Correction Td n° 6 d'Analyse fonctionnelle

Transformation de Fourier

Séance du 30 mars 2012

Solution 1. *Quelques questions sur la transformée de Fourier*

1. $\mathbb{1}_A \in L^2$ donc $\widehat{\mathbb{1}_A} \in L^2$ par Plancherel. Par contre, si $\widehat{\mathbb{1}_A} \in L^1$, par inversion de Fourier, on aurait que $\mathbb{1}_A \in C$, ce qui est absurde.

2. La condition s'écrit en Fourier : $\hat{f}\hat{g} = 0$. Il suffit donc de prendre $f_1, g_1 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ avec disons $\mathrm{Supp}(f_1) \subset B(-2,1)$ et $\mathrm{Supp}(g_1) \subset B(-2,1)$ et de poser $f = \mathcal{F}^{-1}f_1$, $g = \mathcal{F}^{-1}g_1$ (et ce sont bien des éléments de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$).

Si on suppose de plus que les supports de f et g sont compacts, alors $\hat{f}$ et $\hat{g}$ sont analytiques. Comme les zéros de $\hat{f}$ et de $\hat{g}$ sont alors isolés (sauf si f ou g est nul), ceux de $\hat{f}\hat{g}$ le sont également et $\hat{f}\hat{g} \neq 0$. Par inversion de Fourier, on voit que $f * g \neq 0$.

3. En Fourier, on a $\sum_{i=1}^k a_i \xi^i \hat{u}(\xi) = 0$. Or $\hat{u}$ est analytique (pourquoi ?) donc par le principe des zéros isolés, $\hat{u} = 0$ et donc $u = 0$.

⋆

Solution 2. *Quelques questions sur les espaces de Sobolev H^s*

1. On remarque que $\hat{\delta}_0 = 1$, puis que $\int_{\mathbb{R}^d} (1+|\xi|^2)^s d\xi < +\infty$ ssi $s < -d/2$. Pour montrer l'injection de H^s dans $\mathcal{C}_0$, c'est dans la même veine : pour avoir le résultat on peut montrer que $\hat{u} \in L^1(\mathbb{R}^d)$ dès que $s > d/2$ et on conclut par le lemme de Riemann-Lebesgue.

2. Soit m l'ordre de u dans $\mathcal{E}'$. La T.F. de u est bien définie car $\mathcal{E}' \subset \mathcal{S}'$. On veut montrer qu'il existe $s \in \mathbb{R}$ pour lequel $\hat{u}(1+|\xi|^2)^{s/2} \in L^2$. On prend φ fonction test dans $\mathcal{S}$ et on évalue :

$$\begin{aligned}
\langle \hat{u}(1+|\xi|^2)^{s/2}, \varphi \rangle &= \langle \hat{u}, (1+|\xi|^2)^{s/2}\varphi \rangle \\
&= \langle u, \mathcal{F}\left((1+|\xi|^2)^{s/2}\varphi\right) \rangle \\
&\leq C \sup_{|\alpha|\leq m, x\in K} \left| \partial^\alpha \mathcal{F}\left((1+|\xi|^2)^{s/2}\varphi\right) \right| \\
&\leq C \int_{\mathbb{R}^d} (1+|\xi|^2)^{m/2}(1+|\xi|^2)^{s/2}\varphi d\xi \\
&\leq C \left(\int_{\mathbb{R}^d} (1+|\xi|^2)^m (1+|\xi|^2)^s d\xi \right)^{1/2} \|\varphi\|_{L^2}
\end{aligned}$$

(on a utilisé successivement des propriétés fondamentales de la transformée de Fourier, la définition d'une distribution à support compact et pour la dernière inégalité, c'est Cauchy-Schwarz). On conclut par densité de $\mathcal{S}$ dans L^2 et par dualité.

3. Il suffit de remarquer $(1+|\xi|^2)^{s_1} \geq (1+|\xi|^2)^{s_2}$ pour $s_1 \geq s_2$.

4. Par le théorème des accroissements finis (appliqué à $\exp(-i\cdot)$), on a :

$$|e^{-ix\xi} - e^{-iy\xi}| \leq |x\cdot\xi - y\cdot\xi| = |x-y||\xi|.$$

Et donc en interpolant, on a pour tout $\alpha \in [0,1]$:

$$|e^{-ix\xi} - e^{-iy\xi}| = |e^{-ix\xi} - e^{-iy\xi}|^{\alpha}|e^{-ix\xi} - e^{-iy\xi}|^{1-\alpha} \leq 2^{1-\alpha}|x-y|^{\alpha}|\xi|^{\alpha}.$$

On a alors :

$$u(x) - u(y) = C\int \hat{u}(\xi)\left(e^{-ix\xi} - e^{-iy\xi}\right)d\xi.$$

Donc, pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\begin{aligned}\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{\alpha}} &\leq \int |\xi|^{\alpha}|\hat{u}|(\xi)d\xi \\ &\leq \left(\int \frac{d\xi}{(1+|\xi|)^{d+\varepsilon}}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int (1+|\xi|)^{d+\varepsilon+2\alpha}|\hat{u}|^2(\xi)d\xi\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C(\varepsilon)\|u\|_{H^{\frac{d+\varepsilon}{2}+\alpha}}.\end{aligned}$$

