Corrigé

Exercice 1.

1. On montre que l'image de f est ouverte est fermée dans X, ce qui implique la conclusion au vu de la connexité de X. $f(Y)$ est ouverte car f est un homéomorphisme local. Pour montrer que $f(Y)$ est fermée, on considère un point x dans l'adhérence de $f(Y)$. Il existe alors une suite $x_n = f(y_n)$ de points de $f(Y)$ tendant vers x. Comme l'ensemble $\{x_n, n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ est compact, il en est de même de sa préimage (car f est propre), et on peut supposer que la suite y_n a une limite y. Par continuité de f, on a alors $f(y) = x$, donc $x \in f(Y)$. En fait, cet argument implique que f est une application fermée.

2. L'application f est un bijection continue, et c'est un homéomorphisme local. Si y est un point de Y est U un voisinage de y, alors il existe un voisinage ouvert V de y contenu dans V dont l'image est un voisinage de $f(x)$. L'inverse de f est donc continue.

3. La préimage $f^{-1}(x)$ est compacte. Si elle n'est pas finie, elle contient donc une suite convergente y_n de points tous distincts et sa limite y. Comme f est un homéomorphisme local en y, la restriction de f a un voisinage de y est injective, ce qui contredit le fait que $f(y_n) = x$ et que les points y_n sont tous distincts.

4. Soit x_0 un point ayant n préimages $y_1, \ldots, y_n$. Alors il existe des voisinages ouvert V_i de x_i tel que la restriction f_i de f à V_i est un homéomorphisme sur son image U_i. On peut supposer que les V_i sont deux à deux disjoints. Posons alors $U = \cap U_i$, qui est un voisinage ouvert de x_0. Pour tout $x \in U$, les points $f_i^{-1}(x)$ sont des préimages distinctes de x, donc $n(x) \geq n = n(x_0)$.

5. En gardant les notations ci-dessus, on pose $W_i = f_i^{-1}(U)$, et on considère le complémentaire $\tilde{Y}$ de $\cup W_i$ dans Y. Comme f est une application fermée (montré dans la première question), $f(\tilde{Y})$ est fermé. Comme x n'est pas contenu dans ce fermé, il existe un voisinage $U_1 \subset U$ de x disjoint de ce fermé, et donc sur lequel les points ont exactement n préimages. On conclut que la fonction $n(x)$ est localement constante, et donc constante.

6. Considérons le point x_0 et les ouverts U et W_i ci-dessus. Comme $n(x)$ est constant, on a bien $f^{-1}(U) = \cup W_i$.

7. Comme le nombre $n_0(x)$ de préimages de x par f_0 n'est pas constant, f_0 n'est pas un revetement. Elle n'est donc pas propre.

Exercice 2.

1. Pour tout x, h dans H et $t > 0$, on a
$$\langle F(x+th) - F(x), h\rangle / t \geq a\|h\|^2.$$
En trenant la limite $t \to 0$, on obtient
$$\langle dF(x)h, h\rangle \geq a\|h\|^2.$$
On conclut par le théorème de Lax-Milgram que c'est un isomorphisme, et donc que F est un difféomorphisme local en chaque point.

2. Comme $\|F(x) - F(0)\| \geq a\|x\|$, l'application F est propre si H est de dimension finie. En dimension infinie, on en conclut que la preimage d'un compact est bornéee, mais pas qu'elle est compacte.

3. Soit $x(0)$ la préimage de $y(0)$. Soit T^+ le plus grand réel tel que l'on peut trouver la courbe $x(t)$ sur $[0, T^+[$. Comme F est un diffeomorphisme local au voisinage de $x(0)$, on a $T^+ > 0$. Supposons que T^+ est fini. Comme $F(x(t)) = y(t)$, on a $dF_{x(t)} \cdot x'(t) = y'(t)$, et comme y' est bornée sur $[0, T^+]$, on conclut que x' est bornée (car $\|dF(x)h\| \geq a\|h\|$). Donc la courbe $x(t)$ est Lipschitz, elle se prolonge donc par continuité en T^+. Comme F est un difféomorphisme local en $x(T^+)$, $x(t)$ se prolonge alors au dela de T^+, ce qui est une contradiction. On a donc $T^+ = \infty$. On conclut que F est surjective, elle est aussi injective, et, comme c'est un difféomorphisme local, c'est un difféomorphisme global.

