Correction du Td n° 6 d'Analyse fonctionnelle

L'Équation de Hopf

Séance du 22 mars 2013

Solution 1. *Equation de conservation hyperbolique linéaire : méthode des caractéristiques*

1. Il est clair par le théorème de Cauchy-Lipschitz que X est bien définie pour tout (t, x) et est injective par rapport à x. Le théorème de dépendance par rapport à un paramètre nous donne que $X(t, \cdot)$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

On calcule son inverse de la façon suivante. Soit $y \in \mathbb{R}^n$ et $t \in \mathbb{R}$, soit Y la solution de

$$\begin{cases} \frac{\partial Y}{\partial t}(t, y) = f(t, Y(t, y)) \text{ dans } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \\ Y(t, y) = y \text{ dans } \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{1}$$

Alors par unicité, on a clairement $X(s, Y(0, y)) = Y(s, y)$ car ces deux fonctions de s vérifient la même équation et ont la même valeur en $s = 0$. Donc $X(t, \cdot)^{-1}(y) = Y(0, y)$ car $X(t, Y(0, y)) = y$. Les mêmes arguments que précédemment nous donne que $X(t, \cdot)^{-1}$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

2. On a

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, X(t, x)) = (\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla_x u \cdot \frac{\partial X}{\partial t})(t, X(t, x)) = 0.$$

Donc $u(t, X(t, x)$ ne dépend pas de t, ce qui donne la conclusion.

3. Une telle solution est nécessairement $u(t, x) = u_0(X(t, \cdot)^{-1}(x))$.

4. On vérifie que $\int v(s, t, x) ds$ est bien solution :

$$\begin{aligned} \partial_t \int_0^t v(s, t, x) ds &= v(t, t, x) + \int_0^t \partial_t v(s, t, x) ds \\ &= h(t, x) - \int_0^t f(t, x) \partial_x v(s, t, x) ds \\ &= h(t, x) - f(t, x) \partial_x \int_0^t v(s, t, x) ds. \end{aligned}$$

⋆

Solution 2. *Formulation cinétique pour l'équation de Hopf*

1. On commence par résoudre l'équation homogène

$$\partial_t f + v \partial_x f + \frac{1}{\varepsilon} f = 0, \quad f(0, x, v) = f_0.$$

La méthode des caractéristiques nous dit que la solution de l'équation de transport $\partial_t u - v \partial_x u = 0$, avec donnée initiale u_0 s'écrit $u_0(x - vt)$. On cherche donc f sous la forme $g(t) h(x - tv)$. On a alors

$$h'(t) g(x - tv) = -\frac{1}{\varepsilon} h(t) g(x - vt).$$

$f_0(x-vt)e^{-\frac{t}{\varepsilon}}$ est donc solution de l'équation homogène. Etant donné f, on peut ensuite obtenir la solution de

$$\partial_t g + v\partial_x g + \frac{1}{\varepsilon} g = \frac{1}{\varepsilon}\chi_f, \quad g(0,x,v) = 0,$$

à partir de la solution de l'équation homogène, en utilisant le principe de Duhamel.

2. Pour montrer que T est bormée et contractante, il suffit de remarquer que

$$\int \chi_f(s, x - v(t-s), v) dx dv = \int f(s,x,v) dx dv,$$

$$\int \chi_f(s,x,v) dv = \int f(s,x,v,) dv,$$

$$\int |\chi_f(s,x,v) - \chi_{\tilde{f}}(s,x,v)| dv \leq \int \mathbb{1}_{[\int f(s,x,u)du, \int \tilde{f}(s,x,u)du]} + \mathbb{1}_{[\int \tilde{f}(s,x,u)du, \int f(s,x,u)du]} dv$$
$$\leq |\int f(s,x,u)du - \int \tilde{f}(s,x,u)du| \leq \int |f(s,x,u) - \tilde{f}(s,x,u)| du.$$

Comme T est contractante, elle admet un unique point fixe.

3. f, point fixe de T peut être défini comme la limite de la suite f_n définie par $f_{n+1} = T(f_n)$. Supposons que $f_0 \leq \tilde{f}_0$. On peut alors montrer par récurrence que $f_n \leq \tilde{f}_n$ car

$$f \leq \tilde{f} \quad \Rightarrow \chi_f \leq \chi_{\tilde{f}}.$$

4. Pour montrer que f est à support compact en v, on peut montrer que T est contractante dans $L^\infty([0,\tau], L^\infty_x(L^1(\mathbb{R})))$. Si $f_0 \in L^1 \cap L^\infty$, on a alors

$$\|f\|_{L^\infty([0,\tau], L^\infty_x(L^1(\mathbb{R})))} \leq C(f_0)$$

donc χ_f est a support compact en v, inclus dans $[0, C(f_0)]$, donc f est à support compact en v. Notons V la borne supérieure de ce support. On peut ensuite montrer par récurrence sur les f_n que f est à support compact en x, inclus dans $\mathrm{supp}(f_0) + Vt$.

5. L'estimation se montre de la même manière que dans la borne $L^\infty([0,\tau], L^1(\mathbb{R}^2))$.

6. En intégrant l'équation par rapport à v, on obtient

$$\partial_t u_\varepsilon = -\int v \partial_x f_\varepsilon dv$$

et donc

$$|\partial_t u_\varepsilon|_{L^1_x} \leq V \sup_{h\in\mathbb{R}} \frac{1}{dx} \iint |f_\varepsilon(t, x+h, v) - f_\varepsilon(t,x,v)| dx dv$$

qui est borné d'après la question précédente car f_0 est C^1_c (V est la borne sup du support de f_ε en V, qui ne dépend pas de ε). En utilisant le théorème de Riesz-Fréchet-Kolmogorov et le théorème d'Ascoli, on obtient que les u_ε sont relativement compact dans $L^\infty([0,T], L^1_x)$.

7. On sait que $f_\varepsilon - \chi_{f_\varepsilon}$ tend vers 0 au sens des distributions. On calcule, pour $\phi \in \mathcal{D}$,

$$\int f_\varepsilon \partial_t \phi(x,t) dv dx dt + \int \partial_x \phi(x,t) (\int v f_\varepsilon dv) dx dt.$$

Or

$$\int \partial_x \phi(x,t) (\int v(f_\varepsilon - \chi_{f_\varepsilon} dv) dx dt \longrightarrow 0$$

et $\int \chi_{f_\varepsilon} v dv = (\int f_\varepsilon dv)^2 = u_\varepsilon^2$. Or u_ε converge fortement dans L^∞ (et est à support compact uniformément en x) donc $u_\varepsilon^2 \longrightarrow u^2$.

⋆