Partiel de logique, 17 novembre 2015
Salles Henri Cartan
Vous n'avez pas le droit aux documents

Tous les exercices supposeront l'axiome du choix (AC).
Dans chaque exercice, vous pouvez supposer les résultats des questions précédentes pour prouver une question.

Exercice 1. Soient $\mathcal{L}$ un langage, T_1 et T_2 des théories, avec $T_1 \cup T_2$ une théorie cohérente, et Δ un ensemble d'énoncés clos par disjonction finie. Nous allons montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
(i) Il existe $\Gamma \subseteq \Delta$ tel que $T_1 \cup T_2 \models \Gamma$ et $T_1 \cup \Gamma \models T_2$.
(ii) Pour tous modèles M et N de T_1, si $M \models T_2$ et N satisfait tous les énoncés de Δ satisfaits par M, alors $N \models T_2$.

(1) Vérifiez que (i) implique (ii).

(2) Soient $\Gamma = \{\psi \in \Delta \mid T_1 \cup T_2 \models \psi\}$, $N \models T_1 \cup \Gamma$, et $\Sigma = \{\neg\psi \mid \psi \in \Delta,\, N \models \neg\psi\}$. Montrez que $T_1 \cup T_2 \cup \Sigma$ est cohérente.

(3) Déduisez-en que (ii) implique (i).

Solution. (1) On suppose (i), et que $M \models T_1 \cup T_2$. Comme $T_1 \cup T_2 \models \Gamma$, on a $M \models \Gamma$; alors aussi $N \models \Gamma$, et donc $N \models T_2$.

(2) Supposons que $T_1 \cup T_2 \cup \Sigma$ soit contradictoire. Puisque $T_1 \cup T_2$ est cohérente, il existe $\neg\psi_1, \ldots, \neg\psi_m \in \Sigma$ tels que $T_1 \cup T_2 \vdash \neg(\neg\psi_1 \wedge \cdots \wedge \neg\psi_m)$, c'est-à-dire $T_1 \cup T_2 \vdash \psi_1 \vee \cdots \vee \psi_m$. Mais alors $\psi_1 \vee \cdots \vee \psi_m \in \Gamma$ (par définition de Γ, et puisque Δ est clos par disjonction finie), et on obtient la contradiction désirée : $N \models \psi_1 \vee \cdots \vee \psi_m$ puisque $N \models T_1 \cup \Gamma$; $N \models \neg\psi_1 \wedge \cdots \wedge \neg\psi_m$ par définition de Σ.

(3) Supposons (ii). On définit Γ comme dans (2), et on a alors évidemment $T_1 \cup T_2 \models \Gamma$. On veut maintenant montrer que $T_1 \cup \Gamma \models T_2$. Soient N un modèle de $T_1 \cup \Gamma$, Σ défini comme dans (2), et M un modèle de $T_1 \cup T_2 \cup \Sigma$. Si $\psi \in \Delta$ est satisfait par M, alors $\neg\psi \notin \Sigma$, et donc $N \not\models \neg\psi$, i.e., $N \models \psi$. Par (ii), cela entraine que $N \models T_2$. Nous avons donc montré que tout modèle de $T_1 \cup \Gamma$ est un modèle de T_2, ce qui montre que $T_1 \cup \Gamma \models T_2$.

Exercice 2. On se place dans le langage $\mathcal{L} = \{\mathcal{R}\}$, où $\mathcal{R}$ est un symbole de relation binaire. Écrire, dans ce langage, une preuve formelle de l'énoncé

$$\forall x\, \forall y\, (x = y \to \forall z\, (\mathcal{R}(x,z) \to \mathcal{R}(y,z))).$$

(On s'autorisera à utiliser les règles de déduction et axiomes dérivés vus en cours, notamment les axiomes du quantificateur $\forall$, de $\forall$-introduction et d'universalisation (à partir de φ on déduit

$\forall x\, \varphi)$; on s'autorisera à appliquer ces axiomes à plusieurs variables à la fois (par exemple, dans le cas de l'axiome du quantificateur $\forall$, si $t_1, \ldots, t_n$ sont des termes, de $\forall x_1 \ldots \forall x_n\ \varphi$, on déduira directement $\varphi(t_1/x_1, \ldots, t_n/x_n)$). On se permettra aussi le fait qu'à partir de preuves de $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ et de $(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n) \to \psi$ on peut prouver ψ (Modus Ponens généralisé).)

