Examen de logique, 27 janvier 2015.
Salles Henri Cartan et U/V
Vous n'avez pas le droit aux documents

Tous les exercices supposeront l'axiome du choix et nous travaillerons dans ZFC.
Dans chaque exercice, vous pouvez supposer les résultats des questions précédentes pour prouver une question.

Exercice 1. Soit $X \in \mathcal{U}$, où $(\mathcal{U}, \in)$ est un modèle de ZFC.

(1) Posons $f(0) = X$, et pour $n \in \omega$, $f(n+1) = \bigcup_{x \in f(n)} x$. Montrez que $Y = \bigcup_{n \in \omega} f(n)$ est transitif et est contenu dans tout ensemble transitif contenant X.
(2) Pourquoi Y est-il un élément de $\mathcal{U}$?
(3) Donnez une formule définissant le graphe de la relation fonctionnelle qui à un ensemble X associe la clôture transitive de X.
(4) Soit κ un cardinal régulier. Montrez que si X est un ensemble transitif, contenu dans V, et de cardinalité $< \kappa$, alors $X \in V_\kappa$.

Démonstration. (1) Si $a \in Y$, alors il existe $n \in \omega$ tel que $a \in f(n)$, et donc on aura $a \subset f(n+1)$, et $a \subset Y$. Y est bien transitif.
Soit Z transitif contenant X. Nous allons montrer qu'il contient $f(n)$ pour tout $n \in \omega$. Pour $n = 0$, c'est l'hypothèse. Supposons $f(n) \subset Z$, et soit $a \in f(n+1)$. Alors il existe $b \in f(n) \subset Z$ tel que $a \in b$, et par transitivité de Z, on a $a \in Z$. Cela montre que Z contient tous les éléments de $f(n+1)$. Il contiendra donc $Y = \bigcup_{n \in \omega} f(n)$.

(2) Par définition, Y est l'image de la fonction f (de domaine ω, un ensemble). Il nous faut donc montrer que cette fonction est bien une relation fonctionnelle, c'est à dire que son graphe est bien définissable. La fonction f est définie par induction (cf exercice 5 pour l'énoncé), en utilisant la classe $\mathcal{U}$, et la relation fonctionnelle F qui au graphe $\Gamma \subset \alpha \times \mathcal{U}$ d'une fonction, associe $\bigcup_{x \in \pi_2(\Gamma)} x$ si $\Gamma \neq \emptyset$, et à $\emptyset$ associe X, i.e.,

$$F(y, z) := (y = \emptyset \wedge z = X) \vee (y \neq \emptyset \wedge \forall v\, [v \in z \leftrightarrow \exists t, u\, ((t, u) \in y \wedge v \in u)]).$$

L'énoncé du lemme d'induction nous dit alors que le graphe de $f|_\omega$ est dans $\mathcal{F}$. Donc l'image de f, Y, est dans $\mathcal{U}$.

(3) $G(x, y)$ dit : y est transitif, contient x, et est le plus petit ensemble transitif contenant x. Donc $x \subseteq y \wedge \forall z, t\, (t \in y \wedge z \in t \to z \in y) \wedge \forall w[(x \subseteq w \wedge \forall z, t\, (t \in w \wedge z \in t \to z \in w)) \to (y \subseteq w)]$, where $x \subseteq y$ est une abbréviation pour $\forall z\, (z \in x \to z \in y)$.

(4) Nous avons la relation fonctionnelle rg définie sur V et qui associe à un élément x de V le plus petit ordinal α tel que $x \in V_\alpha$. Nous allons montrer que si $x \in X$, alors $\mathrm{rg}(x) < \kappa$. Nous savons que, comme X est transitif, si $x \in X$, alors sa clôture transitive est contenue dans X et est donc de cardinalité $< \kappa$. Supposons qu'il existe $x \in X$ avec $\mathrm{rg}(x) \geq \kappa$, et prenons un tel $x \in X$ avec $\mathrm{rg}(x) = \alpha$ minimal (tel que $\alpha \geq \kappa$). Nous savons que α est successeur. Soit $y \in x$; alors $\mathrm{rg}(y) < \alpha$ car $y \in x$, et donc, par minimalité de α, nous avons $\mathrm{rg}(y) < \kappa$. Tous les

