Correction du Td n° 9 d'Analyse fonctionnelle

Intégrales singulières

Séance du 19 avril 2013

Solution 1. *Transformation de Riesz*

1. Soit $(e_1, ..., e_n)$ une base orthonormée, et considérons A la matrice diagonale $(1, -1, ..., -1)$. On a $m(e_1) = m(A(e_1)) = A(m(e_1))$, donc $m(e_1)$ est dans l'espcae propre $E_1 = \mathbb{R}e_1$, et on peut faire le même raisonnement pour chaque e_i donc $m(e_i) = C_i e_i$. En prenant A telle que $A(e_1) = e_2$ et $A(e_2) = e_1$, on voiot que $C_1 = C_2$. Comme on peut faire ce raisonnement pour toute base, et que m est homogène de degra 0 ; on obtient le résultat.

2. On calcule

$$\begin{aligned}
< \widehat{W_j}, \phi > &= < W_j, \hat{\phi} > \\
&= C_n \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \int_{|\xi| \geq \varepsilon} \hat{\phi}(\xi) \frac{\xi_j}{|\xi|^{n+1}} d\xi \\
&= C_n \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \int_{|\xi| \geq \varepsilon} \int \phi(x) e^{ix.\xi} \frac{\xi_j}{|\xi|^{n+1}} d\xi \\
&= C_n \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \int \phi(x) \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \int_{\varepsilon \leq r \leq \frac{1}{\varepsilon}} e^{ir\omega.\xi} \frac{\omega_j}{r^n} r^{n-1} dr d\omega \\
&= -iC_n \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \int \phi(x) \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \int_{\varepsilon \leq r \leq \frac{1}{\varepsilon}} e^{ir\omega.\xi} \frac{\sin(rx.\omega)}{r} dr d\omega \\
&= -i\frac{\pi}{2} C_n \int \phi(x) \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \omega_j sign(x.\omega) d\omega
\end{aligned}$$

Comme l'application $x \mapsto (\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \omega_j sign(x.\omega) d\omega)_j$ satisfait les conditions de la question 1, on a

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \omega_j sign(x.\omega) d\omega = C \frac{x_j}{|x|}.$$

Pour calculer C, il suffit de prendre $x = e_1$ et on obtient

$$C = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \omega_1 sign(\omega_1) d\omega = \int_{-1}^{1} |\omega_1| \sqrt{(1 - \omega_1^2)}^{N-3} d\omega_1 = |\mathbb{S}^{N-2}| \frac{2}{N-1}.$$

3. On écrit

$$\begin{aligned}
\int (\lim_{\epsilon \longrightarrow 0} \int_{|y| \geq \epsilon} \frac{y_1}{|y|^{n+1}} \phi(x-y) dy)^p dx &= \int (\lim_{\epsilon \longrightarrow 0} \int_{\mathbb{S}^{N-1}} \int_{r \geq \epsilon} \frac{\omega_1}{r} \phi(x - r\omega) dr d\omega)^p dx \\
&= \int (\int_{\mathbb{S}^{N-1}} |\omega_1| \mathcal{H}_\omega(\phi)(x) d\omega)^p dx \\
&\leq \|\phi\|_{L^p}
\end{aligned}$$

Où on a noté $\mathcal{H}_\omega$ la transformée de hilbert dans la direction ω.

⋆

Solution 2. *Théorème de Marcinkiewicz*

1. On a :

$$\begin{aligned}
&p\int_0^\infty \lambda^{p-1}\mu\{x|\,|f(x)|\geq\lambda\}d\lambda = \int_0^\infty\int_\Omega p\lambda^{p-1}1_{x|\,|f(x)|\geq\lambda}dxd\lambda \\
&= \int_\Omega\int_0^\infty p\lambda^{p-1}1_{x|\,|f(x)|\geq\lambda}d\lambda dx \text{ par le théorème de Fubini,} \\
&= \int_\Omega\int_0^{|f(x)|} p\lambda^{p-1}d\lambda dx, \\
&= \int_\Omega |f(x)|^p d\lambda dx = \|f\|_p^p.
\end{aligned} \tag{1}$$

On en déduit pour tout $\lambda_0>0$:

$$\begin{aligned}
&p\int_0^\infty \lambda^{p-1}\mu\{x|\,|f(x)|\geq\lambda\}d\lambda \geq p\int_0^{\lambda_0}\lambda^{p-1}\mu\{x|\,|f(x)|\geq\lambda\}d\lambda \\
&\geq \mu\{x|\,|f(x)|\geq\lambda_0\}p\int_0^{\lambda_0}\lambda^{p-1}d\lambda = \mu\{x|\,|f(x)|\geq\lambda_0\}\lambda_0^p.
\end{aligned} \tag{2}$$

En passant au sup on obtient l'inégalité recherchée.