Solution.

(1) $\forall x\, \forall y\, \forall z\, \forall t\ ((x = y \wedge z = t \wedge \mathcal{R}(x, z)) \to \mathcal{R}(y, t))$ (Axiome de l'égalité)

(2) $(x = y \wedge z = z \wedge \mathcal{R}(x, z)) \to \mathcal{R}(y, z)$
(Axiome $\forall$ depuis (1), avec x/x, y/y, z/z et z/t)

(3) $\forall z\ z = z$ (Axiome de l'égalité)

(4) $z = z$ (Axiome $\forall$ depuis (3))

(5) $[((A \wedge B \wedge C) \to D) \wedge B] \to [A \to (C \to D)]$
(Tautologie, avec $A = (x = y)$, $B = (z = z)$, $C = (\mathcal{R}(x, z))$ et $D = (\mathcal{R}(y, z))$)

(6) $x = y \to (\mathcal{R}(x, z) \to \mathcal{R}(y, z))$ (Modus Ponens généralisé depuis (2), (4), et (5))

(7) $x = y \to \forall z\ (\mathcal{R}(x, z) \to \mathcal{R}(y, z))$ ($\forall$-introduction depuis (6))

(8) $\forall x\, \forall y\ (x = y \to \forall z\ (\mathcal{R}(x, z) \to \mathcal{R}(y, z)))$ (Universalisation depuis (7))

Quelques remarques après correction. Un bon nombre d'entre vous ont utilisé une version certes juste, mais simplifiée, voire très simplifiée, de l'axiome de l'égalité pour les relations vu en cours (par exemple $\forall x\, \forall y\, \forall z\ (x = y \to (\mathcal{R}(x, z) \to \mathcal{R}(y, z))))$. Ceci rendait la preuve beaucoup plus facile (dans le cas de la version sus-citée, cela supprimait toutes les étapes de (2) à (5)), et je n'ai donc pas compté tous les points dans ce cas.

D'autre part, certain.e.s ont utilisé abusivement le résultat vu en cours disant que si T est une théorie, φ un énoncé et ψ une formule, alors on a $T \vdash \varphi \to \psi$, si et seulement si $T \cup \{\varphi\} \vdash \psi$. Mis à part le fait que l'énoncé demandait d'*écrire* une preuve formelle dans une certaine théorie et non pas de prouver qu'une telle preuve existe (et donc, qu'il n'autorisait pas à changer de théorie en cours de route), on ne peut utiliser ce résultat que lorsque φ est bien un *énoncé*, et certainement pas une formule ayant des variables libres (ce que certain.e.s d'entre vous ont pourtant fait). De façon générale, mettre des énoncés ayant des variables libre à gauche du symbole $\vdash$ n'a pas de sens et peu mener à de grosses erreurs. Par exemple, on pourrait dire de cette façon que $\vdash x = 0 \to x = 0$, donc $x = 0 \vdash x = 0$, donc $x = 0 \vdash \forall x\ x = 0$ par universalisation, et enfin $\vdash x = 0 \to \forall x\ x = 0$, ce qui est complètement faux !

Un autre erreur que j'ai vue : la règle d'universalisation dit que de φ, on peut déduire $\forall x\ \varphi$. Cela ne signifie pas que $\vdash \varphi \to \forall x\ \varphi$, et d'ailleurs cette dernière affirmation est fausse ! (Prendre $x = x$ pour φ comme précédemment.)