éléments de x sont donc de rang $< \kappa$, et nous savons qu'il y en a $< \kappa$. Comme κ est régulier, il suit que $\sup_{y \in x} \mathrm{rg}(y) = \lambda < \kappa$, et donc $x \in V_{\lambda+1}$. Mais $\lambda + 1 < \kappa$, ce qui nous donne la contradiction désirée. Cela montre que si $x \in X$, alors $\mathrm{rg}(x) < \kappa$. Le même raisonnement nous donne alors, en prenant $\lambda = \sup_{x \in X} \mathrm{rg}(x)$, que $X \in V_{\lambda+1}$, et $\lambda + 1 < \kappa$.

Exercice 2. (Ensembles clos cofinaux et stationnaires). Soit λ un cardinal régulier $> \aleph_0$. Un sous-ensemble Y de λ est *clos cofinal* s'il est *clos* (si $Z \subset Y$ et $\mathrm{card}(Z) < \lambda$ alors $\sup Z \in Y$), et cofinal dans λ. Un sous-ensemble Z de λ est *stationnaire* si pour tout sous-ensemble clos cofinal Y de λ on a $Y \cap Z \neq \emptyset$.

(1) Montrez que l'intersection de deux ensembles clos cofinaux est clos cofinal.
(2) Montrer que si $\mathrm{card}(I) < \lambda$ et $(X_i)_{i \in I}$ est une famille d'ensembles clos cofinaux (de λ), alors $\bigcap_{i \in I} X_i$ est clos cofinal.
(3) Soit $\mu < \lambda$ un cardinal infini et régulier. Montrez que l'ensemble des ordinaux de cofinalité μ est stationnaire.
(4) Montrez que les trois propriétés suivantes sont équivalentes (nous travaillons dans $\mathcal{P}(\lambda)$) :
    (a) Il existe deux ensembles stationnaires disjoints.
    (b) Il existe au moins un ensemble stationnaire qui ne contient pas d'ensemble clos cofinal.
    (c) Le filtre engendré par les ensembles clos cofinaux n'est pas un ultrafiltre.

Démonstration. (1) Soient X et Y des ensembles clos cofinaux. Alors leur intersection est close : si $Z \subset X \cap Y$ est de cardinalité $< \lambda$, alors $\sup Z \in X$ et $\sup Z \in Y$. Il faut maintenant montrer que $X \cap Y$ est cofinal dans λ. Soit $\alpha = \alpha_0 \in \lambda$. Nous construisons par induction une suite strictement croissante α_n, $n \in \omega$, de la façon suivante : si n est impair, on prend $\alpha_n > \alpha_{n-1}$ dans X, et si n est pair, on prend $\alpha_n > \alpha_{n-1}$ dans Y (c'est possible, par cofinalité de X et de Y dans λ). Alors l'élément $\alpha = \sup_{n \in \omega} \alpha_{2n} = \sup_{n \in \omega} \alpha_{2n+1}$ est dans X et dans Y, car X et Y sont clos.

(2) Essentiellement la même preuve que dans (1) montre que $\bigcap_i X_i$ est clos. Soit $\mu = \mathrm{card}(I)$, sans perte de généralité on supposera que $I = \mu$. Soit $\beta \in \lambda$, et choisissons une fonction strictement croissante $f : \mu\omega \to \lambda$ telle que $f(0) \geq \alpha_0$, et si $\nu \in \mu\omega$ s'écrit $\nu = \mu n + \rho$, avec $\rho < \mu$, alors $f(\nu) \in X_\rho$ (c'est possible puisque X_ρ est cofinal dans λ, et parce que $\mathrm{card}(\mu\omega) = \mu < \lambda = \mathrm{cof}(\lambda)$). On prend

$$\alpha = \sup_{\nu \in \mu\omega} f(\nu) = \sup_{n \in \omega} f(\mu n + \rho) \text{ pour } \rho < \mu.$$

