Correction du Td n° 7 d'Analyse fonctionnelle

Transformation de Fourier

Séance du 29 mars 2013

Solution 1. *Quelques questions sur la transformée de Fourier*

1. $\mathbb{1}_A \in L^2$ donc $\widehat{\mathbb{1}_A} \in L^2$ par Plancherel. Par contre, si $\widehat{\mathbb{1}_A} \in L^1$, par inversion de Fourier, on aurait que $\mathbb{1}_A \in C$, ce qui est absurde.

2. La condition s'écrit en Fourier : $\hat{f}\hat{g} = 0$. Il suffit donc de prendre $f_1, g_1 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ avec Supp(f_1) et Supp(g_1) et de poser $f = \mathcal{F}^{-1}f_1$, $g = \mathcal{F}^{-1}g_1$ (et ce sont bien des éléments de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$).

Si on suppose de plus que les supports de f et g sont compacts, alors $\hat{f}$ et $\hat{g}$ sont analytiques. Comme les zéros de $\hat{f}$ et de $\hat{g}$ sont alors isolés (sauf si f ou g est nul), ceux de $\hat{f}\hat{g}$ le sont également et $\hat{f}\hat{g} \neq 0$. Par inversion de Fourier, on voit que $f * g \neq 0$.

3. En Fourier, on a $\sum_{i=1}^k a_i \xi^i \hat{u}(\xi) = 0$. Or $\hat{u}$ est analytique (pourquoi ?) donc par le principe des zéros isolés, $\hat{u} = 0$ et donc $u = 0$.

⋆

Solution 2. *Transformée de Fourier de vpx*

1. Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$:

$$< x \,\mathrm{vp}\, x, \varphi > = < \mathrm{vp}\, x, x\varphi > = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \varphi(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)dx = < 1, \varphi > .$$

Donc $x \,\mathrm{vp}\, x \equiv 1$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

2. Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a par définition de la transformée de Fourier des distributions :

$$\begin{aligned} < \mathcal{F}(\mathrm{vp}\, x), \varphi^v > &= < \mathrm{vp}\, x, \mathcal{F}(\varphi^v) > \\ &= < \mathrm{vp}\, x, (\mathcal{F}(\varphi))^v > \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \tfrac{\mathcal{F}(\varphi)(-\xi)}{\xi} d\xi + \int_{\varepsilon}^{\infty} \tfrac{\mathcal{F}(\varphi)(-\xi)}{\xi} d\xi \\ &= - < \mathrm{vp}\, x, \mathcal{F}(\varphi) > . \end{aligned}$$

3. D'après la question 1, on a, comme $\mathcal{F}(1) = 2\pi\delta_0$:

$$2\pi\delta_0 = \mathcal{F}(x \,\mathrm{vp}\, x) = i\mathcal{F}(\mathrm{vp}\, x)',$$

donc $\mathcal{F}(\mathrm{vp}\, x)' = -2\pi\delta_0$; on en déduit que $\mathcal{F}(\mathrm{vp}\, x) = -2\pi(H + C)$, où H est la fonction de Heavyside et C est une constante. L'imparité donne $C = -1/2$; D'où :

$$\mathcal{F}(\mathrm{vp}\, x)(\xi) = -i\pi \frac{\xi}{|\xi|}.$$

⋆

Solution 3. *Formule sommatoire de Poisson*

1. La continuité et la périodicité sont claires par théorème de convergence dominée via l'hypothèse $|f(x)| \leq \frac{C}{1+x^2}$. Soit c_m sont m-ieme coefficient :

$$\begin{array}{rcl} c_m & = & \frac{1}{a}\int_0^a \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+na)e^{-\frac{2i\pi mx}{a}}dx \\ & = & \frac{1}{a}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_0^a f(x+na)e^{-\frac{2i\pi mx}{a}}dx \\ & = & \frac{1}{a}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{na}^{(n+1)a} f(x)e^{-\frac{2i\pi m(x-na)}{a}}dx \\ & = & \frac{1}{a}\hat{f}(\frac{2\pi m}{a}). \end{array}$$

2. Comme f' et f'' sont intégrables, $(1+\xi^2)\hat{f}(\xi)$ est bornée. Donc la série des $(c_m)_m$ est convergente. On obtient donc

$$S(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{\frac{2i\pi mx}{a}},$$

ce qui donne la conclusion.

