = (T, \exp(-x)).$$

3. $(\mathbb{1}*\delta')*H = 0*H = 0$ et $\mathbb{1}*(\delta'*H) = \mathbb{1}*\delta = \mathbb{1}$. Ainsi, si deux des trois distributions ne sont pas à support compact, on n'a pas nécessairement l'associativité de la convolution.

4. On veut en fait :

$$u*(\delta_0 - \delta_1) = u - u(\cdot - 1) = \delta_0'.$$

Ceci donne l'idée de choisir :

$$u = \sum_{k\in\mathbb{N}} \delta_k'.$$

Calculons alors $\delta_a' * \mathbb{1}_{[0,1]} = \delta_a * (\delta_0 - \delta_1) = \delta_a - \delta_{a+1}$. Donc, si on note $T_n = \sum_{k=0}^n \delta_k'$, alors :

$$T_n * \mathbb{1}_{[0,1]} = \delta_0 - \delta_n \rightharpoonup \delta_0.$$

Comme $T_n \rightharpoonup u$, $u * \mathbb{1}_{[0,1]} = \delta_0$.

$\star$

**Solution 2.** *Equations différentiellelles*

1. Soit $\psi \in \mathcal{C}^\infty$ telle que $\psi(x) = 1$ pour $x \geq -1$ et $\psi(x) = 0$ pour $x \leq -2$. Si $u \in \mathcal{D}_+'$, on a donc $< u, \phi > = < u, \psi\phi >$ pour tout $\phi \in \mathcal{D}$. Soit $u, v \in \mathcal{D}_+'$ et $\phi \in \mathcal{D}$. On vérifie que la définition suivante du produit de convolution est bien compatible avec la définition de la convolution pour les fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans $\mathbb{R}^+$.

$$< u*v, \phi > = < u, \psi\check{v} \star \phi > .$$

Ceci est bien défini car $\mathrm{supp}(\check{v}\star\phi) \subset \mathbb{R}^- + \mathrm{supp}(\phi)$ et donc $\mathrm{supp}(\psi\check{v}\star\phi)$ est compact. On vérifie que la convolution est alors associative et commutative. De plus, on voit immédiatement qui si $T, U \in \mathcal{D}_+'$, $\mathrm{Supp}(T*U) \subset \mathbb{R}^+$ : on a donc une algèbre.

2. Il suffit de faire le cacul :

$$\begin{aligned}
(\delta_0' - \lambda\delta_0) * (H(t)e^{\lambda t}) &= \delta_0' * (H(t)e^{\lambda t}) - \lambda\delta_0 * (H(t)e^{\lambda t}) \\
&= (\delta_0 * (H(t)e^{\lambda t}))' - \lambda(H(t)e^{\lambda t} \\
&= (H(t)e^{\lambda t})' - \lambda(H(t)e^{\lambda t} \\
&= \delta_0 e^{\lambda t} + \lambda H(t)e^{\lambda t} - \lambda(H(t)e^{\lambda t}.
\end{aligned}$$

Mais bien sûr, $\delta_0 e^{\lambda t} = \delta_0$.

3. On pour $n = 1$, c'est la question précédente. Ensuite, c'est une récurrence :

$$\begin{aligned}
(\delta_0' - \lambda\delta_0) * \left(H(t)\frac{t^{n-1}e^{\lambda t}}{(n-1)!}\right) &= \left(H(t)\frac{t^{n-1}e^{\lambda t}}{(n-1)!}\right)' - \lambda\left(H(t)\frac{t^{n-1}e^{\lambda t}}{(n-1)!}\right) \\
= \delta_0\frac{t^{n-1}e^{\lambda t}}{(n-1)!} + H(t)\frac{t^{n-2}e^{\lambda t}}{(n-2)!} &+ H(t)\lambda\frac{t^{n-1}e^{\lambda t}}{(n-1)!} - \lambda H(t)\frac{t^{n-1}e^{\lambda t}}{(n-1)!} = H(t)\frac{t^{n-2}e^{\lambda t}}{(n-2)!}.
\end{aligned}$$

Ce qui assure l'hérédité de la récurrence.