Donc finalement, pour tout $\alpha \in]0, s-d/2[$, on a (avec $\varepsilon = 2s - d - \alpha > 0$) :

$$\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{\alpha}} \leq C(\alpha)\|u\|_{H^s}.$$

Enfin,

$$\begin{aligned}|u(x)| = \left|\int \hat{u}(\xi)e^{ix\xi}d\xi\right| &\leq \int |\hat{u}|(\xi)d\xi \leq \int |\hat{u}|(\xi)\frac{(1+|\xi|^2)^{s/2}}{(1+|\xi|^2)^{s/2}}d\xi \\ &\leq \left(\int |\hat{u}|^2(\xi)(1+|\xi|^2)^s d\xi\right)^{1/2}\left(\int \frac{d\xi}{(1+|\xi|^2)^s}\right)^{1/2} \leq C(s)\|u\|_{H^s}.\end{aligned}$$

car $s > d/2$ donc $1/(1+|\xi|^2)^s \in L^1(d\xi)$. Finalement,

$$\|u\|_{L^{\infty}} + \sup_{x\neq y}\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{\alpha}} \leq C(\alpha)\|u\|_{H^s}.$$

Par densité, on conclut que $H^s \subset C^{\alpha}$ avec injection continue.

⋆

Solution 3. *Transformée de Fourier de vpx*

1. Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$:

$$< x\,\mathrm{vp}\,x, \varphi > = < \mathrm{vp}\,x, x\varphi > = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|\geq\varepsilon}\varphi(x)dx = \int_{\mathbb{R}}\varphi(x)dx = < 1, \varphi > .$$

Donc $x\,\mathrm{vp}\,x \equiv 1$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

2. Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a par définition de la transformée de Fourier des distributions :

$$\begin{aligned}< \mathcal{F}(\mathrm{vp}\,x), \varphi^v > &= < \mathrm{vp}\,x, \mathcal{F}(\varphi^v) > \\ &= < \mathrm{vp}\,x, (\mathcal{F}(\varphi))^v > \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{\mathcal{F}(\varphi)(-\xi)}{\xi}d\xi + \int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{\mathcal{F}(\varphi)(-\xi)}{\xi}d\xi \\ &= -< \mathrm{vp}\,x, \mathcal{F}(\varphi) > .\end{aligned}$$

3. D'après la question 1, on a, comme $\mathcal{F}(1) = 2\pi\delta_0$:

$$2\pi\delta_0 = \mathcal{F}(x\,\mathrm{vp}\,x) = i\mathcal{F}(\mathrm{vp}\,x)',$$

donc $\mathcal{F}(\operatorname{vp} x)' = -2\pi\delta_0$; on en déduit que $\mathcal{F}(\operatorname{vp} x) = -2\pi(H + C)$, où H est la fonction de Heavyside et C est une constante. L'imparité donne $C = -1/2$; D'où :

$$\mathcal{F}(\operatorname{vp} x)(\xi) = -i\pi \frac{\xi}{|\xi|}.$$

⋆

Solution 4. *Formule sommatoire de Poisson*

1. La continuité et la périodicité sont claires par théorème de convergence dominée via l'hypothèse $|f(x)| \leq \frac{C}{1+x^2}$. Soit c_m sont m-ieme coefficient :

$$\begin{array}{rcl} c_m & = & \frac{1}{a}\int_0^a \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+na)e^{-\frac{2i\pi mx}{a}}dx \\ & = & \frac{1}{a}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_0^a f(x+na)e^{-\frac{2i\pi mx}{a}}dx \\ & = & \frac{1}{a}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{na}^{(n+1)a} f(x)e^{-\frac{2i\pi m(x-na)}{a}}dx \\ & = & \frac{1}{a}\hat{f}(\frac{2\pi m}{a}). \end{array}$$

2. Comme f' et f'' sont intégrables, $(1+\xi^2)\hat{f}(\xi)$ est bornée. Donc la série des $(c_m)_m$ est convergente. On obtient donc

$$S(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{\frac{2i\pi mx}{a}},$$

ce qui donne la conclusion.

3. On applique la formule sommatoire de Poisson en $x = 0$ à $a = 1$ et à la fonction $f(y) = e^{-x\pi y^2}$, qui vérifie bien les hypothèses. Comme $\hat{f}(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{x}}e^{-\frac{\xi^2}{4\pi x}}$, on trouve :

$$\Theta(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{f}(2\pi m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{\pi}{\pi x}}e^{-\frac{4\pi^2 m^2}{4\pi x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}\Theta(\frac{1}{x}).$$

4. On écrit $\hat{f} = \hat{f}1_{[-F,F]}$ et on pose $a = \frac{2\pi}{F}$. Rappelons que $\bar{\mathcal{F}}(1_{[-F,F]})(x) = sinc(Fx)$. On fixe $\omega \in (-F, F)$ et on applique la formule de Poisson à $h(x) = f(x)e^{-ix\omega}$, de tranformée de Fourier $\hat{h}(\xi) = \hat{f}(x+\omega)$:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(nT)e^{-inT\omega} = \frac{1}{T}\sum_{m\in\mathbb{Z}} \hat{f}(\omega + 2mF) = \frac{1}{T}\hat{f}(\omega).$$

On multiplie cette équation par $1_{[-F,F]}(\omega)$. On peut conclure en prenant la transformation de Fourier inverse.

⋆