

Td n° 9 d'Analyse fonctionnelle

EQUATIONS ELLIPTIQUES

Séance du 9 mai 2010

Solution 1. *Inégalité de Poincaré-Wirtinger*

1. Rappelons que l'injection $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ est compacte. Supposons que l'inégalité désirée n'ait pas lieu. Il existerait donc $u_n \in H^1(\Omega)$ tel que $\|u_n - \bar{u}_n\|_{L^2} = 1$ et $\|\nabla u_n\|_{L^2} \rightarrow 0$. Ainsi, $v_n = u_n - \bar{u}_n$ est bornée dans $H^1(\Omega)$, donc quitte à extraire, converge vers v fortement dans L^2 et faiblement dans $H^1(\Omega)$. Comme $\|\nabla u_n\|_{L^2} = \|\nabla v_n\|_{L^2} \rightarrow 0$, en fait, $v_n \rightarrow v$ fortement dans $H^1(\Omega)$ et $\nabla v = 0$. Comme Ω est connexe, v est constante. Comme $\int v_n = 0$ (et Ω de mesure finie), $\int v = 0$ et donc $v = 0$. Ceci contredit que $\|v\|_{L^2} = \lim \|v_n\|_{L^2} = 1$.

★

Solution 2. *Problème de Neumann*

1. Comme u est régulière, si u est solution forte, on a le droit de faire l'intégration par partie, qui donne

$$\begin{aligned} \int f v &= - \int \Delta u \cdot v + \int_{\Omega} u v = - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v + \int_{\Omega} (\nabla u, \nabla v) + \int_{\Omega} u v \\ &= \int_{\Omega} (\nabla u, \nabla v) + \int_{\Omega} u v, \end{aligned}$$

par la condition au bord.

Réciproquement, si u est solution faible, on déduit de cette même intégration par parties que

$$\int_{\Omega} (-\Delta u + u - f)v - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v = 0$$

pour tout $v \in \mathcal{C}^{\infty}(\bar{\Omega}) \subset H^1(\Omega)$. On en déduit (en utilisant des fonctions $\mathcal{C}_c^1(\Omega)$), que $-\Delta u + u = f$ p.p. dans Ω , puis pour tout x dans Ω (puisque u est \mathcal{C}^2), puis enfin que $\partial u / \partial n = 0$ sur $\partial\Omega$.

2. Soit

$$B(u, v) = \int_{\Omega} (\nabla u, \nabla v + uv).$$

Cette application est clairement bilinéaire, continue et coercive sur $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$. Le lemme de Lax-Milgram nous donne l'existence d'une unique fonction $u \in H^1(\Omega)$ telle que $B(u, v) = \int_{\Omega} f v$ pour tout $v \in H^1(\Omega)$. D'où l'existence et l'unicité de la solution faible.

De plus, comme $B(u, v) = B(v, u)$ pour tout u, v , on sait que u est l'unique minimiseur sur $H^1(\Omega)$ de $J(u) = \int_{\Omega} (\frac{1}{2} |\nabla u|^2 + \frac{1}{2} u^2 - f u)$.

3. Si (1) admet une solution faible, alors $\int_{\Omega} \nabla u \nabla v = \int_{\Omega} f v$ pour tout $v \in H^1(\Omega)$. En prenant $v \equiv 1$, on en déduit que

$$\int_{\Omega} f = 0.$$

Montrons que cette condition sur f est suffisante pour avoir l'existence d'une solution faible. Pour cela, nous allons montrer que B est bilinéaire, continue et coercive sur $H_K^1(\Omega) \times H_K^1(\Omega)$. La bilinéarité et la continuité sont évidentes. Pour tout $u \in H_K^1(\Omega)$,

$$B(u, u) = \int_{\Omega} |\nabla u|^2.$$

Or l'inégalité de Poincaré-Wirtinger nous donne l'existence d'une constante C telle que pour tout $v \in H^1(\Omega)$,

$$\left\| v - \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} v \right\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}.$$