2. $|Tf(x)|\geq\lambda$ implique $|Tg_\lambda(x)|\geq\lambda/2$ ou $|Th_\lambda(x)|\geq\lambda/2$, d'où la conclusion par sous-additivité de la mesure.

3. En appliquant 1. et 2., on obtient :

$$\begin{aligned}
&\|Tf\|_p^p = p\int_0^\infty \lambda^{p-1}\mu\{x|\,|Tf(x)|\geq\lambda\}d\lambda \\
&\leq p\int_0^\infty \lambda^{p-1}(\mu\{x|\,|Tg_\lambda|(x)\geq\lambda/2\}+\mu\{x|\,|Th_\lambda|(x)\geq\lambda/2\})d\lambda.
\end{aligned} \tag{3}$$

Or, par construction, $h_\lambda\in L^q(\Omega)$ et $g_\lambda\in L^p(\Omega)$, donc comme T est de type (p,p) faible et (q,q) faible, on en déduit :

$$\begin{aligned}
&\|Tf\|_r^r = r\int_0^\infty \lambda^{r-1}\mu\{x|\,|Tf(x)|\geq\lambda\}d\lambda, \\
&\leq r\int_0^\infty \lambda^{r-1}[Tg_\lambda]_p^p(\tfrac{\lambda}{2})^{-p}d\lambda + r\int_0^\infty \lambda^{r-1}[Th_\lambda]_q^q(\tfrac{\lambda}{2})^{-q}d\lambda, \\
&\leq C\int_0^\infty \lambda^{r-1-p}[Tg_\lambda]_p^p d\lambda + C\int_0^\infty \lambda^{r-1-q}[Th_\lambda]_q^q d\lambda,
\end{aligned} \tag{4}$$

ici C ne dépend que de r,p,q.

4. Comme T est (p,p)-faible et (q,q)-faible, on déduit du 3. que :

$$\begin{aligned}
\|Tf\|_r^r &\leq CC_p\int_0^\infty \lambda^{r-1-p}\|g_\lambda\|_p^p d\lambda + CC_q\int_0^\infty \lambda^{r-1-q}\|h_\lambda\|_q^q d\lambda \\
&\leq CC_p\int_0^\infty\int_\Omega \lambda^{r-1-p}|f|^p 1_{\{|f|\geq\lambda a\}}d\lambda dx + CC_q\int_0^\infty\int_\Omega \lambda^{r-1-q}|f|^q 1_{\{|f|\leq\lambda a\}}d\lambda dx \\
&\leq CC_p\int_\Omega \frac{1}{r-p}(\frac{|f|}{a})^{r-p}|f|^p dx + CC_q\int_\Omega \frac{1}{q-r}(\frac{|f|}{a})^{r-q}|f|^q dx \\
&\leq CC_p\frac{1}{(r-p)a^{r-p}}\|f\|_r^r + CC_q\frac{a^{q-r}}{(q-r)}\|f\|_r^r,
\end{aligned} \tag{5}$$

où C est la constante du 3. et C_p et C_q sont les constantes de continuité (p,p) et (q,q). Ceci donne la conclusion.

⋆

Solution 3. *Autour de la fonction maximale de Lebesgue*

1. Il existe un ouvert borné ω tel que $c < |\omega|$ et $\bar{\omega} \subset \Omega$. Comme $\bar{\omega}$ est compact, on peut considérer $A_1, ..., A_m$ un recouvrement fini de ω par des boules de $\mathcal{B}$. Parmi ces boules, on choisit une boule B_1 de rayon maximal. On choisit ensuite les autres boules comme suit : parmi les boules A_n qui ne rencontrent pas $B_1 \cup ... \cup B_j$, on choisit une boule B_{j+1} de rayon maximal. On arrête le processus dès que toutes les boules de A_n rencontrent $B_1 \cup ... \cup B_k$.