Exercice 3.

1. L'application $\pi \circ L$ s'annule ser $\mathbb{R}v$, et donc, par le théorème du cours, elle se factorise par ce sous-espace en une application $\tilde{L}$ telle que $\tilde{L} \circ \pi = \pi \circ \tilde{L}$.

2. Quitte à remplacer L par $L - \lambda I$, on peut supposer que $\lambda = 0$.

   Supposons que $\tilde{L}$ est un isomorphisme. On a alors $\pi(G) = \mathrm{im}(\tilde{L}) = E$ donc $\mathbb{R}v + G = B$. De plus, si $Ly \in \mathbb{R}v$, alors $\tilde{L}(\pi(y)) = 0$, donc $\pi(y) = 0$, donc $y \in \mathbb{R}v$, ce qui implique que $Ly = 0$. On déduit que G est un supplémentaire algébrique de $\mathbb{R}v$, et que le noyau de L est égal à $\mathbb{R}v$. De plus, comme G est un supplémentaire algébrique de $\ker L$, on a $L(G) = L(B) = G$.

   Montrons que G est fermé. On constate pour ceci que

   $$\|Ly\| \geq \|\pi(Ly)\| = \|\tilde{L}\pi(y)\| \geq a\|\pi(y)\|.$$

   Comme π est la projection sur $B/\ker L$, on conclut par le critère du cours que l'image G de L est fermée. On considère finalement l'application linéaire

   $$(s, g) \mapsto sv + Lg.$$

   Son noyau est contenu dans $\mathbb{R}v \cap G$, donc il est nul. Son image est $\mathbb{R}v + L(G) = \mathbb{R}v + G = B$. C'est donc un isomorphisme algébrique continu, et donc un isomorphisme de Banach.

   Réciproquement, si G est un supplémentaire de $\mathbb{R}v$, alors $\tilde{L}$ est surjective.

   Soit $y \in \ker L$. Il existe alors un unique $g \in G$ tel que $\pi(g) = y$. Comme $\tilde{L}\pi(g) = 0$, il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $L(g) = tv$. Ceci implique que $(-t, g)$ est dans le noyau de notre isomorphisme, et donc que $g = 0$.

   On a montré que $\tilde{L}$ est un isomorphisme algébrique, et donc un isomorphisme de Banach.

3. On calcule la derivée de F par rapport aux variables (t, w) au point $(L, \lambda, 0)$. On trouve

   $$\partial_{(t,w)} F(\lambda, 0) \cdot (s, g) = sv + (L - \lambda)g.$$

   C'est un isomorphisme (sur B), on applique les théorème des fonctions implicites, et on trouve une application $t(l), w(l) : U \to \mathbb{R} \times G$ tels que $F(l, t(l), w(l)) = 0$, c'est à dire telle que $l(v + w(l)) = t(l)(v + w(l))$.

4. Soient λ_i et v_i les valeurs propres et des vecteurs propres correspondants. On vérifie que les vecteurs propres v_i sont non dégénérés. On peut donc appliquer la question précédente, qui donne des applications locales $\lambda_i(l), v_i(l)$. On a alors le résultat en considérant la matrice $P(l)$ dont les colonnes sont les vecteurs $v_i(l)$ et la matrice diagonale $D(l)$ de coefficients diagonaux égaux à $\lambda_i(l)$. On remarque que $P(l)$ est inversible sur U si U est assez petit puisque l'ensemble des matrices inversibles est ouvert.

Exercice 4.

1. $J^*(J'(l)) \cdot v = J'(l)(J(v)) = J(v) \cdot l = l(v)$.

2. Si B est reflexif, J est un isomorphisme, donc J^* aussi, donc J' aussi, par la formule ci-dessus.

   Si B' est reflexif, alors J' est un isomorphisme, donc J^* aussi. Comme on sait que J est d'image fermée (car c'est une isométrie) on a $\mathrm{im} J = (\ker J^*)^\circ = B''$, donc B est reflexif.