Correction Td n° 5 d'Analyse fonctionnelle

Espaces L^1 et L^∞

Séance du 9 mars 2012

Solution 1. *Théorème de représentation sur* $(L^1)'$

1. L'aplication $f \mapsto < \Phi, wf >$ est une forme linéaire continue sur L^2. Il existe donc $v \in L^2$ tel que $< \Phi, wf >= \int vf$ pour tout $f \in L^2$. On va poser $u = \frac{v}{w}$. On remarque que Φ et $f \mapsto \int uf$ coïncident sur les fonctions L^2 à support compact.

2. Mointrons que u est dans L^∞ avec $\|u\|_{L^\infty} \leq \|\Phi\|_{(L^1)'}$. Soit $C > \|\Phi\|_{(L^1)'}$. Notons $A = \{x \in \Omega, |u(x)| > C\}$. Montrons que A est négligeable. Pour cela on va montrer que $A \cap K$ est négligeable pour tout compact K. Comme $\operatorname{sgn}(u)\mathbb{1}_{A\cap K}$ est à support compact on a

$$< \Phi, \operatorname{sgn}(u)\mathbb{1}_{A\cap K} >= \int u \operatorname{sgn}(u)\mathbb{1}_{A\cap K} \geq \operatorname{mes}(A \cap K)C,$$

et de plus

$$< \Phi, \operatorname{sgn}(u)\mathbb{1}_{A\cap K} >\leq \|\Phi\|_{(L^1)'}\|\operatorname{sgn}(u)\mathbb{1}_{A\cap K}\|_{L^1} = \|\Phi\|_{(L^1)'} \operatorname{mes}(A \cap K),$$

donc $\operatorname{mes}(A \cap K) = 0$.

Comme $u \in {}^\infty$, $f \mapsto \int uf$ est une forme linéaire sur L^1, de norme inférieure ou égale à $\|u\|_{L^\infty}$. Φ et $f \mapsto \int uf$ sont donc des formes linéaires continues sur L^1 qui coïncident sur un sous espace dense, donc elles sont égales.

3. Soit $f : x_0 \in \Omega$. Considérons l'application $u \mapsto u(x_0)$ qui est définie sur $\mathcal{C}_c(\Omega)$, les fonctions continues à support compact. On a $u(x_0) \leq \|u\|_{L^\infty}$ donc d'après le théorème de Hahn Banach, on peut prolonger f en une forme linéaire continue sur L^∞. Supposons qu'il existe $g \in L^1$ telle que $< f, u >= \int gu$ pour tout $u \in L^\infty$. Alors pour toute donction continue à support compact dans $\Omega \setminus \{x_0\}$ on a $\int gu = 0$, donc $u = 0$ presque partout sur $\Omega \setminus \{x_0\}$ donc sur Ω.

⋆

Solution 2. L^∞ *n'est pas séparable*

1. Supposons E séparable. Soit $\{x_n\}$ dénombrable dense. Pour tout i, on choisit n_i tel que $x_{n_i} \in O_i$. L'application $i \in I \mapsto n_i$ est injective car $O_i \cap {}_j = \varnothing$ pour $i \neq j$. I est donc dénombrable : absurde.

2. Pour tout $a \in \Omega$, on fixe $r_a < \operatorname{dist}(a, {}^c\Omega)$. On considère la famille $O_a = \{f \in L^\infty, \|f - \mathbb{1}_{B(a,r_A)}\|_{L^\infty} < \frac{1}{3}\}$. Les O_A vérifient bien les hypothèses de la question précédente.

