Bastien Mallein
Bureau V2

TD 10 – Martingales : les théorèmes d'arrêt

Lundi 23 novembre

Dans toute la suite, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ représente un espace de probabilité.

Exercice 1 (Échauffement)**.** Soit $(M_n, n \geq 0)$ une martingale par rapport à une filtration $(\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N})$. Pour $n \geq 0$, on pose $\mathcal{G}_n = \sigma(M_0, \cdots M_n)$ la filtration canonique associée à la martingale (M_n). Montrer que (M_n) est une martingale pour la filtration $(\mathcal{G}_n)$.

Exercice 2 (Indépendance conditionnelle)**.** On dit que deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes conditionnellement à $\mathcal{G}$ si pour toutes fonctions f et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ mesurables positives,

$$\mathbb{E}[f(X)g(Y)|\mathcal{G}] = \mathbb{E}[f(X)|\mathcal{G}]\mathbb{E}[g(Y)|\mathcal{G}].$$

1. Que signifie ceci si $\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega\}$? Si $\mathcal{G} = \mathcal{F}$?
2. Montrer que la définition précédente équivaut à : pour toute variable aléatoire $\mathcal{G}$-mesurable positive Z, pour toutes fonctions f et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ mesurables positives,

$$\mathbb{E}[f(X)g(Y)Z] = \mathbb{E}[f(X)Z\mathbb{E}[g(Y)|\mathcal{G}]],$$

   et aussi à : pour toute fonction g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ mesurable positive,

$$\mathbb{E}[g(Y)|\mathcal{G} \vee \sigma(X)] = \mathbb{E}[g(Y)|\mathcal{G}].$$

Démonstration. Si $\mathcal{G}$ est triviale, c'est la définition de l'indépendance, si c'est $\mathcal{F}$, les variables aléatoires sont toujours indépendantes.

On suppose que pour toutes fonctions f, g mesurables positives, on a

$$\mathbb{E}(f(X)g(Y)|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(f(X)|\mathcal{G})\mathbb{E}(g(Y)|\mathcal{G}).$$

Dès lors, pour toute variable aléatoire $\mathcal{G}$-mesurable positive, alors

$$\mathbb{E}(f(X)g(Y)Z) = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}(f(X)g(Y)|\mathcal{G})Z\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}(f(X)|\mathcal{G})\mathbb{E}(g(Y)|\mathcal{G})Z\right] = \mathbb{E}\left[f(X)\mathbb{E}(g(Y)|\mathcal{G})Z\right].$$

Réciproquement, on suppose que pour toute fonction mesurable positive f, g, et pour toute variable aléatoire $\mathcal{G}$-mesurable positive Z, $\mathbb{E}(f(X)g(Y)Z) = \mathbb{E}\left[f(X)\mathbb{E}(g(Y)|\mathcal{G})Z\right]$. Alors, comme $Z\mathbb{E}(g(Y)|\mathcal{G})$ est $\mathcal{G}$-mesurable positive, on a $\mathbb{E}(f(X)g(Y)|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(f(X)|\mathcal{G})\mathbb{E}(g(Y)|\mathcal{G})$.

De plus, sous ces conditions, pour tout borélien produit de $\sigma(X) \vee \mathcal{G}$, de la forme $\{X \in H\} \cap G$, on a

$$\mathbb{E}(g(Y)\mathbf{1}_{\{X\in H\}}\mathbf{1}_G) = \mathbb{E}(g(Y)|\mathcal{G})\mathbf{1}_{\{X\in H\}}\mathbf{1}_G).$$

ce qui caractérise la variable aléatoire $\mathbb{E}(G(Y)|\mathcal{G} \vee \sigma(X))$. La réciproque est évidente. □

Exercice 3 (Une inégalité très connue)**.** Soit (X_n) une martingale et ϕ une fonction convexe telle que $\mathbb{E}(|\phi(X_n)|) < +\infty$ pour tout n. Montrer que $(\phi(X_n))$ est une sous-martingale.