4. On considère l'EDO $\sum_k a_k y^{(k)}(t) = \delta_0$. Alors on peut réécrire l'équation $\sum_k a_k u^{(k)}(t) = \delta_0$ sous la forme :

$$\left(\sum_k a_k (-\delta_0')^{*k}\right) * u = \delta_0.$$

$\mathbb{C}$ est algébriquement clos, donc :

$$\sum_k a_k (-\delta_0')^{*k} = \bigstar_i (\delta' - \lambda_i \delta)^{n_i}.$$

On conclut donc que :

$$u = \left(\sum_k a_k (-\delta_0')^{*k}\right)^{*-1} = \bigstar_i \left(H(t) \frac{t^{n_i-1} e^{\lambda_i t}}{(n_i-1)!}\right).$$

$\star$

**Solution 3.** *Approximation de l'identité et convolution dans $L^p$*

1. Comme $\phi, \psi \in \mathcal{D}$, $y \mapsto |\phi(x-y)|^{1/p} |\psi(y)| \in L^p_y$ et :

$$|\phi(x-y)||\psi(y)| = |\phi(x-y)|^{1/p'} |\phi(x-y)|^{1/p} |\psi(y)|.$$

On intègre en $y$ et on applique Hölder :

$$\int |\phi(x-y)||\psi(y)| dy \leq \|\phi(x-\cdot)\|_{L^1}^{1/p'} \left(\int |\phi(x-y)||\psi(y)|^p dy\right)^{1/p}.$$

Bien sûr, $\|\phi(x-\cdot)\|_{L^1} = \|\phi\|_{L^1}$ et donc (par Fubini-Tonelli) :

$$\|\phi * \psi\|_{L^p}^p \leq \|\phi\|_{L^1}^{p/p'} \int \int |\phi(x-y)||\psi(y)|^p dy dx$$
$$= \|\phi\|_{L^1} p/p' \int \|\phi(\cdot - y)\|_{L^1_x} |\psi(y)|^p dy = \|\phi\|_{L^1}^p \|\psi\|_{L^p}^p.$$

Ce qu'il fallait démontrer.

2. Comme $\|\phi_m\|_{L^1} = 1$, et $\mathrm{Supp}(\phi_m) \subset B(0, 1/m)$ :

$$(\phi_m * f)(x) - f(x) = \int_{|y| \leq 1/m} m^n \phi(my)(f(x-y) - f(y)) dy.$$

Donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, |\phi_m * f)(x) - f(x)| \leq \sup_{y : |y-x| \leq 1/m} |f(x) - f(y)|.$$

Comme $f$ est continue, sur $K$ compact, elle est uniformément continue sur $\overline{K + B(0, 1/m)}$ compact et $\sup_{y \in \overline{K+B(0,1/m)} : |y-x| \leq 1/m} |f(x) - f(y)| \to 0$.

Maintenant, soit $\varepsilon > 0$ et $g \in C_c(\mathbb{R}^n)$ tel que $\|f - g\|_{L^p} < \varepsilon$. On vérifie que les calculs de 1. s'appliquent si on a seulement $\psi \in L^p$. Alors :

$$\|\phi_m * (f - g)\|_{L^p} \leq \|\phi_m\|_{L^1} \|f - g\|_{L^p} \leq \varepsilon.$$

Ensuite, vu que $\mathrm{Supp}(\phi_m * g) \subset \mathrm{Supp}(\phi_m) + \mathrm{Supp}(g) \subset B(0,1) + \mathrm{Supp}(g) = K$ (compact fixé), on a $\|\phi_m * g - g\|_{L^\infty} \to 0$ et donc $\|\phi_m * g - g\|_{L^p} = \|\phi_m * g - g\|_{L^p(K)} \to 0$). Finalement, pour $m$ assez grand :

$$\|\phi_m * f - f\|_{L^p} \leq \|\phi_m(f-g)\|_{L^p} + \|\phi_m * g - g\|_{L^p} + \|g - f\|_{L^p} \leq 3\varepsilon.$$

Et donc $\|\phi_m * f - f\|_{L^p} \to 0$. Pour $L^\infty$, il ne peut y avoir convergence (sur les compacts) que si $f$ est continue. Si $f \in C_0$, il y a convergence uniforme.

On voit facilement que $\phi_m * f$ est $C^\infty$ (dérivation sous le signe somme). Ensuite, soit $\chi \in \mathcal{D}(B(0,2)$ tel que $\chi|_{B(0,1)} = 1$. On pose $f_{n,m}(x) = \chi(x/n)(\phi_m * f)(x) \in \mathcal{D}$. Bien sur, pour tout $m$, $f_{n,m} \to \phi_m * f$ dans $L^p$, donc par un argument diagonal si on pose $f_m = f_{n(m),m}$ avec $n(m)$ tel que $\|f_{n(m),m} - \phi_m * f\|_{L^p} \leq 1/m$, on a que $f_m \to f$ dans $L^p$. Ainsi, $\mathcal{D}$ est dense dans $L^p$ (et $\overline{\mathcal{S}}^{L^\infty} = C_0$).