On a obtenu une suite finie $B_1, ..., B_k$. Si une boule A_n n'appartient pas à cette suite, il existe B_j qui rencontre A_n et dont le rayon est supérieur à celui de A_n. Notons C_j la boule concentrique à B_j dont le rayon est trois fois celui de B_j. Alors (faire un dessin pour s'en convaincre), $A_n \subset C_j$. Bien entendu, on a également $B_j \subset C_j$. On a donc :

$$c < |\omega| \leq \sum_{i=1}^{m} |A_i| \leq \sum_{j=1}^{k} |C_j| = 3^n \sum_{j=1}^{k} |B_j|$$

2. Par le théorème de convergence dominée, la fonction définie par :

$$r, x \mapsto M_r|f|(x)$$

est continue. Alors $Mf(x) = \sup_{r>0, r\in\mathbb{Q}} M_r|f|(x)$ est mesurable.

3. Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Considérons l'ensemble S défini par :

$$S := \{x \in \mathbb{R}^n, \quad Mf(x) > \lambda\}$$

Soit $a < 1$. Pour chaque x dans S, il existe un rayon $r_x > 0$ tel que $M_{r_x}|f|(x) > a\lambda$. Soit $c < |S|$. D'après le lemme de recouvrement de Vitali, il existe des points $x_1, ...x_k \in S$ tel que les boules $B_j := B(x_j, r_{x_j})$ sont disjointes et vérifient $c < 3^n \sum_{j=1}^{k} |B_j|$. On en déduit :

$$c < 3^n \sum_{j=1}^{k} |B_j| \leq \frac{3^n}{a\lambda} \sum_{j=1}^{k} \int_{|y-x_j|<r_{x_j}} |f(y)|dy \leq \frac{3^n}{a\lambda} \|f\|_{L^1}$$

Ceci étant vrai pour tout $c < |S|$ (et pour tout $a < 1$), on obtient :

$$\lambda|S| \leq 3^n \|f\|_{L^1}$$

i.e. $[Mf]_1 \leq 3^n \|f\|_{L^1}$.

D'autre part , il est clair que

$$[Mf]_\infty \leq \|f\|_{L^\infty}$$

Donc par le théorème de Marcikiewicz, M est de type (p,p)-fort pour tout $1 < p < +\infty$.

4. Pour commencer remarquons que la propriété recherchée est locale. Il suffit de prouver que pour tout $k \in \mathbb{N}$, la relation a lieu presque partout sur $B(0,k)$. En considérant $0 < r < 1$, on peut annuler f en dehors de $B(0,k+1)$ et supposer que $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Soit $\epsilon > 0$. Par densité des fonction continues à support compact dans L^1, il existe $u \in C_c$ avec :

$$\|f - u\|_{L^1} \leq \epsilon$$

ll est clair que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\lim_{r\to 0^+} M_r u(x) = u(x)$$

D'autre part d'après la question précédente (théorème maximal),

$$[M(f-u)]_1 \leq 3^n \|f-u\|_{L^1} \leq 3^n \epsilon$$

Pour tout $\lambda > 0$ on évalue :

$$\left|\left\{x, \limsup_r |M_r f(x) - f(x)| > \lambda\right\}\right| \leq \left|\left\{x, \limsup_r |M_r f(x) - M_r u(x)| > \lambda/3\right\}\right|$$
$$+\left|\left\{x, \limsup_r |M_r u(x) - u(x)| > \lambda/3\right\}\right| + \left|\left\{x, \limsup_r |u(x) - f(x)| > \lambda/3\right\}\right|$$