Exercice 4 (Une réciproque au théorème d'arrêt)**.** Soit (X_n) un processus sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ intégrable et adapté. Montrer que si pour tout temps d'arrêt borné τ on a $\mathbb{E}(X_\tau) = \mathbb{E}(X_0)$ alors X_n est une martingale.

Démonstration. On observe dans un premier temps que pour tout $n \in \mathbb{N}$, n est un temps d'arrêt. Par conséquent, $\mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X_0)$.

Dans un second temps, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $A \in \mathcal{F}_n$, la variable $\tau = n + \mathbf{1}_A$ est un temps d'arrêt. Dès lors

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_0) &= \mathbb{E}(X_\tau)\\ \mathbb{E}(X_n) &= \mathbb{E}(X_n \mathbf{1}_{A^c}) + \mathbb{E}(X_{n+1}\mathbf{1}_1).\end{aligned}$$

Par conséquent, $\mathbb{E}(X_n \mathbf{1}_A) = \mathbb{E}(X_{n+1}\mathbf{1}_A)$. En utilisant la convergence monotone, on en déduit que pour toute variable aléatoire $\mathcal{F}_n$-mesurable Z, $\mathbb{E}(ZX_n) = \mathbb{E}(ZX_{n+1})$, on a bien $\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = X_n$, ce qui conclut. □

Exercice 5 (À la pêche aux martingales)**.**

Démonstration.

1. On a $\mathbb{E}(S_{n+1}|\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(S_n + X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = S_n + \mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = S_n$ par indépendance des accroissements.
2. De plus
$$\mathbb{E}(S_{n+1}^2|\mathcal{F}_n) = S_n^2 + 2S_n\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) + \mathbb{E}(X_{n+1}^2|\mathcal{F}_n) = S_n^2 + 1.$$
Dès lors $\mathbb{E}(S_{n+1}^2 - (n+1)|\mathcal{F}_n) = S_n^2 - n$, on a une martingale.
3. Le troisième calcul est laissé au lecteur.
4. On calcule
$$\mathbb{E}(P(S_{n+1}, n+1)|\mathcal{F}_n) = \frac{1}{2}P(S_n+1, n+1) + \frac{1}{2}P(S_n - 1, n).$$
Il suffit donc de $P(X+1, n+1) - 2P(X, n) + P(X-1, n+1) = 0$.
5. On calcule $\mathbb{E}(e^{\lambda S_{n+1}}|\mathcal{F}_n) = \frac{e^{\lambda}+e^{-\lambda}}{2}e^{\lambda S_n}$, il faut donc choisir $\xi = \ln(\mathrm{ch}(\lambda))$.

□

Exercice 6 (La ruine du parieur)**.**

Démonstration.

1. On calcule sans difficulté l'espérance conditionnelle
$$\mathbb{E}\left[\left(\frac{1-p}{p}\right)^{S_{n+1}}\middle|\mathcal{F}_n\right] = \left[\frac{1-p}{p}\right]^{S_n}\underbrace{\left[p\frac{1-p}{p} + (1-p)\frac{p}{1-p}\right]}_{1}.$$
2. On observe que $(M_{n\wedge T})$ est une martingale positive, bornée qui converge donc p.s. et L^1 vers une variable aléatoire M_T, on peut donc appliquer le théorème d'arrêt à cette martingale
$$\mathbb{E}(M_T) = \mathbb{E}(M_0) = \left(\frac{1-p}{p}\right)^K,$$

de plus $\mathbb{E}(M_T) = 1\mathbb{P}(T_0 < T_N) + \left(\frac{1-p}{p}\right)^N \mathbb{P}(T_N < T_0)$. En résolvant cette équation, il vient

$$\mathbb{P}(T = T_0) = \mathbb{P}(T_0 < T_N) = 1 - \mathbb{P}(T_N < T_0) = \frac{\left(\frac{1-p}{p}\right)^K - \left(\frac{1-p}{p}\right)^N}{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^N}.$$