Exercice 3. Durant tout l'exercice, on fixe deux cardinaux infinis κ et λ, avec $\lambda > 2^\kappa$. On considère une suite $(f_\alpha)_{\alpha<\lambda}$, où pour tout $\alpha < \lambda$, f_α est une application de λ dans κ. Pour deux ensembles $X, Y \subseteq \lambda$, on notera $X \lhd Y$ si $X \subseteq Y$ et si pour tout $A \subseteq X$ avec $\mathrm{card}(A) \leqslant \kappa$ et tout $\alpha < \lambda$, il existe $\beta \in Y$ tel que f_α et f_β coïncident sur A (attention, la relation $\lhd$ dépend du choix de la suite $(f_\alpha)_{\alpha<\lambda}$).

(1) On veut dans cette question montrer que pour tout $X \subseteq \lambda$ avec $\mathrm{card}(X) \leqslant 2^\kappa$, il existe $Y \subseteq \lambda$ avec $\mathrm{card}(Y) \leqslant 2^\kappa$ tel que $X \lhd Y$. On fixe donc un tel X.

(a) Soit $A \subseteq X$ avec $\mathrm{card}(A) \leqslant \kappa$. Montrer qu'il y a au plus 2^κ applications de A dans κ.

(b) En déduire l'existence d'un ensemble $Y_A \subseteq \lambda$ avec $\mathrm{card}(Y_A) \leqslant 2^\kappa$ et tel que pour tout $\alpha < \lambda$, il existe $\beta \in Y_A$ tel que f_α et f_β coïncident sur A.

(c) Montrer qu'il y a au plus 2^κ parties de X de cardinalité au plus κ.

(d) En déduire que l'ensemble $Y = X \cup \left(\bigcup_{\substack{A \subseteq X \\ \mathrm{card}(A) \leqslant \kappa}} Y_A \right)$ satisfait les propriétés requises.

(2) On veut maintenant montrer l'existence de $X \subseteq \lambda$ tel que $\mathrm{card}(X) \leqslant 2^\kappa$ et $X \lhd X$.

(a) Montrer qu'il existe une suite croissante $(X_\xi)_{\xi<\kappa^+}$ de parties de λ de cardinalité $\leqslant 2^\kappa$ telle que pour tout $\xi < \kappa^+$, on ait $X_\xi \lhd X_{\xi+1}$.

(b) On pose $X = \bigcup_{\xi<\kappa^+} X_\xi$ et on veut montrer que X satisfait les propriétés demandées. Montrer, pour commencer, qu'on a bien $\mathrm{card}(X) \leqslant 2^\kappa$.

(c) Montrer que pour tout $A \subseteq X$ avec $\mathrm{card}(A) \leqslant \kappa$, il existe $\xi < \kappa^+$ tel que $A \subseteq X_\xi$.

(d) En déduire qu'on a bien $X \lhd X$.

(3) On rappelle que pour un ensemble A, on note $[A]^2$ l'ensemble des parties de A à deux éléments. On fixe une application $c : [\lambda]^2 \longrightarrow \kappa$. Dans cette question, on veut montrer le résultat de type Ramsey suivant : il existe $H \subseteq \lambda$ avec $\mathrm{card}(H) = \kappa^+$ qui est *c-homogène*, c'est-à-dire que la restriction de c à l'ensemble $[H]^2$ est constante.

On notera, pour tout $\alpha < \lambda$, $f_\alpha : \lambda \longrightarrow \kappa$ l'application définie par $f_\alpha(\alpha) = 0$ et pour tout $\beta \neq \alpha$, $f_\alpha(\beta) = c(\{\alpha, \beta\}) + 1$. On considère la relation $\lhd$ associée à la suite $(f_\alpha)_{\alpha<\lambda}$, comme définie au début de l'énoncé. Soit $X \subseteq \lambda$ de cardinalité $\leqslant 2^\kappa$ tel que $X \lhd X$, qui existe par la question 2. On choisit $\alpha \in \lambda \setminus X$.

(a) Montrer qu'il existe une suite $(\alpha_\xi)_{\xi<\kappa^+}$ d'éléments de X telle que pour tout $\xi < \kappa^+$, les fonctions f_{α_ξ} et f_α coïncident sur l'ensemble $A_\xi = \{\alpha_\zeta \mid \zeta < \xi\}$.

