**Exercice 1**

0. Si $f$ est croissante, alors la suite $(f^n(x))$ est convergente car monotone. Donc $(f^n(x))$ a exactement une valeur d'adhérence.

   Si $f$ est décroissante, alors les suites $(f^{2n}(x))$, $(f^{2n+1}(x))$ sont monotones donc convergentes. Les seules valeurs d'adhérence de $(f^n(x))$ sont les limites de $(f^{2n}(x))$, $(f^{2n+1}(x))$. En effet, d'une suite extraite de $(f^n(x))$, on peut toujours extraire $(f^{n_k}(x))$ avec ou bien $n_k$ pair pour tout $k$, ou bien $n_k$ impair pour tout $k$.

1. Rappelons que l'ensemble des valeurs d'adhérence est donné par

$$A = \cap_{n\in\mathbb{N}} \overline{F}_n \quad \text{où } F_n = \{x_p / \ p \geqslant n\}.$$

   Clairement, si $A = [0,1]$, alors $\overline{F}_0 = [0,1]$. Réciproquement, supposons $F_0$ dense dans $[0,1]$. Alors pour tour tout ouvert non-vide $U$ de $[0,1]$, pour tout $n$, $U \setminus \{x_0, \ldots, x_n\}$ est un ouvert non-vide, donc il rencontre $F_0$, donc $U$ rencontre $F_n$. Ainsi $F_n$ est dense dans $[0,1]$, donc $A = [0,1]$.

2. (a) $V_m = \cup_{n\in\mathbb{N}} T_n^{-1}(O_m)$ est ouvert comme union d'ouverts. Il est aussi dense car pour tout ouvert non vide $U$, $T_n(U)$ rencontre $O_m$ pour un certain $n$, donc $U \cap V_m \neq \emptyset$. $\cap_m V_m$ est alors dense par le théorème de Baire.

   (b) $x \in G$ signifie que pour tout $m$, il existe $n$ tel que $T_n(x) \in O_m$. Si $U$ est un ouvert non-vide, il existe $m$ tel que $U_m \subset U$ donc $T_n(x) \in U$ pour un certain $n$.

3. (a) Soit $p$ la projection de $\mathbb{R}$ sur $S^1$ qui envoie $\theta$ sur $e^{i\theta}$. Si $U$ est un ouvert non-vide de $S^1$, il contient $p(I)$ pour un certain intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$. Comme $p(2\theta) = g(p(\theta))$, $p(2I) \subset g(U)$. Plus généralement, pour tout entier $n$ positif, $p(2^n I) \subset g^n(I)$. Si $n$ suffisamment grand, $2^n I$ a une longueur $> 2\pi$ et donc $p(2^n I) = S^1$.

   (b) Remarquons que $h$ est surjective. Donc si $V$ est un ouvert non-vide de $[0,1]$, $U := h^{-1}(V)$ est un ouvert non-vide de $S^1$ et $h(U) = V$. D'après la question précédente, $g^n(U) = S^1$ pour un certain $n$. On vérifie par récurrence sur $n$ que $f^n \circ h = h \circ g^n$. Alors $f^n(V) = f^n(h(U)) = h(g^n(V)) = h(S^1) = [0,1]$ car $h$ surjective.

**Exercice 2**

1. (a) Comme $z \in D'_r(z)$, $P = \cup_{U \in \mathcal{B}} U$. Il reste à montrer que pour tout $U$, $V$ dans $\mathcal{B}$, $U \cap V$ est réunion d'éléments de $\mathcal{B}$. Considérons $U = D'_s(u)$ et $V = D'_t(v)$ avec $s, t > 0$ et $u, v \in P$. Si $u = v$, $U \cap V = D_{\min(s,t)}(u)$ et c'est fini. Si $u \neq v$, on a $U \cap V = P' \cap D_s(u) \cap D_t(v)$, donc $U \cap V$ est ouvert pour la topologie usuelle et contenu dans $P'$, donc pour tout $z \in U \cap V$ et $r$ suffisamment petit $D'_r(z) = D_r(z) \subset U \cap V$.