On peut évaluer chacun de ces trois termes :

$$\begin{aligned}\left|\left\{x, \limsup_r |M_r f(x) - M_r u(x)| > \lambda/3\right\}\right| &\leq \left|\left\{x, \sup_r M_r|f-u| > \lambda/3\right\}\right| \\ &\leq \frac{3}{\lambda}[M(f-u)]_1 \leq \frac{3}{\lambda}\epsilon 3^n\end{aligned}$$

$$\left|\left\{x, \limsup_r |M_r u(x) - u(x)| > \lambda/3\right\}\right| = 0$$

$$\left|\left\{x, \limsup_r |u(x) - f(x)| > \lambda/3\right\}\right| = |\{x, |u(x)-f(x)| > \lambda/3\}| \leq \frac{3}{\lambda}\|f-u\|_{L^1} \leq \frac{3}{\lambda}\epsilon$$

(dans le troisième calcul, on a utilisé l'inégalité de Chebitchev)

On a donc prouvé que pour tout $\lambda > 0$:

$$\left|\left\{x, \limsup_r |M_r f(x) - f(x)| > \lambda\right\}\right| = 0$$

Cela signifie que

$$\left|\left\{x, \limsup_r |M_r f(x) - f(x)| > 0\right\}\right| = 0$$

d'où la conclusion.

On peut montrer le résultat de la remarque avec essentiellement la même preuve...

5. Il suffit de prendre $f = \mathbb{1}_A \in L^1_{loc}$.

Remarque en passant : que dire de $M\mathbb{1}_A$ (sur $\mathbb{R}$ pour simplifier) ?

Réponse : $M\mathbb{1}_A$ n'est pas dans $L^1(\mathbb{R})$ même si $\mathbb{1}_A$ l'est.

$\star$

Solution 4. *Inégalité de Hardy-Littlewood -Sobolev*

1. Par densité, on peut supposer que u est continue à support compact. Fixons $x \in \mathbb{R}^n$ et $\delta > 0$. On a :

$$\begin{aligned}\int_{|y-x|<\delta} |u(y)||x-y|^{-\lambda} dy &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{2^{-k}\delta \leq |y-x| \leq 2^{1-k}\delta} |u(y)||x-y|^{-\lambda} dy \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \left(2^{-k}\delta\right)^{-\lambda} \int_{|y-x| \leq 2^{1-k}\delta} |u(y)| dy \\ &\leq c_1 \delta^{n-\lambda} M u(x)\end{aligned}$$

2. Par l'inégalité de Hölder on a :

$$\int_{|y-x|\geq\delta} |u(y)||x-y|^{-\lambda}dy \leq c_2 \|u\|_{L^p}\delta^{-n/q}$$

On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u(y)||x-y|^{-\lambda}dy \leq c_3 \left(\delta^{n-\lambda} Mu(x) + \delta^{-n/q}\|u\|_{L^p}\right)$$

On optimise le membre de droite en choisissant $\delta := \left(\frac{Mu(x)}{\|u\|_{L^p}}\right)^{-p/N}$ et on obtient :

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u(y)||x-y|^{-\lambda}dy \leq c_3 \left(\|u\|_{L^p}^{1-p/q}(Mu(x))^{p/q}\right)$$

Donc :

$$\left\| |x|^{-\lambda} * u \right\|_{L^q} \leq c_3 \|u\|_{L^p}^{1-p/q} \|Mu(x)\|_{L^q}^{p/q}$$

D'après le théorème maximal (question 3 de l'exercice précédent), M est de type (q,q)-fort. On peut donc conclure.

3. Soit $u \in \mathcal{D}$. Notons E la solution fondamentale du Laplacien. On écrit :

$$u = \delta * u = -\Delta E * u = -\sum_{|\alpha|=1} \partial^\alpha E * \partial^\alpha u$$

On observe que pour $|\alpha| = 1$,

$$|\partial^\alpha E(x)| = 2c_n |x_\alpha||x|^{-n} \leq 2c_n |x|^{1-n}$$

D'après l'inégalité de Hardy-Littlewood-Sobolev on en déduit que :

$$\begin{aligned}
\|u\|_{L^{2^*}} &\leq \sum_{|\alpha|=1} \|\partial^\alpha E * \partial^\alpha u\|_{L^{2^*}} \\
&\leq 2c_N \sum_{|\alpha|=1} \||x|^{1-N} * \partial^\alpha u\|_{L^{2^*}} \\
&\leq 2c_n C \sum_{|\alpha|=1} \|\partial^\alpha u\|_{L^2}
\end{aligned}$$

⋆