

Correction Td n° 8 d'Analyse fonctionnelle

TRANSFORMATION DE RIESZ ET ESPACES L^p FAIBLES

Séance du 13 avril 2012

Solution 1. *Théorème de Marcinkiewicz*

1. On a :

$$\begin{aligned}
 p \int_0^\infty \lambda^{p-1} \mu\{x \mid |f(x)| \geq \lambda\} d\lambda &= \int_0^\infty \int_\Omega p \lambda^{p-1} 1_{x \mid |f(x)| \geq \lambda} dx d\lambda \\
 &= \int_\Omega \int_0^\infty p \lambda^{p-1} 1_{x \mid |f(x)| \geq \lambda} d\lambda dx \text{ par le théorème de Fubini,} \\
 &= \int_\Omega \int_0^{|f(x)|} p \lambda^{p-1} d\lambda dx, \\
 &= \int_\Omega |f(x)|^p dx = \|f\|_p^p.
 \end{aligned} \tag{1}$$

On en déduit pour tout $\lambda_0 > 0$:

$$\begin{aligned}
 p \int_0^\infty \lambda^{p-1} \mu\{x \mid |f(x)| \geq \lambda\} d\lambda &\geq p \int_0^{\lambda_0} \lambda^{p-1} \mu\{x \mid |f(x)| \geq \lambda\} d\lambda \\
 &\geq \mu\{x \mid |f(x)| \geq \lambda_0\} p \int_0^{\lambda_0} \lambda^{p-1} d\lambda = \mu\{x \mid |f(x)| \geq \lambda_0\} \lambda_0^p.
 \end{aligned} \tag{2}$$

En passant au sup on obtient l'inégalité recherchée.

2. $|Tf(x)| \geq \lambda$ implique $|Tg_\lambda(x)| \geq \lambda/2$ ou $|Th_\lambda(x)| \geq \lambda/2$, d'où la conclusion par sous-additivité de la mesure.

3. En appliquant 1. et 2., on obtient :

$$\begin{aligned}
 \|Tf\|_p^p &= p \int_0^\infty \lambda^{p-1} \mu\{x \mid |Tf(x)| \geq \lambda\} d\lambda \\
 &\leq p \int_0^\infty \lambda^{p-1} (\mu\{x \mid |Tg_\lambda(x)| \geq \lambda/2\} + \mu\{x \mid |Th_\lambda(x)| \geq \lambda/2\}) d\lambda.
 \end{aligned} \tag{3}$$

Or, par construction, $h_\lambda \in L^q(\Omega)$ et $g_\lambda \in L^p(\Omega)$, donc comme T est de type (p, p) faible et (q, q) faible, on en déduit :

$$\begin{aligned}
 \|Tf\|_r^r &= r \int_0^\infty \lambda^{r-1} \mu\{x \mid |Tf(x)| \geq \lambda\} d\lambda, \\
 &\leq r \int_0^\infty \lambda^{r-1} [Tg_\lambda]_p^p (\frac{\lambda}{2})^{-p} d\lambda + r \int_0^\infty \lambda^{r-1} [Th_\lambda]_q^q (\frac{\lambda}{2})^{-q} d\lambda, \\
 &\leq C \int_0^\infty \lambda^{r-1-p} [Tg_\lambda]_p^p d\lambda + C \int_0^\infty \lambda^{r-1-q} [Th_\lambda]_q^q d\lambda,
 \end{aligned} \tag{4}$$

ici C ne dépend que de r, p, q .

4. Comme T est (p, p) -faible et (q, q) -faible, on déduit du 3. que :

$$\begin{aligned}
 \|Tf\|_r^r &\leq CC_p \int_0^\infty \lambda^{r-1-p} \|g_\lambda\|_p^p d\lambda + CC_q \int_0^\infty \lambda^{r-1-q} \|h_\lambda\|_q^q d\lambda \\
 &\leq CC_p \int_0^\infty \int_\Omega \lambda^{r-1-p} |f|^{p-1} 1_{\{|f| \geq \lambda a\}} d\lambda dx + CC_q \int_0^\infty \int_\Omega \lambda^{r-1-q} |f|^{q-1} 1_{\{|f| \leq \lambda a\}} d\lambda dx \\
 &\leq CC_p \int_\Omega \frac{1}{r-p} \left(\frac{|f|}{a}\right)^{r-p} |f|^p dx + CC_q \int_\Omega \frac{1}{q-r} \left(\frac{|f|}{a}\right)^{r-q} |f|^q dx \\
 &\leq CC_p \frac{1}{(r-p)a^{r-p}} \|f\|_r^r + CC_q \frac{a^{q-r}}{(q-r)} \|f\|_r^r,
 \end{aligned} \tag{5}$$

où C est la constante du 3. et C_p et C_q sont les constantes de continuité (p, p) et (q, q) . Ceci donne la conclusion.