3. Soit $a$ tel que $p = aq'$. On a :

$$|\phi(x-y)||\psi(y)| = |\phi(x-y)|^a |\phi(x-y)|^{1-a} |\psi(y)|.$$

Et par Hölder :

$$\int |\phi(x-y)||\psi(y)|dy \leq \|\phi(x-\cdot)\|^a_{L^{aq'}} \left( \int |\phi(x-y)|^{(1-a)q} |\psi(y)|^q dy \right)^{1/q}.$$

On pose $\tilde{\psi} = \psi / \|\psi\|_{L^q}$, alors $\tilde{\psi}^q dy$ est une mesure de masse 1, donc on peut appliquer l'inégalité de Jensen (avec $x \mapsto x^{r/q}$ convexe car $q \leq r$) :

$$\left( \int |\phi(x-y)|^{(1-a)q} \frac{|\psi(y)|^q dy}{\|\psi\|^q_{L^q}} \right)^{r/q} \leq \int |\phi(x-y)|^{(1-a)r} \frac{|\psi(y)|^q dy}{\|\psi\|^q_{L^q}}.$$

Mais $p = aq'$ donc $a/p = 1 - 1/q$, $(1/p - a/p)r = 1$ et $(1-a)r = p$. Donc :

$$|\phi * \psi(x)|^r \leq \|\phi\|^{ar}_{L^p} \|\psi\|^{r-q}_{L^q} \int |\phi(x-y)|^p |\psi(y)|^q dy.$$

Enfin, en intégrant en $x$, avec Fubini-Tonelli :

$$\|\phi * \psi\|^r_{L^r} \leq \|\phi\|^{ar+p}_{L^p} \|\psi\|^{r-q+q}_{L^q} = \|\phi\|^r_{L^p} \|\psi\|^r_{L^q}.$$

On conclut par densité de $\mathcal{D}$ dans les espaces $L^p, L^q$ (avec la même estimée).

⋆

**Solution 4.** *Solution élémentaire du laplacien*

1. On calcule

$$\Delta(|x|^\alpha) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i}(a x_i |x|^{a-2}) = (Na + a(a-2))|x|^{a-2}.$$

2. Sur ${}^cB(0,\epsilon)$ on a $\Delta|x|^{2-N} = 0$ et donc pour tout $\phi \in \mathcal{D}$

$$0 = \int_{{}^cB(0,\epsilon)} \Delta(|x|^{2-N})\phi = \int_{{}^cB(0,\epsilon)} (\Delta\phi)|x|^{2-N} + \int_{\partial B(0,\epsilon)} (\phi \frac{\partial}{\partial n}|x|^{2-N} - |x|^{N-2} \frac{\partial}{\partial n}\phi).$$

En prenant la limite quand $\epsilon \longrightarrow 0$ on obtient

$$\int (\Delta\phi)|x|^{2-N} = lim_{\epsilon\longrightarrow 0}\int_{\partial B(0,\epsilon)} (\phi\frac{\partial}{\partial n}|x|^{2-N} - |x|^{N-2}\frac{\partial}{\partial n}\phi).$$

On conclut donc car au sens des distributions $< \Delta|x|^{2-N}, \phi >=< |x|^{2-N}, \Delta\phi >$.

3. On remarque

$$\int_{\partial B(0,\epsilon)} \phi\frac{\partial}{\partial n}|x|^{2-N} = (2-N)\int_{\partial B(0,\epsilon)} \phi|x|^{1-N} \longrightarrow (2-N)|\mathbb{S}^{N-1}|\phi(0)$$

$$\int_{\partial B(0,\epsilon)} |x|^{N-2}\frac{\partial}{\partial n}\phi \longrightarrow 0.$$

4. Si $f$ est une distribution à support compact, alors $|x|^{N-2} * f$ est bien définie comme convolution d'une distribution et d'une distribution à support compact et on a

$$-\Delta(|x|^{N-2} * f) = (-\Delta|x|^{N-2}) * f = (N-2)|\mathbb{S}^{N-1}|f,$$

donc $\frac{1}{(N-2)|\mathbb{S}^{N-1}|}|x|^{N-2} * f$ est solution de $-\Delta u = f$ au sens des distributions.

5. On raisonne comme dans les questions 1 et 2 en remarquant $\Delta ln(|x|) = 0$ sur $\mathbb{R}^2\backslash\{0\}$.

⋆

**Solution 5.** *Propriété de la moyenne*

1. On calcule

$$\begin{aligned} < f_k, \phi_{x,r} > &= \int \psi(\frac{\rho}{r}f_k(x+\rho\omega)\rho^{n-1}d\rho d\omega \\ &= \int \psi(\frac{\rho}{r})f_k(x)\rho^{n-1}d\rho d\omega \\ &= f_k(x)\|\phi_{x,r}\|_{L^1} \end{aligned}$$

En passant à la limite $k \longrightarrow \infty$ on obtient donc $f_k(x) \longrightarrow \frac{1}{\|\phi_{x,r}\|_{L^1}} < T, \phi_{x,r} >$ . La formule précédente nous dit que

$$T(x)\int \psi(\frac{\rho}{r})\rho^{n-1}d\omega d\rho = \int \psi(\frac{\rho}{r})\int T(x+\rho\omega)\rho^{n-1}d\omega d\rho.$$

On a donc, en notant $h(\rho) = \int T(x+\rho\omega)\rho^{n-1}d\omega$,

$$\int \psi(\frac{\rho}{r})(T(x)|\partial B(0,\rho)| - h(\rho))d\rho = 0.$$

Comme l'égalité est vraie pour tout $\psi \in \mathcal{D}(]0,1[)$, $T$ satisfait la propriété de la moyenne (on n'a pas besoin en raisonnant de cette manière d'avoir la convergence uniforme sur les compacts, dont je ne suis pas sûre).