Alors $\alpha \in X_\rho$ pour tout $\rho \in \mu$.
Il y avait aussi une preuve un peu plus simple : si $\alpha \in \lambda$, on pose $\alpha_0 = \alpha$; puis on construit, par induction sur $n \in \omega$, des éléments $\alpha_i^n \in X_i$, $i \in I$, satisfaisant les conditions suivantes :
Si $\alpha_n = \sup_{i \in I} \alpha_i^{n-1}$, alors $\alpha_i^n > \alpha_n$.
Notez que $\alpha_n < \lambda$ car λ est régulier et $\mathrm{card}(I) < \lambda$. Le fait que la famille $(\alpha_i^n)_{i \in I}$ soit dans $\mathcal{U}$

vient du fait qu'on peut choisir α_i^n de façon définissable, comme le plus petit élément de X_i qui est $> \alpha_n$, et un tel α_i^n existe par cofinalité de X_i. Alors

$$\beta := \sup_{n\in\omega} \alpha_n = \sup_{n\in\omega} \alpha_i^n$$

pour tout $i \in I$, et donc $\beta \in \bigcap_{i\in I} X_i$.

(3) Soit S l'ensemble des ordinaux $< \lambda$ de cofinalité μ, et soit X un ensemble clos et cofinal. Comme λ est régulier, on sait que $\mathrm{card}(X) = \lambda$, et en fait, $\mathrm{cf}(X) = \lambda$: si $f : \alpha \to X$ est strictement croissante et cofinale dans X, alors f est aussi cofinale dans λ. Il suit que $\mathrm{cf}(X) = \lambda$, et qu'il existe une fonction $f : \lambda \to X$, strictement croissante et cofinale dans X. Comme $\mu < \lambda$, $\alpha = \sup_{\nu\in\mu} f(\nu) \in X$. De plus, on a que $\mathrm{cf}(\alpha) \leq \mu < \lambda$. Comme la suite $f(\nu)$, $\nu \in \mu$ est strictement croissante et μ est régulier, en fait $\mathrm{cf}(\alpha) = \mu$, et donc $\alpha \in S$.

Quelqu'un a essayé de montrer que l'ensemble des ordinaux de cofinalité μ est clos cofinal. Il est certainement cofinal (si $\alpha < \lambda$, alors $\alpha + \mu$ est de cofinalité μ) mais a priori il n'est pas clos, si $\mu > \aleph_0$: par exemple $\mu, \mu + \mu = \mu 2, \dots, \mu n, \dots$ pour $n \in \omega$ sont tous de cofinalité μ, mais $\sup_{n\in\omega} \mu n = \mu\omega$ est de cofinalité ω.

(4) (1) montre que les ensembles clos cofinaux engendrent un filtre, notons le $\mathcal{F}_c$. De plus, la définition montre que S est stationnaire si et seulement si $\mathcal{F}_c \cup \{S\}$ a la propriété de l'intersection finie.

(a) implique (b). On suppose S_1 et S_2 stationnaires et disjoints. Supposons que S_1 et S_2 contiennent des ensembles clos cofinaux. Donc S_1 et S_2 sont dans $\mathcal{F}_c$, ce qui est impossible puisque $S_1 \cap S_2 = \emptyset$.

(b) implique (c). Soit S stationnaire ne contenant pas d'ensemble clos cofinal. Alors $\mathcal{F}_c$ ne contient pas S, et ne contient pas non plus le complémentaire de S, car celui-ci contiendrait alors un ensemble clos cofinal C, et on aurait $C \cap S = \emptyset$. $\mathcal{F}_c$ n'est donc pas un ultrafiltre.

(c) implique (a). Soit $S \subset \lambda$ tel que ni S ni $\lambda \setminus S = S'$ ne sont dans $\mathcal{F}_c$. Alors $\mathcal{F}_c \cup \{S\}$ et $\mathcal{F}_c \cup \{S'\}$ ont la propriété de l'intersection finie. Ils sont donc tous deux stationnaires.

Exercice 3. Soit M un modèle non-standard de $\mathcal{P}$ (l'arithmétique de Peano). Je note $\mathbb{N}$ la sous-structure de M engendrée par 0. (Rappel : $\mathcal{L} = \{S, +, \times, 0\}$).

(1) Soit $\varphi(x, \bar{y})$ une formule, et $\bar{a}$ un uplet de M. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $M \models \varphi(n, \bar{a})$. Expliquez pourquoi il existe $c \in M \setminus \mathbb{N}$ tel que $M \models \varphi(c, \bar{a})$.