Donc si $u \in H_K^1(\Omega)$, $\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$ (ce qui signifie que $\|u\|_{H^1(\Omega)}$ et $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$ sont deux normes équivalentes sur $H_K^1(\Omega)$). D'où la coercivité de B :

$$B(u, u) \geq \frac{1}{C} \|u\|_{H^1(\Omega)}.$$

Donc il existe une unique fonction $u \in H_K^1(\Omega)$ telle que pour tout $v \in \mathbf{H}_K^1(\Omega)$, $B(u, v) = \int_{\Omega} f v$. **L'exercice n'est pas fini! Il faut maintenant étendre cette identité aux fonctions $v \in H^1(\Omega)$ (et non $H_K^1(\Omega)$).**

Soit donc $v \in H^1(\Omega)$ et $w = v - \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} v$. Comme $w \in H_K^1(\Omega)$ et $\nabla v = \nabla w$, on a

$$B(u, v) = B(u, w) = \int_{\Omega} f w = \int_{\Omega} f v - \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \int_{\Omega} f(x) v(y) dx dy = \int_{\Omega} f v$$

car $\int_{\Omega} f = 0$. D'où la conclusion.

Si u_0 est une autre solution de cette équation, alors $-\Delta(u - u_0) = 0$ et $\partial_n(u - u_0) = 0$ sur $\partial\Omega$. On en déduit facilement que $\int_{\Omega} |\nabla(u - u_0)|^2 = 0$, donc $u - u_0$ est constante. Réciproquement, $u + c$ est solution de (1) pour toute constante c .

★

Solution 3. *Problème de Dirichlet hétérogène*

1. Soit $B(u, v) = \int_{\Omega} (Lu + \mu u)v$ pour tout $u, v \in H_0^1(\Omega)$. C'est une application bilinéaire continue de $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$. En effet, si $u, v \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$\begin{aligned} |(Lu + \mu u, v)| &= \left| \int_{\Omega} (-\operatorname{div}(A\nabla u) + (b, \nabla u) + (c + \mu)u)v \right| \\ &= \left| \int_{\Omega} A(\nabla u, \nabla v) + (b, \nabla u) + (c + \mu)uv \right| \\ &\leq (\|A\|_{L^\infty} + \|b\|_{L^\infty} + \|c\|_{L^\infty}) \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Comme $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $H_0^1(\Omega)$, on peut donc faire tout les calculs avec $u, v \in H_0^1(\Omega)$. Montrons que B est coercive si μ est assez grand. On calcule :

$$\begin{aligned} B(u, u) &= \int_{\Omega} A(x)(\nabla u, \nabla u) + \int_{\Omega} (b(x), \nabla u)u + \int_{\Omega} (c(x) + \mu)u^2 \\ &\geq \alpha \|\nabla u\|_{L^2}^2 - \|b\|_{L^\infty} \|\nabla u\|_{L^2} \|u\|_{L^2} - \|c\|_{L^\infty} \|u\|_{L^2}^2 + \mu \|u\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

Supposons $\mu \geq \max\{\alpha + 2\|c\|_{L^\infty}, \|b\|_{L^\infty}^2/\alpha\}$. Alors

$$\|b\|_{L^\infty} \|\nabla u\|_{L^2} \|u\|_{L^2} \leq \sqrt{\alpha\mu} \|\nabla u\|_{L^2} \|u\|_{L^2} \leq \frac{\alpha}{2} \|\nabla u\|_{L^2}^2 + \frac{\mu}{2} \|u\|_{L^2}^2.$$

Et donc

$$B(u, u) \geq \frac{\alpha}{2} \|\nabla u\|_{L^2}^2 + \frac{\mu}{2} \|u\|_{L^2}^2 - \|c\|_{L^\infty} \|u\|_{L^2}^2 \geq \frac{\alpha}{2} \|u\|_{H^1}^2.$$

Pour un tel μ , B étant continue et coercive dans $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$, f étant continue sur $H_0^1(\Omega)$, on peut appliquer le théorème de Lax-Milgram : il existe donc un unique $u \in H_0^1(\Omega)$ solution faible de (3).

2. Il est clair que T est linéaire et va de $L^2(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$. Comme l'injection de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est compacte, on a la conclusion.