(b) Montrer que la suite $(\alpha_\xi)_{\xi<\kappa^+}$ est injective. [Indication : pour $\zeta < \xi < \kappa^+$, on pourra montrer que $f_{\alpha_\xi}(\alpha_\zeta) \neq 0$.]

(c) On pose $A = \{\alpha_\xi \mid \xi < \kappa^+\}$. Montrer qu'il existe $H \subseteq A$ de cardinalité κ^+ tel que f_α est constante sur H.

(d) Montrer que H est c-homogène.

Solution. Le but de cet exercice était de démontrer un cas particulier du théorème d'Erdős-Rado, en l'occurence le fait, en reprenant la notation vue en TD, que pour tous cardinaux infinis κ et λ avec $\lambda > 2^\kappa$, on a $\lambda \to (\kappa^+)^2_\kappa$. D'autre part, la question 2 de l'exercice 6 du TD 3 montre que $2^\kappa \nrightarrow (\kappa^+)^2_2$, ce qui montre que l'hypothèse sur λ est optimale

L'énoncé général du théorème d'Erdős-Rado est le suivant : pour tout $n < \omega$ et tous cardinaux infinis κ et λ avec $\lambda > \beth_n(\kappa)$, on a $\lambda \to (\kappa^+)^{n+1}_\kappa$ (où on a posé $\beth_0(\kappa) = \kappa$ et pour tout $n < \omega$, $\beth_{n+1}(\kappa) = 2^{\beth(\kappa)}$). Ce théorème se prouve par récurrence sur n, l'étape d'hérédité se faisant exactement comme cet exercice (simplement, j'ai préféré poser seulement le cas $n = 1$ en examen pour ne pas alourdir les notations et risquer d'embrouiller).

Une petite remarque : une personne a utilisé l'hypothèse du continu pour résoudre une question. L'hypothèse du continu, contrairement à l'axiome du choix par exemple, ne fait pas partie de l'axiomatisation standard des mathématiques (ZFC, que vous verrez à la fin du cours), et n'est pas conséquence de ces axiomes. Vous n'êtes donc pas autorisé.e.s à l'utiliser en examen, à moins que ce ne soit explicitement autorisé par l'énoncé.

(1)(a) Le nombre d'applications de A dans κ est $\mathrm{card}(\kappa^A) = \kappa^{\mathrm{card}(A)} \leqslant \kappa^\kappa \leqslant (2^\kappa)^\kappa = 2^{\kappa\times\kappa} = 2^\kappa$, la dernière égalité étant vraie car κ est infini.

(b) Considérons la relation d'équivalence $\sim$ sur λ définie, pour $\alpha, \beta < \lambda$, par $\alpha \sim \beta \Leftrightarrow f_{\alpha\restriction A} = f_{\beta\restriction A}$. À chaque classe d'équivalence correspond une unique fonction $f_{\alpha\restriction A} : A \longrightarrow \kappa$, et par la question précédente il y a au plus 2^κ telles fonctions, donc il y a au plus 2^κ classes. On prend alors pour Y_A un ensemble de représentants des classes.

(c) On rappelle que $[X]^{\leqslant\kappa}$ désigne l'ensemble des parties de X de cardinalité au plus κ. L'application $X^\kappa \longrightarrow [X]^{\leqslant\kappa}$ qui a une fonction associe son image est une surjection, donc $\mathrm{card}([X]^{\leqslant\kappa}) \leqslant \mathrm{card}(X^\kappa) = \mathrm{card}(X)^\kappa$. Comme $\mathrm{card}(X) \leqslant 2^\kappa$, on a alors $\mathrm{card}([X]^{\leqslant\kappa}) \leqslant (2^\kappa)^\kappa = 2^\kappa$.