(2) Soit $\varphi(x, y, z)$ une $\mathcal{L}(M)$-formule. Supposons que $M \models \forall y \forall x < y \exists z\, \varphi(x, y, z)$. Montrez que $M \models \forall y \exists t \forall x < y \exists z < t\ \varphi(x, y, z)$.

(3) Soit Σ un ensemble de formules avec unique variable libre x, qu'on suppose finiment satisfaisable dans M (si $\Sigma_0 \subset \Sigma$ est fini, alors $M \models \exists x \bigwedge_{\varphi\in\Sigma_0} \varphi(x)$), et tel que $\#\Sigma = \{\#\varphi(x) \mid \varphi(x) \in \Sigma\}$ est récursif. (Ici, $\#\varphi$ dénote le numéro de Gödel de φ). On suppose de plus qu'il existe une formule Sat_Σ telle que pour toute formule $\varphi(x) \in \Sigma$,

$$\mathcal{P} \vdash \forall y\, (\mathrm{Sat}_\Sigma(y, \#\varphi(x)) \leftrightarrow \varphi(y)).$$

Montrez qu'il existe $c \in M$ tel que pour tout $\varphi(x) \in \Sigma$, $M \models \varphi(c)$.

(4) Montrez que Σ n'est pas complet, c'est à dire, qu'il existe une formule $\varphi(x)$ telle que $\Sigma \not\vdash \varphi(x)$ et $\Sigma \not\vdash \neg\varphi(x)$.

Démonstration. (1) On regarde l'ensemble S défini par la formule $\neg\varphi(x,\bar{a})$. S'il est vide, alors tout élément de M satisfait $\varphi(x,\bar{a})$. S'il n'est pas vide, alors il a un plus petit élément, et comme cet élément n'est pas 0, il est de la forme $c+1$. Alors $M \models \varphi(c,\bar{a})$, et de plus $c \notin \mathbb{N}$.

(2) Supposons que ce ne soit pas le cas, et soit b minimal tel que

$$M \models \forall t \exists x < b\, \forall z < t\, \neg\varphi(x,b,z).$$

On sait que $b > 0$. Cependant, $M \models \forall x < b\, \exists z\, \varphi(x,b,z)$. Soit $c \leq b$ minimal tel que $M \models \forall t \exists x < c\, \forall z < t\, \neg\varphi(x,b,z)$. Alors $c > 0$; soit t_1 tel que $M \models \forall x < c-1\, \exists z < t_1\, \varphi(x,b,z)$, soit t_2 tel que $M \models \varphi(c-1,b,t_2)$, et enfin prenons $d = \sup\{t_1, t_2+1\}$. Alors $M \models \forall x < c\, \exists z < d\, \varphi(x,b,z)$, ce qui contredit notre définition de c et donne la contradiction désirée.

(3) Soit $R(x)$ la formule Σ_1 représentant la fonction caractéristique de $\#\Sigma$. On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P} \vdash R(n)$ si et seulement si $n \in \#\Sigma$, et $n \notin \#\Sigma$ implique $\mathcal{P} \vdash \neg R(n)$. Par hypothèse, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $M \models \exists y \forall x (x \leq n \wedge R(x)) \to \mathrm{Sat}_\Sigma(y,x)$. Par (1), il existe donc un élément $a \in M \setminus \mathbb{N}$ tel que $M \models \exists y \forall x (x \leq a \wedge R(x)) \to \mathrm{Sat}_\Sigma(y,x)$. Soit $c \in M$ tel que $M \models \forall x (x \leq a \wedge R(x)) \to \mathrm{Sat}_\Sigma(c,x)$. Alors pour tout $n \in \#\Sigma$, $M \models \mathrm{Sat}_\Sigma(n,c)$ et donc c satisfait toutes les formules de Σ.

(4) C'est une simple application du théorème d'incomplétude : comme $\Sigma(x)$ est récursif, il ne peut être complet, car alors l'ensemble de ses conséquences qui sont des énoncés serait une théorie complète décidable contenant $\mathcal{P}$.