★

Solution 2. *Autour de la fonction maximale de Lebesgue*

1. Il existe un ouvert borné ω tel que $c < |\omega|$ et $\bar{\omega} \subset \Omega$. Comme $\bar{\omega}$ est compact, on peut considérer A_1, \dots, A_m un recouvrement fini de ω par des boules de \mathcal{B} . Parmi ces boules, on choisit une boule B_1 de rayon maximal. On choisit ensuite les autres boules comme suit : parmi les boules A_n qui ne rencontrent pas $B_1 \cup \dots \cup B_j$, on choisit une boule B_{j+1} de rayon maximal. On arrête le processus dès que toutes les boules de A_n rencontrent $B_1 \cup \dots \cup B_k$.

On a obtenu une suite finie B_1, \dots, B_k . Si une boule A_n n'appartient pas à cette suite, il existe B_j qui rencontre A_n et dont le rayon est supérieur à celui de A_n . Notons C_j la boule concentrique à B_j dont le rayon est trois fois celui de B_j . Alors (faire un dessin pour s'en convaincre), $A_n \subset C_j$. Bien entendu, on a également $B_j \subset C_j$. On a donc :

$$c < |\omega| \leq \sum_{i=1}^m |A_i| \leq \sum_{j=1}^k |C_j| = 3^n \sum_{j=1}^k |B_j|$$

2. Par le théorème de convergence dominée, la fonction définie par :

$$r, x \mapsto M_r |f|(x)$$

est continue. Alors $Mf(x) = \sup_{r>0, r \in \mathbb{Q}} M_r |f|(x)$ est mesurable.

3. Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Considérons l'ensemble S défini par :

$$S := \{x \in \mathbb{R}^n, \quad Mf(x) > \lambda\}$$

Soit $a < 1$. Pour chaque x dans S , il existe un rayon $r_x > 0$ tel que $M_{r_x} |f|(x) > a\lambda$. Soit $c < |S|$. D'après le lemme de recouvrement de Vitali, il existe des points $x_1, \dots, x_k \in S$ tel que les boules $B_j := B(x_j, r_{x_j})$ sont disjointes et vérifient $c < 3^n \sum_{j=1}^k |B_j|$. On en déduit :

$$c < 3^n \sum_{j=1}^k |B_j| \leq \frac{3^n}{a\lambda} \sum_{j=1}^k \int_{|y-x_j| < r_{x_j}} |f(y)| dy \leq \frac{3^n}{a\lambda} \|f\|_{L^1}$$

Ceci étant vrai pour tout $c < |S|$ (et pour tout $a < 1$), on obtient :

$$\lambda |S| \leq 3^n \|f\|_{L^1}$$

i.e. $[Mf]_1 \leq 3^n \|f\|_{L^1}$.

D'autre part, il est clair que

$$[Mf]_\infty \leq \|f\|_{L^\infty}$$

Donc par le théorème de Marcikiewicz, M est de type (p, p) -fort pour tout $1 < p < +\infty$.

4. Pour commencer remarquons que la propriété recherchée est locale. Il suffit de prouver que pour tout $k \in \mathbb{N}$, la relation a lieu presque partout sur $B(0, k)$. En considérant $0 < r < 1$, on peut annuler f en dehors de $B(0, k+1)$ et supposer que $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Soit $\epsilon > 0$. Par densité des fonction continues à support compact dans L^1 , il existe $u \in C_c$ avec :

$$\|f - u\|_{L^1} \leq \epsilon$$

Il est clair que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} M_r u(x) = u(x)$$

D'autre part d'après la question précédente (théorème maximal),

$$[M(f - u)]_1 \leq 3^n \|f - u\|_{L^1} \leq 3^n \epsilon$$

Pour tout $\lambda > 0$ on évalue :

$$\left| \left\{ x, \limsup_r |M_r f(x) - f(x)| > \lambda \right\} \right| \leq \left| \left\{ x, \limsup_r |M_r f(x) - M_r u(x)| > \lambda/3 \right\} \right| \\ + \left| \left\{ x, \limsup_r |M_r u(x) - u(x)| > \lambda/3 \right\} \right| + \left| \left\{ x, \limsup_r |u(x) - f(x)| > \lambda/3 \right\} \right|$$