(d) Par les deux questions précédentes, Y est réunion d'au plus 2^κ ensembles de cardinalité au plus 2^κ, donc $\mathrm{card}(Y) \leqslant 2^\kappa$. De plus, on a $X \subseteq Y$ et pour tout $A \subseteq \kappa$ avec $\mathrm{card}(A) \leqslant \kappa$ et tout $\alpha < \lambda$, il existe $\beta \in Y_A$ tel que f_α et f_β coïncident sur A ; en particulier, ce β est dans Y. On a donc bien $X \lhd Y$.

(2)(a) On définit par récurrence sur ξ les X_ξ tout en vérifiant en même temps que les conditions requises sont vérifiées. On pose $X_0 = \varnothing$. Pour $\xi < \lambda$, si X_ξ est construit, comme $\mathrm{card}(X_\xi) \leqslant 2^\kappa$, alors par la question 1, il existe $X_{\xi+1} \subseteq \lambda$ de cardinalité $\leqslant 2^\kappa$ tel que $X_\xi \lhd X_{\xi+1}$. Et pour $\xi < \lambda$ limite, si les X_ζ sont construits pour $\zeta < \xi$, alors on pose $X_\xi = \bigcup_{\zeta<\xi} X_\zeta$; la seule condition à vérifier est la condition de cardinalité, mais on a $\mathrm{card}(X_\xi) \leqslant \sum_{\zeta<\xi} \mathrm{card}(X_\zeta) \leqslant \sum_{\zeta<\xi} 2^\kappa = \mathrm{card}(\xi) \times 2^\kappa \leqslant 2^\kappa \times 2^\kappa = 2^\kappa$, l'avant dernière inégalité étant vraie parce que $\mathrm{card}(\xi) \leqslant \xi < \kappa^+ \leqslant 2^\kappa$ (attention, cette condition est nécessaire au bon fonctionnement de la construction de la suite $(X_\xi)_{\xi<\kappa^+}$, et pourtant, un bon nombre d'entre vous a oublié de la vérifier !)

(b) On a $\mathrm{card}(X) \leqslant \sum_{\xi<\kappa^+} \mathrm{card}(X_\xi) \leqslant \sum_{\xi<\kappa^+} 2^\kappa = \kappa^+ \times 2^\kappa \leqslant 2^\kappa \times 2^\kappa = 2^\kappa$.

(c) Soit $A \subseteq X$ avec $\mathrm{card}(A) \leqslant \kappa$. On définit alors une fonction $\varphi : A \longrightarrow \kappa^+$ par, pour tout $x \in A$, $\varphi(x) = \min\{\xi < \kappa^+ \mid x \in X_\xi\}$. On note $E \subseteq \kappa^+$ l'image de φ, et on a alors que $\mathrm{card}(E) \leqslant \mathrm{card}(A) \leqslant \kappa$. Comme κ^+ est un cardinal régulier, on en déduit que E n'est pas cofinal dans κ^+, donc est majoré par un certain $\xi < \kappa^+$. Par définition de E, pour tout $x \in A$, il existe $\zeta \leqslant \xi$ tel que $x \in X_\zeta$, donc $x \in X_\xi$, donc $A \subseteq X_\xi$ comme voulu.

Attention : vous êtes nombreux.ses à avoir fait le raisonnement faux suivant (ou quelque chose de similaire) : A est inclus dans l'union des X_ξ, qui est une réunion croissante, donc A est inclus dans l'un des X_ξ. Ou encore : chaque $a \in A$ est contenu dans X_ξ pour un certain indice ξ, donc en notant ξ_0 le sup de ces indices, on a que $A \subseteq X_{\xi_0}$. Rien ne nous dit que ce sup ne va pas être égal à κ^+, auquel cas le raisonnement ne fonctionne pas ! La seule chose qui empêche ceci d'avoir lieu est le fait que κ^+ est régulier. Mais un tel résultat n'est pas vrai en géneral : par exemple, $\aleph_\omega \subseteq \bigcup_{n<\omega} \aleph_n$, et pourtant il n'existe aucun $n < \omega$ tel que $\aleph_\omega \subseteq \aleph_n$!