$\square$

Exercice 7 (Une autre version du théorème d'arrêt)**.** Soit (X_n) une martingale sur un espace de probabilité filtré et T un temps d'arrêt vérifiant

$$\mathbb{P}(T < +\infty) = 1, \quad \mathbb{E}(|X_T|) < +\infty \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(|X_n|\mathbf{1}_{\{T>n\}}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

1. Montrer que $\mathbb{E}(|X_T|\mathbf{1}_{\{T>n\}}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
2. Montrer que $\mathbb{E}(|X_{T\wedge n} - X_T|) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
3. En déduire que $\mathbb{E}(X_T) = \mathbb{E}(X_0)$.

Démonstration. 1. On a $|X_T\mathbf{1}_{\{T>n\}}| \leq |X_T|$, donc par convergence dominée,

$$\mathbb{E}(|X_T|\mathbf{1}_{\{T>n\}}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

2. De plus $\mathbb{E}(|X_{T\wedge n} - X_T|) = \mathbb{E}(|X_n\mathbf{1}_{\{T>n\}}|) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, par hypothèse.
3. Dès lors, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}|\mathbb{E}(X_T) - \mathbb{E}(X_0)| = \mathbb{E}(X_T) - \mathbb{E}(X_n)| &\leq \mathbb{E}(|X_T - X_n|)\\ &\leq \mathbb{E}(|X_T - X_{T\wedge n}|) + \mathbb{E}(|X_{T\wedge n} - X_n|) \leq \mathbb{E}(|X_{T\wedge n} - X_T|) + \mathbb{E}(|X_T|\mathbf{1}_{\{T>n\}}).\end{aligned}$$

On fait tendre n vers $+\infty$ pour conclure.

$\square$

Exercice 8 (Les identités de Wald)**.** Soit $(X_n, n \in \mathbb{N})$ une suite de variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{Z}$ et $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

1. Soit τ un temps d'arrêt, montrer que si X_1 et τ sont intégrables, alors $\mathbb{E}(S_\tau) = \mathbb{E}(\tau)\mathbb{E}(X_1)$.
2. Soit τ un temps d'arrêt. Montrer que si $X_1 \in \mathrm{L}^2$ et τ est intégrable,

$$\mathbb{E}\left[(S_\tau - \tau\mathbb{E}(X_1))^2\right] = \mathbb{E}\left[(X_1 - \mathbb{E}(X_1))^2\right]\mathbb{E}(\tau).$$

3. Soit τ un temps d'arrêt **borné** et $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer que si $\mathbb{E}(e^{\theta X_1}) < +\infty$, alors

$$\mathbb{E}\left[\frac{e^{\theta S_\tau}}{\mathbb{E}(e^{\theta X_1})^\tau}\right] = 1.$$

4. On suppose que S est une marche aléatoire simple symétrique. Soit $A, B \in \mathbb{N}$, on pose $\tau = \inf\{n \in \mathbb{N} : S_n \in \{-A, B\}\}$, calculer

$$\psi^+(s) = \mathbb{E}\left[s^\tau \mathbf{1}_{\{S_\tau = B\}}\right] \quad \text{et} \quad \psi^-(s) = \mathbb{E}\left[s^\tau \mathbf{1}_{\{S_\tau = -A\}}\right].$$

Démonstration. On note τ un temps d'arrêt.