   (b) Montrons que tout ouvert $O$ de $P$ pour la topologie usuelle est réunion d'éléments de $\mathcal{B}$. La topologie usuelle étant engendrée par les boules ouvertes, pour tout $z \in O$, il existe $r > 0$ tel que $D_r(z) \cap P \subset O$. Comme $D'_r(z) \subset D_r(z) \cap P$, on a $D'_r(z) \subset O$.

2. (a) $\mathcal{B}$ étant une base de $\mathcal{T}$, $\mathcal{B}' = \{O \cap P' /\ O \in \mathcal{B}\}$ est une base de la topologie $\mathcal{T}'$ de $P'$ induite par $\mathcal{T}$. Or pour tout $z \in P$, $D'_r(z) \cap P' = D_r(z) \cap P'$, donc $\mathcal{T}'$ est contenue dans la topologie usuelle de $P'$. Réciproquement, pour tout $z \in P'$, $\mathcal{B}'$ contient les boules $D_r(z)$ lorsque $r$ est suffisamment petit, et ces boules engendrent la toplogie usuelle de $P'$.

   (b) la topologie de $A$ induite par $\mathcal{T}$ admet pour base $\mathcal{B}_A = \{O \cap A /\ O \in \mathcal{B}\}$. Or $D'_r(z) \cap A = \{z\}$ si $z \in A$. Donc $\mathcal{B}_A$ contient tous les singletons de $A$.

3. (a) $A$ est un fermé de $P$ pour la topologie usuelle, $\mathcal{T}$ étant plus fine, $A$ est aussi un fermé de $\mathcal{T}$. Donc $K \cap A$ est compact pour la topologie induite par $\mathcal{T}$. Cette topologie étant discrète d'après la question précédente, $K \cap A$ est fini.

   (b) $\mathcal{T}$ étant plus fine que la topologie usuelle, $K$ est compact aussi pour la topologie usuelle.

4. Notons $K \cap A = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Soit $K \subset \cup_{\alpha \in A} O_\alpha$ un recouvrement par des ouverts $O_\alpha$ de $\mathcal{T}$. Pour chaque $i$, $x_i \in O_{\alpha_i}$ pour un certain $\alpha_i$ et si $r_i$ est assez petit, $D'_{r_i}(x_i) \subset O_{\alpha_i}$. On a un recouvrement par des ouverts de la topologie usuelle:

$$K \subset \Big( \bigcup_{\alpha \in A} O_\alpha \cap P' \Big) \cup \Big( \bigcup_{i=1}^{n} D_{r_i}(x_i) \Big).$$

   $K$ étant compact pour la topologie usuelle, on peut en extraire un sous-recouvrement fini:

$$K \subset \Big(\bigcup_{j=1}^{m} O_{\alpha_j} \cap P'\Big) \cup \Big(\bigcup_{i=1}^{n} D_{r_i}(x_i)\Big).$$

avec $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in A$. En écrivant $K = (K \cap A) \cup (K \cap P')$, il vient que

$$K \subset \Big(\bigcup_{j=1}^{m} O_{\alpha_j}\Big) \cup \Big(\bigcup_{i=1}^{n} O_{\alpha_i}\Big),$$

un sous-recouvrement fini de $(O_\alpha)$.

Une autre preuve consisterait à montrer que pour une partie de $P$ qui ne rencontre $A$ qu'en un nombre fini de points, la topologie induite par $\mathcal{T}$ est la même que la topologie usuelle.

**Problème**

1. (a) la frontière $\partial U = \overline{U} \cap (\mathring{U})^c$ étant fermée comme intersection de fermés, $d(x, \partial U) = 0$ si et seulement si $x \in \partial U$. Donc $f(x) = 0$ ssi $x \in \partial U \cup \overline{U}^c$. $U$ étant ouvert, $X = U \amalg \partial U \amalg \overline{U}^c$, donc $f(x) = 0$ ssi $x \in U^c$.