(d) Remarquons déjà qu'on a bien $X \subseteq X$. Maintenant, soient $A \subseteq X$ avec $\mathrm{card}(A) \leqslant \kappa$ et $\alpha < \lambda$. Par la question précédente, il existe $\xi < \kappa^+$ tel que $A \subseteq X_\xi$. Comme $X_\xi \lhd X_{\xi+1}$, on en déduit l'existence de $\beta \in X_{\xi+1}$ tel que f_α et f_β coïncident sur A. En particulier, ce β appartient à X. On a donc bien $X \lhd X$.

(3)(a) On construit par récurrence la suite $(\alpha_\xi)_{\xi<\kappa^+}$. Étant donné $\xi < \kappa^+$, si on suppose construits les α_ζ pour $\zeta < \xi$, et donc l'ensemble A_ξ, alors comme $X \lhd X$ et comme $\mathrm{card}(A_\xi) \leqslant \mathrm{card}(\xi) \leqslant \kappa$, on peut choisir $\alpha_\xi \in X$ tel que f_{α_ξ} et f_α coïncident sur A_ξ. C'est exactement la propriété voulue. Remarque : ici, les étapes successeur et limite (et même l'étape d'initialisation !) fonctionnaient exactement de la même façon, il n'y avait donc pas lieu de les distinguer !

(b) Soient $\zeta < \xi < \kappa^+$; on montre que $\alpha_\zeta \neq \alpha_\xi$. Comme $\alpha \notin X$ et $\alpha_\zeta \in X$, on a $\alpha \neq \alpha_\zeta$ donc $f_\alpha(\alpha_\zeta) = c(\{\alpha, \alpha_\zeta\}) + 1 > 0$. D'autre part, $\alpha_\zeta \in A_\xi$, et f_{α_ξ} et f_α coïncident sur A_ξ, donc $f_{\alpha_\xi}(\alpha_\zeta) = f_\alpha(\alpha_\zeta) > 0$. Par définition de f, ceci n'est possible que si $\alpha_\zeta \neq \alpha_\xi$.

(c) Supposons le contraire. Alors f est constante sur tous les $f^{-1}(\{\gamma\}) \cap A$ pour $\gamma < \kappa$, et ces ensembles sont donc de cardinalité au plus κ. Et comme $A = \bigcup_{\gamma<\kappa}(f^{-1}(\{\gamma\}) \cap A)$, on a $\mathrm{card}(A) \leqslant \sum_{\gamma<\kappa} \mathrm{card}(f^{-1}(\{\gamma\}) \cap A) \leqslant \sum_{\gamma<\kappa} \kappa = \kappa \times \kappa = \kappa$. Ceci contredit l'injectivité de la suite $(\alpha_\xi)_{\xi<\kappa^+}$ montrée à la question précédente.

(d) On note $\gamma < \kappa$ l'unique valeur prise par f_α sur H. Soit $p \in [H]^2$. On pose $p = \{\alpha_\zeta, \alpha_\xi\}$ pour des $\zeta < \xi < \kappa^+$. Comme $\alpha_\zeta \neq \alpha_\xi$, on a alors $\gamma = f_\alpha(\alpha_\zeta) = f_{\alpha_\xi}(\alpha_\zeta) = c(p) + 1$, donc γ est successeur, disons $\gamma = \delta + 1$, et $c(p) = \delta$. L'application c est donc constante de valeur δ sur $[H]^2$, ce qui montre que H est c-homogène.

Exercice 4. Soit $\mathcal{L} = \{<, R\}$, où R et $<$ sont deux relations binaires. On considère la théorie T axiomatisant les propriétés suivantes d'une $\mathcal{L}$-structure M :

(i) R est une relation d'équivalence et $<$ définit un ordre total dense et sans extrémités ; toute R-classe d'équivalence est convexe (c'est à dire, si $R(a, b)$, alors tous les points entre a et b pour l'ordre $<$ sont dans la classe d'équivalence $[a]_R$ de a) ; l'ordre induit sur (la sous-structure) $[a]_R$

est dense sans extrémités.
(ii) Soit X l'ensemble des classes d'équivalence de M pour R, et définissons la relation $\prec$ sur X par $[a]_R \prec [b]_R$ si et seulement si $\neg R(a, b)$ et $a < b$. (Grâce à la convexité des R-classes, cela ne dépend pas du choix des éléments, mais seulement de leur classe d'équivalence). Alors $\prec$ définit un ordre total sur X.
(iii) $(X, \prec)$ est dense sans extrémités.