⋆

Solution 3. *Uniforme intégrabilité*

1. Si $\mathcal{F}$ est uniformément intégrable, soit $\epsilon > 0$ et $\delta > 0$ associé. Supposons que $\|f\|_1 \leq M$ pour tout $f \in \mathcal{F}$ et notons pour tout $a > 0$:

$$A_a = \{x, \inf_{f\in\mathcal{F}} |f|(x) \geq a\}.$$

On a $a\ mes(A_a) \leq \int_\Omega |f| \leq M$ pour tout $a > 0$ donc pour a assez grand on a $mes(A_a) \leq \delta$, ce qui implique que
$$\forall f \in \mathcal{F},\ \int_{A_a} |f| \leq \epsilon.$$
On en déduit
$$\sup_{f\in\mathcal{F}} \int_{\{|f|\geq a\}} |f| \leq \int_\Omega \sup_{f\in\mathcal{F}} 1_{\{|f|\geq a\}}|f| = \int_{A_a} |f| \leq \epsilon$$
donc (1) est vérifiée.

Si (1) est vérifiée, on a pour tout $a > 0$, $f \in \mathcal{F}$ et A mesurable,
$$\int_A |f| \leq a\ mes(A) + \int_{\{|f|\geq a\}\cap A} |f|.$$
Soit $\epsilon > 0$ et $a > 0$ tel que $\sup_{f\in\mathcal{F}} \int_{\{|f|\geq a\}} |f| \leq \epsilon/2$ et $\delta = \epsilon/(2a)$. On a alors si $mes(A) \leq \delta$,
$$\sup_{f\in\mathcal{F}} \int_A |f| \leq a\ mes(A) + \sup_{f\in\mathcal{F}} \int_{\{|f|\geq a\}\cap A} |f| \leq \epsilon.$$

2. Si une telle fonction g existe, soit $\epsilon > 0$ et a_0 telle que $|a|/g(|a|) \leq \epsilon$ si $|a| \geq a_0$. ALors pour tout $a > a_0$:
$$\sup_{f\in\mathcal{F}} \int_{\{|f|\geq a\}} |f| \leq \epsilon \sup_{f\in\mathcal{F}} \int_\Omega g(|f|).$$
On peut donc conclure par la caractérisation du 1..

Réciproquement, supposons que $\mathcal{F}$ est uniformément intégrable. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit a_n tel que
$$\sup_{f\in\mathcal{F}} \int_{\{|f|\geq a_n\}} |f| \leq \frac{1}{2^n}.$$
On peut supposer que $(a_n)_n$ est croissante. Posons
$$g(x) = \sum_n 1_{\{x\geq a_n\}}|x|.$$
Alors $g(|x|)/|x| = card\{n,\ a_n \leq |x|\} \to +\infty$ quand $|x| \to +\infty$. Enfin,
$$\sup_{f\in\mathcal{F}} \int_\Omega g(|f(x)|)dx < +\infty$$
est clair.

$\star$

Solution 4. *Théorème de Dunford-Pettis*

1. $\sup_n \int |f_n - f_n^k| = sup_n \int_{\{f_n\geq k\}} |f_n| \longrightarrow 0$ quand $k \longrightarrow \infty$.

2. Pour k fixé, la suite $(f_n^k)_n$ est bornée par k. On peut appliquer le théorème de Banach-Alaoglu sur la boule unité de L^∞ : on peut extraire une sous-suite de $f^k_{\phi_k(n)}$ qui converge pour la topologhie faible étoile $\sigma^*(L^\infty, L^1)$ (vers $f^k \in L^\infty$. Comme Ω est borné, on a $L^\infty(\Omega) \subset L^1(\Omega)$ donc $f^k_{\phi_k(n)}$ converge en fait pour la topologie faible $\sigma(L^1, L^\infty)$ et $f^k \in L^1$. Il faut faire attention à extraire les sous suites les unes des autres pour avoir pour tout $k \leq l$ $f^k_{\phi_l(n)}$ converge.

3. f^k est une suite croissante (pour tout $g > 0$ continue à qupport compact on a $\int (f^{k+1}_{\phi_{k+1}(n)} - f^k_{\phi_{k+1}(n)})g > 0$ donc en passant à la limite quand $n \longrightarrow \infty$ on obtient le résultat souhaité). De plus $\|f^k\|_{L^1} \leq \sup_n \|f_n\|_{L^1} < +\infty$, donc on peut appliquer le théorème de convergence monotone qui dit que f^K converge dans L^1 vers f.