Exercice 4. (Relations d'équivalence emboitées). Si E est une relation d'équivalence, on appelle E-classe une classe d'équivalence pour la relation E. On considère $\mathcal{L} = \{E_0, E_1\}$ (E_0, E_1 relations binaires), et T_1 la théorie qui dit que : (i) E_0 et E_1 sont des relations d'équivalence ; (ii) il existe un nombre infini d'E_0-classes : (iii) chaque E_1-classe est infinie et contenue dans une E_0-classe ; (iv) chaque E_0-classe contient une infinité de E_1-classes.

(1) Donnez une axiomatisation de T_1 (ce sera en fait un schéma d'axiomes).
(2) Soient M et N deux modèles de T_1. Montrez que la famille $\mathcal{I}$ des $\mathcal{L}$-isomorphismes partiels de domaine fini contenu dans M et d'image contenue dans N, a la propriété du va-et-vient : si $f \in \mathcal{I}$ et $a \in M, b \in N$, alors il existe $g \in \mathcal{I}$ ayant a dans son domaine et b dans son image, et qui prolonge f. [Il est plus facile de décomposer en "va" et "vient"].
(3) Montrez que deux modèles dénombrables de T_1 sont isomorphes, et déduisez-en que T_1 est complète.
(4) La théorie T_1 élimine-t-elle les quantificateurs ? (Justifiez votre réponse.)
(5) Donnez un exemple de modèles M et N de T_1 de cardinalité $\aleph_1$ qui ne sont pas isomorphes.
(6) On considère maintenant $\mathcal{L}_\omega = \{E_n \mid n \in \omega\}$ où les E_n sont binaires, et T_ω la théorie qui dit que les E_n sont des relations d'équivalence, qu'il existe un nombre infini d'E_0-classes, que chaque E_{n+1}-classe est contenue dans une E_n-classe, et enfin que chaque E_n-classe contient une infinité de E_{n+1}-classes. Répondez, sans donner de justification, aux questions suivantes :

(a) La théorie T_ω élimine-t-elle les quantificateurs ?
(b) La théorie T_ω est-elle complète ?
(c) La théorie T_ω est-elle décidable ?
(d) Combien y a-t-il de modèle dénombrables (à isomorphisme près) de T_ω ?
(e) Pour quels cardinaux infinis κ avons-nous que deux modèles de T_ω de cardinalité κ sont toujours isomorphes ?

Démonstration. (1) (i) $\forall x, y, z\, E_0(x, x) \wedge (E_0(x, y) \to E_0(y, x)) \wedge ((E_0(x, y) \wedge E_0(y, z)) \to E_0(x, z))$; $\forall x, y, z\, E_1(x, x) \wedge (E_1(x, y) \to E_1(y, x)) \wedge ((E_1(x, y) \wedge E_1(y, z)) \to E_1(x, z))$.
(ii) (n) $\exists x_1, \ldots, x_n \bigwedge_{i \neq j} \neg E_0(x_i, x_j)$
(iii) (n) $\forall x \exists y_1, \ldots, y_n \bigwedge_{i=1}^{n} E_1(y_i, x) \wedge \bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} y_i \neq y_j$; $\forall x, y\, E_1(x, y) \to E_0(x, y)$.
(iv) (n) $\forall x\, \exists y_1, \ldots, y_n \bigwedge_{1 \leq i \leq n} E_0(x, y_i) \wedge \bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} \neg E_1(y_i, y_j)$.

(2) Soit $f \in \mathcal{I}$, de domaine A et d'image B, et soit $a \in M$; nous voulons trouver g prolongeant f et ayant a dans son domaine. Si $a \in A$, on prend $g = f$. Sinon, il y a plusieurs cas :
Cas 1 : il existe $a' \in A$ tel que $E_1(a, a')$.
On prend $b \in N \setminus B$ tel que $N \models E_1(b, f(a'))$. (Possible par (iii)).
Cas 2 : non cas 1, et il existe $a' \in A$ tel que $E_0(a, a')$.
On prend $b \in N \setminus B$ tel que $N \models E_0(b, f(a'))$, et tel que b ne soit dans l'E_1-classe d'aucun élément de B. (C'est possible par (iv)).
Cas 3 : pour tout $a' \in A$, $\neg E_0(a, a')$.
On prend $b \in N$ tel que $\neg E_0(b, b')$ pour tout $b' \in B$. (Possible par (ii))
Alors $g = f \cup \{(a, b)\} \in \mathcal{I}$ est la fonction désirée.
L'autre direction est faite de la même façon.