2. On a que $f(x+th) = f(x) + tdf(x).h + \frac{t^2}{2}d^2f(x+\tau h)(h,h)$ avec $\tau \in ]0,t[$ (développement de Taylor-Lagrange, ordre 2). Maintenant, en fixant $t = 1$, comme $h \mapsto f(x)$ et $h \mapsto df(x).h$ vérifient la propriété de la moyenne, on a pour tout $r$ :

$$\frac{1}{|\partial B(0,r)|}\int d^2f(x+\tau(\sigma)\sigma)(\sigma,\sigma)d\sigma = 0.$$

Mais $d^2f(x+\tau(\sigma)\sigma) \to d^2f(x)$ uniformément quand $r \to 0$ (par continuité de $d^2f$, donc on a :

$$\int_{\partial B(0,r)} d^2f(x)(\sigma,\sigma)d\sigma = 0.$$

Il exsite une base orthonormale dans laquelle la matrice de $d^2f(x)$ est diagonale, $d^2f(x) = diag(a_1,\ldots,a_n)$. Dans cette base, l'égalité s'écrit, par homogéénité

$$0 = \int_{\|h\|=1} \sum_{i=1}^n a_i h_i^2 dh_i = \sum_{i=1}^n a_i \cdot \int_{\|h\|=1} h_1^2 dh_i = CTr(d^2f(x)).$$

Finalement, on trouve que $Tr(d^2f(x)) = \Delta f = 0$.

3. Soit $\phi_n$ une approximation de l'identité à support compact. On pose $f_n = \phi_n * f$. Alors $f_n$ est $\mathcal{C}^\infty$ et satisfait la propriété de la moyenne. En effet, on calcule pour $x = 0$

$$\frac{1}{|\partial B(0,r)|}\int f_n(s)ds = \frac{1}{|\partial B(0,r)|}\int\int \phi_n(y)f(s-y)dyds = \int \phi_n(y)f(s-y)dy = f(0).$$

On a donc d'après la question précedente $\Delta f_n = 0$ et donc pour tout $0 = \phi_n * \Delta f \longrightarrow \Delta f$ au sens des distributions, donc $\Delta f = 0$ au sens des distributions.

4. Soit donc $f \in \mathcal{C}^\infty$ tel que $\Delta f = 0$. On a alors

$$\begin{aligned}\int_{B(0,r)} f\Delta(|x|^2 - r) &= 2n\int f(x)\\ &= \int_{\partial B(0,r)} 2rfds - \int_{\partial B(0,r)} (|x|^2 - r^2)\partial_n f ds.\end{aligned}$$

On étudie ensuite la fonction $F : r \mapsto \frac{1}{|B(0,r)|} f dx$. Le calcul précédent nous donne $F'(r) = 0$ donc $F(r) = f(0)$. L'expression de $F'$ nous donne ensuite la propriété de la moyenne.

5. Soit maintenant $T \in qD'$ tel que $\Delta T = 0$ au sens des distributions.On a alors $\phi_n * T \in C^\infty$ et $\Delta(\phi_n * T) = \phi_n * \Delta T = 0$. Le calcul précédent nous dit donc que $\phi_n * T$ satisfait la propriété de la moyenne, $\phi_n * T \longrightarrow T$ au sens des distributions. Notons $f_n = \phi_n * T$.

$$\begin{aligned}< f_n, \phi_{x,r} > &= \int \psi(\frac{\rho}{r} f_n(x+\rho\omega)\rho^{n-1}d\rho d\omega\\ &= \int \psi(\frac{\rho}{r}) f_n(x)\rho^{n-1}d\rho d\omega\\ &= f_n(x)\|\phi_{x,r}\|_{L^1}\end{aligned}$$

En passant à la limite $n \longrightarrow \infty$ on obtient donc $f_n(x) \longrightarrow \frac{1}{\|\phi_{x,r}\|_{L^1}} < T, \phi_{x,r} >$ . La convergence est uniforme sur les compacts car $< f_n, \phi_{x,r} > = < T, \phi_n * \phi_{x,r} >$ et $\phi_n * \phi_{x,r}$ convege vers $\phi_{x,r}$ uniformément en $x$ pour chaque norme $\mathcal{C}^k$.

⋆