   (b) La restriction de $f$ à $\overline{U}$ est continue car la fonction $x \to d(x, \partial U)$ est lipschitzienne. Donc pour tout fermé $F$ de $[0,1]$, $f^{-1}(F) \cap \overline{U}$ est un fermé de $\overline{U}$ qui est lui-même fermé dans $X$, donc $f^{-1}(F) \cap \overline{U}$ est fermé dans $X$. De même, la restriction de $f$ à $U^c$ étant continue car identiquement nulle, $f^{-1}(F) \cap U^c$ est fermé. Ainsi, $f^{-1}(F) = (f^{-1}(F) \cap \overline{U}) \cup (f^{-1}(F) \cap U^c)$ est fermé.

2. Soit $(O_j)_{j \in J}$ une base dénombrable d'ouverts. Montrons que $\{O_j / \ j \in J$ et $\overline{O}_j$ est métrisable $\}$ est à nouveau une base d'ouverts. Nous devons montrer que pour tout ouvert $U$ de $X$ et $x \in U$, il existe $j$ tel que $x \in O_j$, $O_j \subset U$ et $\overline{O}_j$ soit métrisable. $X$ étant localement métrisable, il existe un voisinage $V$ de $x$ métrisable. Quitte à remplacer $V$ par son intérieur, nous pouvons supposer $V$ ouvert. $X$ étant régulier, il existe un ouvert $W$ contenant $x$ et d'adhérence contenue dans $U \cap V$. $(O_j)$ étant une base d'ouverts, il existe $j$ tel que $x \in O_j \subset W$. Alors d'une part $O_j \subset U$ et d'autre part $\overline{O}_j$ est métrisable car contenu dans $V$ qui l'est.

3. (a) par la propriété universelle de la topologie produit, chaque $f_i$ étant continue, $f$ l'est aussi.

(b) $X$ étant séparé et $(U_i)$ étant une base d'ouverts, pour tous points distincts $x, y$ de $X$, il existe $i \in \mathbb{N}$, tels que $x \in U_i$ et $y \notin U_i$. Alors $f_i(x) \neq 0$ et $f_i(y) = 0$. Donc $f(x) \neq f(y)$.

(c) $f(U_i) = f(X) \cap O_i$ où $O_i$ est l'ouvert élémentaire $\{x \in [0,1]^{\mathbb{N}} / \ x_i \neq 0\}$

(d) Soit $y \in f(U)$. On a $y = f(x)$ avec $x \in U$. Soit $i$ tel que $x \in U_i$ et $U_i \subset U$. Alors $y \in f(U_i) \subset f(U)$ et $f(U_i)$ ouvert dans $f(X)$ d'après ce qui précède, donc $f(U)$ est voisinage de $y$ dans $f(X)$.

4. On déduit des points précédents que si $X$ est régulier, localement métrisable et admet une base dénombrable d'ouverts, alors $X$ est homéomorphe à une partie de $[0,1]^{\mathbb{N}}$. Cet espace étant métrisable comme produit dénombrable de métrisables, $X$ est lui-même métrisable.

5. Soit $d$ une distance de $X$, $U$ un ouvert de $X$ et $y \in U$. Si $r$ est assez petit, la boule ouverte $B(y, r)$ centrée en $y$ de rayon $r$ est contenue dans $U$. Alors $V = B(y, r/2)$ est un voisinage ouvert de $y$ d'adhérence contenue dans $B(y, r)$ donc dans $U$.

6. (a) Soit $d$ une distance de $X$. Si $D$ est une partie dense de $X$, alors l'ensemble des boules centrées en les points de $D$ et de rayons rationnels est une base dénombrable d'ouverts de $X$.

   (b) Si $(O_i)_{i \in I}$ est une base d'ouverts de $X$, on se donne pour chaque $i \in I$, un point $x_i \in O_i$. Alors $D = \{x_i, \ i \in I\}$ est une partie dense de $X$. Cela montre que si $X$ admet une base dénombrable d'ouverts, alors $X$ est séparable (sans supposer $X$ métrisable).