3. On applique la formule sommatoire de Poisson en $x=0$ à $a=1$ et à la fonction $f(y)=e^{-x\pi y^2}$, qui vérifie bien les hypothèses. Comme $\hat{f}(\xi)=\sqrt{\frac{\pi}{x}}e^{-\frac{\xi^2}{4\pi x}}$, on trouve :

$$\Theta(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty}\hat{f}(2\pi m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty}\sqrt{\frac{\pi}{\pi x}}e^{-\frac{4\pi^2 m^2}{4\pi x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}\Theta(\frac{1}{x}).$$

4. On écrit $\hat{f}=\hat{f}1_{[-F,F]}$ et on pose $a=\frac{2\pi}{F}$. Rappelons que $\bar{\mathcal{F}}(1_{[-F,F]})(x) = sinc(Fx)$. On fixe $\omega \in (-F,F)$ et on applique la formule de Poisson à $h(x)=f(x)e^{-ix\omega}$, de tranformée de Fourier $\hat{h}(\xi)=\hat{f}(x+\omega)$:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(nT)e^{-inT\omega} = \frac{1}{T}\sum_{m\in\mathbb{Z}}\hat{f}(\omega+2mF) = \frac{1}{T}\hat{f}(\omega).$$

On multiplie cette équation par $1_{[-F,F]}(\omega)$. On peut conclure en prenant la transformation de Fourier inverse.

⋆

Solution 4. *Théorème de Paley-Wiener*

1. Si T est une distribution à support compact, on peut écrire $\mathcal{F}(T)(\xi) = < T, e^{-ix\xi} >$. $\mathcal{F}(T)$ est donc analytique.

2. Pour $\xi \neq 0$, on a

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi}f(x)dx = \int m\mathbb{R}\frac{1}{(-i\xi)^N}e^{-ix\xi}\partial_x^N f(x)dx,$$

donc $|F(x)| \leq |\xi|^{-N}e^{R|Im(\xi)}$.

3. La borne sur F permet d'utiliser le théorème de convergence dominée pour conclure.

4. On intègre $e^{ix\xi}F(\xi)$ sur un contour rectangulaire

$$\int_{-A}^{A} e^{ix\xi}F(\xi)d\xi + \int_0^{\eta} e^{ix(A+i\rho)}F(\xi+i\rho)d\rho + \int_A^{-A} e^{ix(\xi+i\eta)}F(\xi+i\eta)d\xi + \int_{\eta}^{\rho} e^{ix(-A+i\rho)}F(\xi+i\rho)d\rho = 0$$

En passant à la limite quand A tend vers ∞, grâce aux bornes sur F, on obtient

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{ix(\xi+i\eta)} F(\xi + i\eta) d\xi.$$

donc $|f(x)| \leq Ce^{R\eta - x\eta}$. Si on choisit $\eta > 0$ qui tend vers $+\infty$, alors pour $R < x$, on obtient $f(x) = 0$. On fait de même pour $x < -R$ avec $\eta < 0$.

5. Soit T est une distribution à support compact, on note p son ordre.

$$|\mathcal{F}(T)(\xi)| = | < T, e^{-ix\xi} > | \leq C \sum_{k=1}^{p} \|\partial^k e^{-ix\xi}\| \leq C(1 + |\xi|^p).$$

Réciproquement, soit F, analytique, satisfait une telle condition. Alors $F \in \mathcal{S}'$. Soit $\rho_k(x) = k\rho(kx)$ une approximation de l'unité. Comme ρ_k est à support compact, $\widehat{\rho_k}$ satisfait les conditions de la question 2, donc $\widehat{\rho_k} F$ aussi, donc $\rho_k * \mathcal{F}^{-1}(F)$ est C^∞ à support dans $B(0, R)$. Soit $g \in \mathcal{D}({}^c\bar{B}(0, R))$. On a alors

$$0 =< \rho_k * \mathcal{F}^{-1}(F), g >=< \mathcal{F}^{-1}(F), \rho_k * g > \longrightarrow < \mathcal{F}^{-1}(F), g >$$

donc $\mathcal{F}^{-1}(F)$ est à support dans $B(0, R)$.

⋆