3. Quitte à remplacer c par $c + \mu_0$, on peut supposer que $\mu_0 = 0$ pour simplifier les notations. Si $\mu \geq 0$, il existe une unique solution de (3) quel que soit f et la conclusion est immédiate. Soit $\mu < 0$ et T l'opérateur associé à $\mu = \mu_0 = 0$. Alors si $f = 0$, u est solution faible de (3) si et seulement si $T(-\mu u) = u$, i.e. si $u \in \text{Ker}(T + \frac{Id}{\mu})$. Cet espace est de dimension finie d par l'alternative de Fredholm.

Maintenant si $f \in L^2(\Omega)$ est non-nulle, (3) admet une solution si et seulement s'il existe $u \in H_0^1(\Omega)$ telle que $T(f - \mu u) = u$, i.e. (en posant $v = f - \mu u$), il existe $v \in L^2(\Omega)$ telle que $Tv = (f - v)/\mu$, i.e. $f \in \text{Im}(T + \frac{Id}{\mu}) = (\text{Ker}(T^* + \frac{Id}{\mu}))^\perp$ par l'alternative de Fredholm, avec T^* l'adjoint de T . Par ailleurs, l'alternative de Fredholm nous dit également que la dimension de $\text{Ker}(T^* + \frac{Id}{\mu})$ est égale à la dimension de $\text{Ker}(T + \frac{Id}{\mu})$, c'est-à-dire d . $F = \text{Ker}(T^* + \frac{Id}{\mu})$ convient donc.

4. Il suffit de montrer que B est coercive dans le cas mentionné. On a

$$B(u, u) = \int A(x)(\nabla u, \nabla u) + \int (c(x) + \mu)u^2 \geq \alpha \|\nabla u\|_{L^2}^2.$$

Par ailleurs l'inégalité de Poincaré montre qu'il existe une constante C telle que pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$,

$$\|\nabla u\|_{L^2} \geq C \|u\|_{H^1(\Omega)},$$

donc B est coercive sur $H_0^1(\Omega)$, et l'on conclut comme précédemment.

★

Solution 4. *Un problème elliptique non linéaire*

1. On a :

$$H_g^1(\Omega) = g + H_0^1(\Omega).$$

2. Soit donc u_n une suite de minimiseurs, alors bien sûr $\int_\Omega |\nabla u_n|^2$ est une suite bornée, et donc $\int_\Omega |\nabla(u_n - u_0)|^2$ est bornée. Mais $u_n - u_0 \in H_0^1(\Omega)$, et par l'inégalité de Poincaré, $\int_\Omega |\nabla u|^2$ est une norme équivalente à $\|\cdot\|_{H^1}$ sur $H_0^1(\Omega)$. Ainsi, quitte à extraire, $u_n - u_0 \rightharpoonup u - u_0$ $H_0^1(\Omega)$ -faible et par injection de Sobolev, dans $L^{p+1}(\Omega)$ -faible. Comme $u - u_0 \in H_0^1(\Omega)$, $u \in H_g^1(\Omega)$.

On remarque que la fonctionnelle est fortement s.c.i. et convexe donc elle est faiblement s.c.i. En prenant la limite faible, on obtient

$$\int |\nabla u|^2 \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int |\nabla u_n|^2, \quad \int |u|^{p+1} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int |u_n|^{p+1}.$$

Or $J(u_n) \rightarrow \inf J(v)$ par définition et donc u réalise le minimum.

Le minimiseur est unique car la fonctionnelle est strictement convexe.

3. Comme u est un minimiseur, on a que $J(u + tv) \geq J(u)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, $v \in H_0^1$. Notons $F(x) = \frac{1}{p+1}|x|^{p+1}$, $f(x) = |x|^{p-1}x$. En développant, cela donne

$$t \int \nabla u \nabla v + \frac{t^2}{2} \int |\nabla v|^2 + \int F(u + tv) - F(u) \geq 0.$$

On divise par t , et on fait tendre $t \rightarrow 0$ par valeur positives. Or par Taylor-Lagrange, on a pour chaque $x \in \Omega$

$$\frac{1}{t}(F(u + tv) - F(v)) - f(u)v = t \int_0^1 f'(u + \theta tv)(1 - \theta)d\theta.$$

