Correction du Td n° 8 d'Analyse fonctionnelle

Transformation de Fourier

Séance du 29 mars 2013

Solution 1. *Quelques questions sur les espaces de Sobolev H^s*

1. On remarque que $\hat{\delta}_0 = 1$, puis que $\int_{\mathbb{R}^d}(1+|\xi|^2)^s d\xi < +\infty$ ssi $s < -d/2$. Pour montrer l'injection de H^s dans $\mathcal{C}_0$, c'est dans la même veine : pour avoir le résultat on peut montrer que $\hat{u} \in L^1(\mathbb{R}^d)$ dès que $s > d/2$ et on conclut par le lemme de Riemann-Lebesgue.

2. Soit m l'ordre de u dans $\mathcal{E}'$. La T.F. de u est bien définie car $\mathcal{E}' \subset \mathcal{S}'$. On veut montrer qu'il existe $s \in \mathbb{R}$ pour lequel $\hat{u}(1+|\xi|^2)^{s/2} \in L^2$. On prend φ fonction test dans $\mathcal{S}$ et on évalue :

$$\begin{aligned}
\langle \hat{u}(1+|\xi|^2)^{s/2}, \varphi\rangle &= \langle \hat{u}, (1+|\xi|^2)^{s/2}\varphi\rangle \\
&= \langle u, \mathcal{F}\left((1+|\xi|^2)^{s/2}\varphi\right)\rangle \\
&\leq C \sup_{|\alpha|\leq m, x\in K} \left|\partial^\alpha \mathcal{F}\left((1+|\xi|^2)^{s/2}\varphi\right)\right| \\
&\leq C \int_{\mathbb{R}^d} (1+|\xi|^2)^{m/2}(1+|\xi|^2)^{s/2}\varphi d\xi \\
&\leq C \left(\int_{\mathbb{R}^d}(1+|\xi|^2)^m (1+|\xi|^2)^s d\xi\right)^{1/2} \|\varphi\|_{L^2}
\end{aligned}$$

(on a utilisé successivement des propriétés fondamentales de la transformée de Fourier, la définition d'une distribution à support compact et pour la dernière inégalité, c'est Cauchy-Schwarz). On conclut par densité de $\mathcal{S}$ dans L^2 et par dualité.

3. Il suffit de remarquer $(1+|\xi|^2)^{s_1} \geq (1+|\xi|^2)^{s_2}$ pour $s_1 \geq s_2$.

4. Par le théorème des accroissements finis (appliqué à $\exp(-i\cdot)$), on a :

$$|e^{-ix\xi} - e^{-iy\xi}| \leq |x\cdot\xi - y\cdot\xi| = |x-y||\xi|.$$

Et donc en interpolant, on a pour tout $\alpha \in [0,1]$:

$$|e^{-ix\xi} - e^{-iy\xi}| = |e^{-ix\xi} - e^{-iy\xi}|^\alpha |e^{-ix\xi} - e^{-iy\xi}|^{1-\alpha} \leq 2^{1-\alpha}|x-y|^\alpha |\xi|^\alpha.$$

On a alors :

$$u(x) - u(y) = C\int \hat{u}(\xi)\left(e^{-ix\xi} - e^{-iy\xi}\right) d\xi.$$

Donc, pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\begin{aligned}
\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha} &\leq \int |\xi|^\alpha |\hat{u}|(\xi) d\xi \\
&\leq \left(\int \frac{d\xi}{(1+|\xi|)^{d+\varepsilon}}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int (1+|\xi|)^{d+\varepsilon+2\alpha}|\hat{u}|^2(\xi)d\xi\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C(\varepsilon)\|u\|_{H^{\frac{d+\varepsilon}{2}+\alpha}}.
\end{aligned}$$

Donc finalement, pour tout $\alpha \in]0, s - d/2[$, on a (avec $\varepsilon = 2s - d - \alpha > 0$) :

$$\frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha} \leq C(\alpha)\|u\|_{H^s}.$$