On montre facilement que $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, muni de l'ordre lexicographique ($(a_1, a_2) < (b_1, b_2)$ ssi ($a_1 < b_1$ ou ($a_1 = b_1$ et $a_2 < b_2$))) et où la relation R est interpretée par $R((a_1, a_2), (b_1, b_2))$ ssi $a_1 = b_1$, est bien un modèle de cette théorie. La théorie T est donc cohérente.

(1) On vérifie facilement (et on ne demandera pas de le faire) que les propriétés (i) et (ii) sont axiomatisables. Donnez un énoncé qui axiomatise la propriété (iii) (modulo les autres axiomes).

(2) Montrez que la théorie T élimine les quantificateurs. [On essaiera de prolonger des isomorphismes].

(3) Montrez que deux modèles dénombrables de T sont isomorphes [Indication : prenez des énumérations des deux modèles indexées par les entiers, et construisez une suite (f_n) d'isomorphismes partiels compatibles de domaines finis].

(4) La théorie T est-elle complète ? Justifiez votre réponse.

Solution. (1) $\forall x, y[(x < y \wedge \neg R(x, y)) \to \exists z\, (x < z \wedge z < y \wedge \neg R(x, z) \wedge \neg R(z, y))] \wedge \forall x \exists u, v(u < x \wedge \neg R(u, x) \wedge y < v \wedge \neg R(v, y))$.
(2) On utilise le critère montré en classe : Soient M et N deux modèles de T, et $\bar{a}, \bar{b}$ des uplets de même longueur (peut-être nulle) dans M et N respectivement. On suppose que $\bar{a}$ et $\bar{b}$ satisfont les même formules sans quantificateurs, on prend $c \in M$, une formule sans quantificateurs $\varphi(\bar{x}, y)$ satisfaite par $(\bar{a}, c)$ dans M et on veut trouver $d \in N$ tel que $N \models \varphi(\bar{b}, d)$. En fait, on va trouver $d \in N$ tel que les $\mathcal{L}$-structures $\bar{a}^\frown c$ et $\bar{b}^\frown d$ sont isomorphes.
Si $\bar{a} = \emptyset$, on prend n'importe quoi pour d : les sous-structures $\{c\}$ et $\{d\}$ de M et N sont isomorphes, donc c et d satisfont les mêmes formules sans quantificateurs, et en particulier φ.
Supposons $\bar{a} \neq \emptyset$, et écrivons $\bar{a} = \{a_1, \dots, a_n\}$, et $\bar{b} = \{b_1, \dots, b_n\}$. Notre hypothèse dit donc que les sous-structures $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ et $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ sont isomorphes par l'application f qui envoie a_i sur b_i. Quitte à renuméroter, on peut supposer $a_1 < a_2 \cdots < a_n$, et donc aussi $b_1 < \cdots < b_n$. Nous allons étendre f à un isomorphisme ayant c dans son domaine. Si $c \in A$ il n'y a rien à faire, donc supposons $c \notin A$. Notons $a_0 = -\infty$, $a_{n+1} = +\infty$, $b_0 = -\infty$, et $b_{n+1} = +\infty$. Puisque $<$ est un ordre total, il existe un unique i tel que $a_i < c < a_{i+1}$. Il y a plusieurs cas :
– $i \notin \{0, n\}$ et $M \models R(a_i, a_{i+1})$. Alors $R(a_i, c)$ (par convexité de $[a_i]_R$), et par densité de l'ordre sur $[b_i]_R$, il existe d satisfaisant $b_i < d < b_{i+1}$, qui sera donc dans $[b_i]_R$. Alors, posant $f(c) = d$, f définit un isomorphisme entre $A \cup \{c\}$ et $B \cup \{d\}$.
– $i \notin \{0, n\}$ et $M \models \neg R(a_i, a_{i+1}) \wedge R(a_i, c)$. Puisque $[b_i]_R$ n'a pas de plus grand élément, il