1. On observe pour commencer que $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{1}_{\{k \leq Y\}}\right] = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(k \leq Y)$ par Fubini-Tonelli. On a alors $\mathbb{E}(S_\tau) = \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{+\infty} X_k \mathbf{1}_{\{\tau \geq k\}}\right] = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{E}(X_k \mathbf{1}_{\{\tau \geq k\}}) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{E}(X_k)\mathbb{P}(\tau \geq k) = \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(\tau)$, car $\mathbf{1}_{\{\tau \geq k\}} = 1 - \mathbf{1}_{\{\tau \leq k-1\}}$ ne dépend que de $X_1, \dots X_{k-1}$.
2. Ce sont exactement les mêmes calculs, que l'on présente de façon différente. On suppose, sans perdre de généralité, que $\mathbb{E}(X_1) = 0$. On a alors

$$\begin{aligned}\mathbb{E}((S_\tau)^2) &= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{k=1}^{\tau} X_k\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\left(\sum_{k=1}^{+\infty} X_k \mathbf{1}_{\{\tau \geq k\}}\right)^2\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{+\infty} X_k^2 \mathbf{1}_{\{\tau \geq k\}} + Z \sum_{1=q<p}^{+\infty} X_p X_q \mathbf{1}_{\{\tau \geq p\}}\right]\end{aligned}$$

d'où on tire, par indépendance

$$\begin{aligned}\mathbb{E}((S_\tau)^2) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{E}(X_k^2 \mathbf{1}_{\{\tau \geq k\}}) + 2 \sum_{p=1}^{+\infty} \sum_{q=1}^{p-1} \mathbb{E}(X_p X_q \mathbf{1}_{\{\tau \geq p\}}) \\ = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{E}(X_k^2)\mathbb{P}(\tau \geq k) + 2 \sum_{p=1}^{+\infty} \sum_{q=1}^{p-1} \mathbb{E}(X_p)\mathbb{E}(X_q \mathbf{1}_{\{\tau \geq p\}}) = \mathbb{E}(\tau)\mathbb{E}(X_1^2)\end{aligned}$$

ce qui permet de conclure.
3. On suppose que $\tau \leq n$. On a alors d'une part $\mathbb{E}(e^{\theta S_n}) = \mathbb{E}\left[e^{\theta X_1}\right]^n$ et d'autre part

$$\mathbb{E}(e^{\theta S_n}) = \mathbb{E}(e^{\theta S_\tau + (S_n - S_\tau)}) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{\{\tau = k\}} e^{\theta S_k}\right] \mathbb{E}\left[e^{\theta(S_n - S_k)}\right] = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{E}(e^{\theta S_k} \mathbf{1}_{\{\tau = k\}}) \mathbb{E}\left[e^{\theta X_1}\right]^{n-k}$$

la conclusion est laissée au lecteur.
4. On observe pour commencer que τ est un temps d'arrêt. Par conséquent on peut appliquer la troisième identité de Wald à $\tau \wedge n$, qui nous donne $\mathbb{E}\left(\frac{e^{\theta S_{\tau \wedge n}}}{\mathbb{E}(e^{\theta X_1})^{\tau \wedge n}}\right) = 1$. On peut alors appliquer le théorème de convergence dominée – car $S_{\tau \wedge n} \in [-A, B]$, on obtient $\mathbb{E}\left[\frac{e^{\theta S_\tau}}{\mathrm{ch}(\theta)^\tau}\right] = 1$, que l'on peut encore réécrire, en notant $s = \mathrm{ch}(\theta)$, $e^{\theta B}\psi_+(s) + e^{-\theta A}\psi_-(s) = 1$. Remarquons alors que l'on a également $s = \mathrm{ch}(-\theta)$, par conséquent l'égalité suivante est aussi vérifiée $e^{-\theta B}\psi_+(s) + e^{\theta A}\psi_-(s) = 1$. Résoudre ce système d'équations nous donne

$$\begin{cases}\psi_+(s) = \frac{\mathrm{sh}(\theta A)}{\mathrm{sh}(\theta(A+B))} \\ \psi_-(s) = \frac{\mathrm{sh}(\theta B)}{\mathrm{sh}(\theta(A+B))}.\end{cases}$$

En remplaçant θ par $\mathrm{Argch}(s)$, on obtient les équations demandées.

□