(3) Supposons M et N dénombrables, et soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des énumérations de M et N. En utilisant la propriété du va-et-vient, on trouve une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{I}$, telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n ait $a_0, \ldots, a_n$ dans son domaine, et $b_0, \ldots, b_n$ dans son image. Alors $f = \bigcup_{n \in \omega} f_n$ sera un isomorphisme, de domaine M et d'image N.

Soient M' et N' deux modèles quelconques de T. Par Löwenheim-Skolem descendant, il existe $M \prec M'$ et $N \prec N'$ dénombrables. Alors $M \simeq N$, et donc $M' \equiv N'$, ce qui montre que T_1 est complète ... à condition que T_1 ait des modèles!! Nous avions implicitement supposé qu'elle en avait. Voici un exemple : On prend $M = \mathbb{N}^3$, et on définit $E_0((a, b, c), (a', b', c'))$ si et seulement si $a = a'$, et $E_1((a, b, c), (a', b', c'))$ si et seulement si $a = a'$ et $b = b'$.

(4) Oui : le (1) montre que si les uplets $\bar{a} \in M$ et $\bar{b} \in N$ satisfont les mêmes formules sans quantificateurs, et si $c \in M$ alors il existe $d \in N$ tel que $(\bar{a}, c)$ et $(\bar{b}, d)$ satisfont les mêmes formules sans quantificateurs. C'est un des critères pour l'élimination des quantificateurs.

(5) On prend le modèle dénombrable M_0, on choisit un élément $a \in M$, et on prend deux ensembles C_1 et C_2 de cardinalité $\aleph_1$. Notre structure M_1 a univers $M_0 \cup C_1$, contient M_0 comme sous-structure, et les éléments de C_1 sont dans la E_1-classe de a. Notre structure M_2 contient M_1 comme sous-structure, a univers $M_1 \cup C_2$, et C_2 est contenu dans la E_0-classe de a, mais est disjoint de la E_1-classe de a.

(6) Si $\mathcal{L}_n = \{E_0, E_1, \ldots, E_n\} \subset \mathcal{L}_\omega$ et $T_n = \mathrm{Th}(T_\omega) \cap \mathcal{L}_n$, alors la preuve de va-et-vient donnée

ci-dessus pour T_1 marche aussi. [On aura maintenant plus de cas : cas 0 : $a \in A$; cas 1 : non cas 0, et il existe $a' \in A$ tel que $E_n(a,a')$; cas 2 : non cas 1 et il existe $a' \in A$ tel que $E_{n-1}(a,a')$; ... ; cas $n+1$: non cas n et il existe $a' \in A$ tel que $E_0(a,a')$; cas $n+2$: pour tout $a' \in A$, $\neg E_0(a,a')$].
Comme T_ω est la limite des T_n, on obtient donc que T_ω élimine les quantificateurs et est complète. Comme son axiomatisation est récursivement énumérable, elle est donc décidable. Elle a $2^{\aleph_0}$ modèles dénombrables deux à deux non isomorphes. Pour voir cela, considérons la relation d'équivalence $E_\infty = \bigcap_{n\in\omega} E_n$. Alors T_ω a un modèle dénombrable M_0 dans lequel chaque E_∞-classe est un singleton. [Voici un exemple : soit $M_0 = \mathbb{N}^{(\omega)}$ la somme directe de ω copies du goupe $\mathbb{Z}$; ses éléments sont donc ceux de $\mathbb{N}^\omega$ ayant support fini. On interprète E_n sur M_0 par $E_n(x,y)$ ssi $x(i) = y(i)$ pour tout $i \leq n$; alors chaque E_∞-classe est réduite à un élément.] Fixons une énumération $(a_n)_n$ de M_0. Alors pour chaque sous-ensemble $S \subset \mathbb{N}$, on peut construire un modèle M_S de T_ω contenant M_0 comme sous-structure, et obtenu en ajoutant à la E_∞-classe de a_n n nouveaux éléments si $n \in S$, et ne faisant rien si $n \notin S$. Alors $n \in S$ ssi M_S a une E_∞-classe ayant exactement $n+1$ éléments. Pour tous cardinal infini κ, il existera donc au moins 2 modèles de T_ω de cardinalité κ et non isomorphes.