On peut évaluer chacun de ces trois termes :

$$\left| \left\{ x, \limsup_r |M_r f(x) - M_r u(x)| > \lambda/3 \right\} \right| \leq \left| \left\{ x, \sup_r M_r |f - u| > \lambda/3 \right\} \right| \\ \leq \frac{3}{\lambda} [M(f - u)]_1 \leq \frac{3}{\lambda} \epsilon 3^n$$

$$\left| \left\{ x, \limsup_r |M_r u(x) - u(x)| > \lambda/3 \right\} \right| = 0$$

$$\left| \left\{ x, \limsup_r |u(x) - f(x)| > \lambda/3 \right\} \right| = |\{x, |u(x) - f(x)| > \lambda/3\}| \leq \frac{3}{\lambda} \|f - u\|_{L^1} \leq \frac{3}{\lambda} \epsilon$$

(dans le troisième calcul, on a utilisé l'inégalité de Chebitchev)

On a donc prouvé que pour tout $\lambda > 0$:

$$\left| \left\{ x, \limsup_r |M_r f(x) - f(x)| > \lambda \right\} \right| = 0$$

Cela signifie que

$$\left| \left\{ x, \limsup_r |M_r f(x) - f(x)| > 0 \right\} \right| = 0$$

d'où la conclusion.

On peut montrer le résultat de la remarque avec essentiellement la même preuve...

5. Il suffit de prendre $f = \mathbb{1}_A \in L^1_{loc}$.

Remarque en passant : que dire de $M\mathbb{1}_A$ (sur \mathbb{R} pour simplifier) ?

Réponse : $M\mathbb{1}_A$ n'est pas dans $L^1(\mathbb{R})$ même si $\mathbb{1}_A$ l'est.

★

Solution 3. *Inégalité de Hardy-Littlewood -Sobolev*

1. Par densité, on peut supposer que u est continue à support compact. Fixons $x \in \mathbb{R}^n$ et $\delta > 0$. On a :

$$\begin{aligned} \int_{|y-x|<\delta} |u(y)||x-y|^{-\lambda} dy &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{2^{-k}\delta \leq |y-x| \leq 2^{1-k}\delta} |u(y)||x-y|^{-\lambda} dy \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} (2^{-k}\delta)^{-\lambda} \int_{|y-x| \leq 2^{1-k}\delta} |u(y)| dy \\ &\leq c_1 \delta^{n-\lambda} M u(x) \end{aligned}$$

2. Par l'inégalité de Hölder on a :

$$\int_{|y-x| \geq \delta} |u(y)||x-y|^{-\lambda} dy \leq c_2 \|u\|_{L^p} \delta^{-n/q}$$

On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u(y)||x-y|^{-\lambda} dy \leq c_3 \left(\delta^{n-\lambda} M u(x) + \delta^{-n/q} \|u\|_{L^p} \right)$$

On optimise le membre de droite en choisissant $\delta := \left(\frac{M u(x)}{\|u\|_{L^p}} \right)^{-p/N}$ et on obtient :

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u(y)||x-y|^{-\lambda} dy \leq c_3 \left(\|u\|_{L^p}^{1-p/q} (M u(x))^{p/q} \right)$$

Donc :

$$\left\| |x|^{-\lambda} * u \right\|_{L^q} \leq c_3 \|u\|_{L^p}^{1-p/q} \|M u(x)\|_{L^q}^{p/q}$$

D'après le théorème maximal (question 3 de l'exercice précédent), M est de type (q, q) -fort. On peut donc conclure.

3. Soit $u \in \mathcal{D}$. Notons E la solution fondamentale du Laplacien. On écrit :

$$u = \delta * u = -\Delta E * u = - \sum_{|\alpha|=1} \partial^\alpha E * \partial^\alpha u$$

On observe que pour $|\alpha| = 1$,

$$|\partial^\alpha E(x)| = 2c_n |x_\alpha| |x|^{-n} \leq 2c_n |x|^{1-n}$$

D'après l'inégalité de Hardy-Littlewood-Sobolev on en déduit que :

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^{2^*}} &\leq \sum_{|\alpha|=1} \|\partial^\alpha E * \partial^\alpha u\|_{L^{2^*}} \\ &\leq 2c_n \sum_{|\alpha|=1} \left\| |x|^{1-N} * \partial^\alpha u \right\|_{L^{2^*}} \\ &\leq 2c_n C \sum_{|\alpha|=1} \|\partial^\alpha u\|_{L^2} \end{aligned}$$

★