En particulier, vu que $|f'(x)| \leq C(1 + |x|^{p-1})$

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\Omega} \int_0^1 f'(u + \theta tv)(1 - \theta)d\theta dx \right| \\ & \leq \int_0^1 \int_{\Omega} |f'(u + \theta tv)| dx d\theta \\ & \leq C \int_0^1 \int (1 + 2^{p-1}|u|^{p-1} + 2^{p-1}|v|^{p-1}) dx \leq C(u, v), \end{aligned}$$

pour $t \leq 1$. En particulier, on a donc

$$\frac{1}{t} \int (F(u + tv) - F(v)) \rightarrow \int f(u)v,$$

et donc

$$\int \nabla u \nabla v + \int f(u)v \geq 0.$$

De même en faisant tendre t vers 0 par valeurs négatives, on trouve que $\int \nabla u \nabla v + \int f(u)v \leq 0$. Ceci est vrai pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$; il s'agit bien de la formulation faible souhaitée.

★

Solution 5. *Problème elliptique avec contrainte intégrale*

On remarque pour commencer que sur $H_0^1(\Omega)$, on a l'inégalité de Poincaré donc la norme H^1 est équivalente à la norme L^2 du gradient.

1. Comme d'habitude (revoir le cours au besoin) on considère une suite minimisante (w_k) dans \mathcal{A} telle que :

$$I(w_k) \rightarrow \inf_{w \in \mathcal{A}} I(w).$$

En particulier w_k est borné dans H_0^1 donc on peut (quitte à extraire) supposer que $w_k \rightharpoonup u$ faiblement dans H_0^1 . Par l'inégalité de Fatou, on a bien $I(u) = \inf_{w \in \mathcal{A}} I(w)$.

Mais ce n'est pas fini, il faut vérifier que $J(u) = 0$. Pour cela, par injection compacte de H^1 dans L^2 on a $w_k \rightarrow u$ fortement dans L^2 . On écrit ensuite :

$$|J(u)| = |J(u) - J(w_k)| \leq \int_{\Omega} |G(u) - G(w_k)|.$$

Je vous laisse conclure.

2. C'est un peu plus délicat que d'habitude à cause de la "non linéarité" de G : si $v \in \mathcal{A}$, on n'a pas forcément $u + tv \in \mathcal{A}$. Voilà comment on s'en sort quand même. On fixe v une fonction de $H_0^1(\Omega)$.

Commençons par supposer que $g(u)$ n'est pas nul presque partout. On peut alors choisir w dans $H_0^1(\Omega)$ telle que :

$$\int_{\Omega} g(u)w \neq 0.$$

On considère alors $j(\tau, \sigma) = J(u + \tau v + \sigma w)$. On vérifie que l'on a

$$j(0, 0) = 0, \quad \frac{\partial j}{\partial \sigma}(0, 0) \neq 0.$$

D'après le théorème des fonctions implicites, il existe un C^1 difféomorphisme ϕ tel que $\phi(0) = 0$ et pour $|\tau|$ assez petit :

$$j(\tau, \phi(\tau)) = 0$$

On considère à présent $i(\tau) = I(u + \tau v + \phi(\tau)w)$ (on a bien $u + \tau v + \phi(\tau)w \in \mathcal{A}$). Comme u est minimum, i a un minimum en 0, ce qui entraîne :

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot (\nabla v + \phi'(0)\nabla w) = 0.$$

Or (pour le voir, différencier $j(\tau, \phi(\tau)) = 0$) ,

$$\phi'(0) = -\frac{\int_{\Omega} g(u)v}{\int_{\Omega} g(u)w}.$$

On définit alors

$$\lambda = \frac{\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla w}{\int_{\Omega} g(u)w}.$$

Dans le cas où $g(u) = 0$ p.p., alors $\nabla G(u) = 0$ p.p. (cf TD8, exercice 3). Donc comme Ω est connexe, $G(u) = C$ p.p., puis $G(u) = 0$ p.p.

Par le théorème de trace, $G(u) = 0$ sur $\partial\Omega$. Comme $u = 0$ sur $\partial\Omega$, on a forcément $G(0) = 0$. Cela implique que $0 \in \mathcal{A}$.

Donc on a $u = 0$, car sinon $I(u) > I(0) = 0$. L'identité demandée est donc trivialement vérifiée pour n'importe quel λ .

★