Exercice 5. Nous travaillons dans un modèle $(\mathcal{U}, \in)$ de ZFC. Je rappelle qu'une relation fonctionnelle est une fonction dont le graphe est définissable dans $\mathcal{U}$ (mais n'est pas nécéssairement un élément de $\mathcal{U}$). Le but de cet exercice est de donner explicitement la formule qui permet de définir une relation fonctionnelle en utilisant l'induction, plus précisément, la formule permettant de définir la fonction f donnée ci-dessous (qui est un résultat du cours) :
Soient S une collection, $\mathcal{F}$ la collection des applications de domaine un ordinal et prenant leurs valeurs dans S, et F une relation fonctionnelle de domaine $\mathcal{F}$, à valeurs dans S. Alors il existe une relation fonctionnelle f, et une seule, définie sur les ordinaux, telle que $f|_\alpha$ soit dans $\mathcal{F}$ pour tout ordinal α, et satisfasse

$$f(\beta) = F(f|_\beta), \quad \textit{pour tout } \beta < \alpha. \tag{$*$}$$

A chaque étape vous pourrez utiliser les formules trouvées dans les étapes précédentes, ainsi que les abbréviations usuelles $x \subset y$, $z = (x,y)$, $x \times y$, $\mathcal{P}(x)$, $x = \emptyset$, ...

(1) La collection S étant définie par la formule φ_S, et la collection des ordinaux par la formule On, quelle est la formule $\varphi_\mathcal{F}$ définissant $\mathcal{F}$?
(2) Le graphe de la relation fonctionnelle F étant défini par Γ, quelle est la formule E définissant $f(\emptyset)$?
(3) Quelle est la formule définissant le graphe de f ?
(4) Nous voulons appliquer ce résultat à la relation fonctionnelle $y = V_x$. (Je rappelle que $V_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{P}(V_\beta)$). Donnez les formules définissant la collection S et la relation fonctionnelle F qui permettent de définir la relation fonctionnelle $y = V_x$ en utilisant le lemme d'induction donné ci-dessus.
(5) Quelle est la formule exprimant que tout élément est dans V (la réunion des V_α).

Démonstration. (1) f est dans $\mathcal{F}$ ssi il existe un ordinal α et f est le graphe d'une fonction de α dans S. Donc, $\varphi_{\mathcal{F}}(x) := \exists y, z\,(\mathrm{On}(y) \wedge \forall t \in z \varphi_S(t)) \wedge \forall u \in y \exists t \in z\,((u,t) \in x \wedge \forall t_1 \in z, t_2 \in z\,(u,t_1) \in x \wedge (u, t_2 \in x) \to t_1 = t_2)$.

(2) $E(x) := \exists y\,\mathrm{Vide}(y) \wedge \Gamma(y,x)$.

(3) $y = f(\alpha)$ ssi il existe $g \in \mathcal{F}$, de domaine α, et telle que pour tout $\beta < \alpha$, si $c = g \cap (\beta \times S)$, alors $g(\beta) = F(c) \wedge y = F(g)$. Donc,
$y = f(\alpha) := \exists g\,[\varphi_{\mathcal{F}}(g) \wedge (\forall u, v\,(u,v) \in g \to u \in \alpha) \wedge \forall \beta \in \alpha \forall c\,(c = g \cap \beta \times S) \to (\forall d(\beta, d) \in g \leftrightarrow \Gamma(c,d)) \wedge \Gamma(g,y)]$. Ici, $c = g \cap (\beta \times S)$ est une abbréviation pour : $\forall t\,(t \in c) \leftrightarrow (t \in g \wedge \exists t_1, t_2\, t = (t_1, t_2) \wedge t_1 \in \beta \wedge \varphi_S(t_2))$.

(4) La collection S est $\mathcal{U}$, et la relation fonctionnelle F est celle qui à une fonction $g \in \mathcal{F}$ associe $\bigcup_{z \in \mathrm{Im}(g)} \mathcal{P}(z)$. Et bien sur, $z \in \mathrm{Im}(g)$ est une abbréviation pour $\exists u\,(u,z) \in g$.

(5) $\forall x \exists \alpha, y\,\mathrm{On}(\alpha) \wedge y = V_\alpha \wedge x \in y$.