4. Soit $g \in L^\infty$. Soit $\epsilon > 0$. On décompose

$$|\int (f_{\phi_n(n)} - f)g| = |\int (f_{\phi_n(n)} - f^k_{\phi_n(n)})g + \int (f^k_{\phi_n(n)} - f^k)g + \int (f^k - f)g|.$$

Soit k tel que $\|g\|_{L^\infty}(\sup_n \int |f_n - f^k_n|_{L^1} + \|f^k - f\|_{L^1}) \leq \frac{\epsilon}{2}$. On choisit alors n tel que $|\int (f^k_{\phi_n(n)} - f^k)g| \leq \frac{\epsilon}{2}$.

5. L'ensemble $\mathfrak{X}$ est fermé L^1 fort, car si une suite u_n de points de $\mathfrak{X}$ converge L^1 vers u, alors u est mesurable, et une sous-suite de u_n converge presque partout vers u. On voit facilement que u est à un ensemble négligeable près à valeurs dans $\{0, 1\}$. On voit aussi que les X_n sont fermés L^1 fort, par exemple en exploitant le fait que (f_n) est une partie bornée de L^1 et le théorème de convergence dominée.

6. On utilise alors le théorème de Baire sur $\mathfrak{X}$ (qui est complet comme fermé de L^1), puisque de toute évidence, $\mathfrak{X} = \cup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ (en utilisant la convergence L^1-faible de f_k vers f). Un X_n au moins est d'intérieur non vide ; il existe $E \subset [0, 1]$ et $\delta > 0$ tel que

$$|A| \leq \delta \Rightarrow \forall k \geq n,\ |\int_F (f_k - f)| \leq \varepsilon \text{ pour } F = E \cup A \text{ et } F = E \backslash A.$$

On en déduit facilement :

$$|A| \leq \delta \Rightarrow \forall k \geq n,\ |\int_A (f_k - f)| \leq 2\varepsilon,$$

Cela implique l'uniforme intégrabilité car A^+_k et A^-_k définis comme les sous-ensembles de A pour lesquels $f_k - f \geq 0$ (resp. $f_k - f < 0$) sont de mesure inférieure à $|A|$.

⋆

Solution 5. *Limite de produits*

1. La convergence presque partout implique que $\text{mes}(\cap_n E_n, k) = 0$ pour tout k. Pour tout k, il existe donc n_k tel que $\text{mes}(E_{n_k,k}) \leq \frac{\epsilon}{2^k}$. On a donc $\text{mes}(\cup_k E_{n_k,k}) \geq \epsilon$, et sur le complémentaire de $\cup_k E_{n_k,k}$, on a convergence uniforme.

2. Soit $\epsilon > 0$. Comme f_n converge faiblement dans $\sigma(L^1, L^\infty)$ d'après le théorème de Dunford-Petit, elle est équi intégrable. Soit donc δ tel que si $\text{mes}(B) \leq \delta$, $\int_B f_n \leq \epsilon$. Comme g_n converge presque partout, il existe A partie mesurable de Ω telle que $\text{mes}(\Omega \setminus A) \leq \delta$ et telle que sur A la convergence de g_n est uniforme. On écrit

$$\begin{aligned}\int |f_n g_n| &= \int_A |f_n g_n| + \int_{\Omega\backslash A} |f_n g_n| \\ &\leq (\sup_k \|f_k\|_{L^1})\|g_n\|_{L^\infty(A)} + (\sup_k \|g_k\|_{L^\infty})\epsilon.\end{aligned}$$

Pour n assez grand on a donc

$$\int |f_n g_n| \leq (\sup_k \|f_k\|_{L^1}) + (\sup_k \|g_k\|_{L^\infty})\epsilon.$$

⋆