Enfin,

$$|u(x)| = \left| \int \hat{u}(\xi) e^{ix\xi} d\xi \right| \leq \int |\hat{u}|(\xi) d\xi \leq \int |\hat{u}|(\xi) \frac{(1 + |\xi|^2)^{s/2}}{(1 + |\xi|^2)^{s/2}} d\xi$$
$$\leq \left(\int |\hat{u}|^2(\xi)(1 + |\xi|^2)^s d\xi \right)^{1/2} \left(\int \frac{d\xi}{(1 + |\xi|^2)^s} \right)^{1/2} \leq C(s)\|u\|_{H^s}.$$

car $s > d/2$ donc $1/(1 + |\xi|^2)^s \in L^1(d\xi)$. Finalement,

$$\|u\|_{L^\infty} + \sup_{x \neq y} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha} \leq C(\alpha)\|u\|_{H^s}.$$

Par densité, on conclut que $H^s \subset C^\alpha$ avec injection continue.

⋆

Solution 2.

1. On considère la transformation de Fourier en x de l'équation et on se ramène à chercher une solution $t \mapsto \hat{u}(t, \xi)$ de l'équation différentielle ordinaire :

$$\begin{cases} \partial_{tt}^2 \hat{u} + |\xi|^2 \hat{u} = 0 \text{ dans } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N, \\ \hat{u}(0, \cdot) = \hat{u}_0, \ \partial_t \hat{u}(0, \cdot) = \hat{u}_1 \text{ dans } \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{1}$$

L'unique solution de cette équation est

$$\hat{u}(t, \xi) = \cos(t|\xi|)\hat{u}_0(\xi) + \frac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|}\hat{u}_1(\xi),$$

On en déduit l'unique solution par inversion de Fourier. En dimensions 1, on peut faire un calcul plus explicite et on retrouve la formule dite de d'Alembert.

2. Comme $\operatorname{Supp} \widehat{f} \subset \{\xi, 1 \leq |\xi| \leq 2\}$, on peut écrire $\widehat{f} = \chi \widehat{f}$ avec χ radiale telle que $\chi(\xi) = 0$ pour $|\xi| \leq \frac{1}{2}$ et $|\xi| \geq 3$, et $\chi(\xi) = 1$ pour $1 \leq |\xi| \leq 2$. On a donc

$$\mathcal{F}^{-1}(e^{it|\xi|}\widehat{f}) = \mathcal{F}^{-1}(e^{it|\xi|}\widehat{f}\chi) = f * \mathcal{F}^{-1}(e^{it|\xi|}\chi(\xi)).$$

3. Pour $|x| \leq \frac{t}{2}$ et $|x| \geq 2t$, on écrit

$$e^{ix.\xi - it|\xi|} = \frac{1}{|x + t\frac{\xi}{|\xi|}|^2} \sum_{i=1}^N (ix_i - it\frac{\xi}{|\xi|})\partial_{\xi_i} e^{ix.\xi - it|\xi|} = \frac{1}{t} \frac{1}{|\frac{x}{t} + \frac{\xi}{|\xi|}|^2} \sum_{i=1}^N (i\frac{x_i}{t} - i\frac{\xi}{|\xi|})\partial_{\xi_i} e^{ix.\xi - it|\xi|}.$$

On peut ensuite intégrer par partie et itérer le processus autant de fois que l'on veut.

Pour $\frac{t}{2} \leq |x| \leq 2t$, on écrit

$$\begin{aligned} \int e^{ix.\xi - it|\xi|}\chi(\xi) d\xi &= \int_{\frac{1}{2}}^3 \chi(\lambda) e^{-it\lambda} \int_{|\xi|=\lambda} e^{ix.\xi} d\sigma \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^3 \chi(\lambda) e^{-it\lambda} \int_{|\xi|=\lambda} e^{i|x|\xi_1} d\sigma \\ &= C_N \int_{\frac{1}{2}}^3 \chi(\lambda) e^{-it\lambda} \int_{-\lambda}^{\lambda} e^{i|x|\xi_1} \sqrt{\lambda^2 - \xi_1^2}^{N-2} d\xi_1 \end{aligned}$$

En écrivant $e^{i|x|\xi_1} = \frac{1}{i|x|}\partial_{\xi_1} e^{i|x|\xi_1}$, on voit que l'on peut faire $\frac{N-1}{2}$ intégrations par parties, sans créer de terme de bord. Comme $|x| \sim t$, on obtient l'estimation voulue.

$\star$