existe $d \in [b_i]_R$ tel que $b_i < d$. Alors posant $f(c) = d$, on a bien un isomorphisme entre $A \cup \{c\}$ et $B \cup \{d\}$.
– $i = n$, $M \models R(a_i, c)$. On trouve d comme dans le cas précédent.
– $i \notin \{0, n\}$ et $M \models \neg R(a_i, a_{i+1}) \wedge R(a_{i+1}, c)$. Puisque $[b_{i+1}]_R$ n'a pas de plus petit élément, on prend $d \in [b_{i+1}]_R$ tel que $d < b_{i+1}$. Alors posant $f(c) = d$, on a bien un isomorphisme entre $A \cup \{c\}$ et $B \cup \{d\}$.
– $i = 0$ et $M \models R(a_{i+1}, c)$. On trouve d comme dans le cas précédent.
– $i \notin \{0, n\}$ et $M \models \neg R(a_i, a_{i+1}) \wedge \neg R(a_i, c) \wedge \neg R(a_{i+1}, c)$. Puisque $(X, \prec)$ est dense sans extrémités, il existe d tel que $b_i < d < b_{i+1}$, et qui n'est R-équivalent ni à b_i ni à b_{i+1}. Alors posant $f(c) = d$, on a bien un isomorphisme entre $A \cup \{c\}$ et $B \cup \{d\}$.
– $i = n$ et $M \models \neg R(a_i, c)$, ou $i = 0$ et $M \models \neg R(a_{i+1}, c)$. On trouve d comme dans le cas précédent.

Les uplets $(\bar{a}, c)$ et $(\bar{b}, d)$ satisfont donc les mêmes formules sans quantificateurs, et en particulier $(\bar{b}, d)$ satisfait φ.

(3) Soient M et N des modèles dénombrables de T, et soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une énumération des éléments de M, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une énumération des éléments de N. Nous allons construire, par induction sur n, une suite f_n d'isomorphismes entre des sous-structures finies de M et N respectivement, avec $f_n \subset f_{n+1}$, et tels que le domaine de f_n contient $\{a_0, \ldots, a_n\}$, son image contient $\{b_0, \ldots, b_n\}$.
On pose $f_0(a_0) = b_0$. On suppose f_n déjà construite. Si a_{n+1} est dans le domaine de f_n et b_{n+1} dans son image, il n'y a rien à faire. Supposons $a_{n+1} \notin \mathrm{dom}(f_n)$: par la preuve de (2), il existe $d \in N$ tel que l'application f'_n de domaine $\mathrm{dom}(f_n) \cup \{a_{n+1}\}$ qui étend f_n et envoie a_{n+1} sur d, est un isomorphisme. Pareillement, si b_{n+1} n'est pas dans l'image de f'_n, alors il existe $e \in M$ tel que l'application f_{n+1} de domaine $\mathrm{dom}(f'_n) \cup \{e\}$ qui étend f'_n et envoie e sur b_{n+1}, est un isomorphisme. Alors f_{n+1} est l'isomorphisme partiel désiré.
Si $f = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f_n$, alors le domaine de f est M, son image est N, et f est un isomorphisme de $\mathcal{L}$-structures.

(4) T est une théorie sur un langage sans constantes, qui élimine les quantificateurs, donc par un résultat du cours, elle est complète. Une autre possibilité était de citer un résultat du TD que j'aurais d'ailleurs pu/dû faire en cours : une théorie dont tous les modèles sont infinis, et qui est catégorique en un cardinal infini, est complète.

Beaucoup d'entre vous ont montré (2) en prenant un uplet $\bar{a}$ à l'intérieur des structures M et N (les éléments de $\bar{a}$ satisfaisant les mêmes relations dans M et dans N). En fait la question la plus difficile de l'exercice était sans doute la question (3).