Processus aléatoires *ENS Paris*, 2014/2015

Bastien Mallein
Bureau V2

TD 11 – Chaînes de Markov : Introduction

18 mai 2015

Dans toute la suite, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_n, \mathbb{P})$ représente un espace de probabilité filtré.

Exercice 1 (Chaîne de Markov à deux états)**.**

Solution. On élimine le cas $p = q = 0$, qui se traite facilement à part.

1. Ce résultat se montre facilement par récurrence, par exemple.
2. Comme $|1 - p - q| < 1$, on a $\lim_{n\to+\infty} Q^n = \frac{1}{p+q}\begin{pmatrix} q & p \\ q & p \end{pmatrix}$, les calculs sont laissés au lecteur.
3. On observe que $\mathbb{P}(X_n = i) = Q^n(1, i)$, par conséquent $\mathbb{E}(N_n(1, i)) = \sum_{j=1}^n \mathbb{P}(X_j = i) = \sum_{j=1}^n Q^j(1, i)$. En utilisant le lemme de Cesàro, on a $\lim_{n\to+\infty} \frac{N_n(1,i)}{n} = \mu(i)$.
4. $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n = i) = \mu(i)$ par question 2.
5. Si $p = q = 1$, la marche saute à chaque étape sans jamais s'arrêter. Il n'y a pas de convergence en loi.

□

Exercice 2 (Chaîne de Markov et indépendance)**.** Soient S un ensemble dénombrable, $(G, \mathcal{G})$ un ensemble mesurable, $(Z_n)_{n\geq1}$ une suite de v.a. i.i.d. à valeurs dans $(G, \mathcal{G})$ et $\phi : S \times G \to S$ une application mesurable. On définit une suite de v.a. $(X_n)_{n\geq0}$ à valeurs dans S par $X_0 = x \in S$ et $X_{n+1} = \phi(X_n, Z_{n+1})$ pour tout $n \geq 0$. Montrer que $(X_n)_{n\geq0}$ est une chaîne de Markov et déterminer sa fonction de transition.

Solution. Soient $n \geq 0$ et $(x_0, \ldots, x_n) \in S^n$. On a par indépendance :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_n) =& \mathbb{P}(X_0 = x_0, \phi(x_0, Z_1) = x_1, \phi(x_1, Z_2) = x_2, \ldots, \phi(x_{n-1}, Z_n) = x_n)\\ =& \mathbb{P}(X_0 = x_0)\mathbb{P}(\phi(x, Z_1) = x_1)\mathbb{P}(\phi(x_1, Z_2) = x_2) \ldots \mathbb{P}(\phi(x_{n-1}, Z_n) = x_n)\\ =& \mathbb{P}(X_0 = x_0)\mathbb{P}(\phi(x, Z_1) = x_1)\mathbb{P}(\phi(x_1, Z_1) = x_2) \ldots \mathbb{P}(\phi(x_{n-1}, Z_1) = x_n).\end{aligned}$$

On pose, pour $(y, z) \in S^2$, $Q(y, z) = \mathbb{P}(\phi(y, Z_1) = z)$. On peut alors écrire

$$\mathbb{P}(X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_n) = \mathbb{P}(X_0 = x_0)Q(x_0, x_1)Q(x_1, x_2) \ldots Q(x_{n-1}, x_n).$$

Cela signifie que $(X_n)_{n\geq0}$ est une chaîne de Markov de fonction de transition Q. □

Exercice 3 (h-transformée d'une matrice stochastique)**.** Soit S un ensemble dénombrable, $Q = (Q(i, j))_{i,j\in S}$ une matrice stochastique et $(X_n)_{n\geq0}$ la chaîne canonique sur S de matrice de transition Q. Soit $h : S \to \mathbb{R}_+$ une application bornée telle que pour tout $i \in S$, $(h(X_n))_{n\geq0}$ est une martingale sous $\mathbb{P}_i$ pour la filtration canonique. Soit P la matrice définie sur $S_+ = \{x \in S, h(x) > 0\}$ par la formule

$$P(i, j) = \frac{h(j)}{h(i)}Q(i, j).$$

1. Montrer que P est une matrice stochastique. *On dit que P est la h-transformée de Q.*
2. Déterminée la dérivée de Radon-Nikodým de la loi de Y_n la valeur au temps n de la chaîne de Markov associée à P par rapport à X_n.
3. On considère la marche aléatoire simple S_n sur $\mathbb{Z}$. On note $T_i = \inf\{n \geq 0, S_n = i\}$. Pour $N > 0$ et $k \in [|0, N|]$, on définit
$$\mathbb{P}_k^{(N)} = \mathbb{P}_k[\ \cdot\ |T_N < T_0].$$
   (a) Rappelons que $\mathbb{P}_k[T_N < T_0] = \frac{k}{N}$. Montrer que sous $P_k^{(N)}$, $(S_{n\wedge T_N})_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov et donner sa matrice de transition.
   (b) Trouver une fonction $h : [|0, N|] \to \mathbb{R}_+$ telle que la matrice de transition de la question précédente soit la h-transformée de la matrice de transition de la marche aléatoire simple.

Solution. 1. On observe immédiatement que les termes de la matrice P sont positifs. Il suffit de vérifier que la somme par lignes fait 1. Ceci se déduit de la condition "$h(X_n)$ est une martingale sous $\mathbb{P}_i$" :
$$h(i) = \mathbb{E}_i[h(X_0)] = \mathbb{E}_i[h(X_1)] \Longrightarrow h(i) = \sum_j Q(i,j)h(j).$$

2. Calculons
$$P_k^{(N)}[X_{n+1} = x_{n+1}|X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_n] = \frac{\mathbb{P}_k[X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_n, X_{n+1} = x_{n+1} \text{ et } T_N < T_0]}{\mathbb{P}_k[X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_n \text{ et } T_N < T_0]}.$$
Par propriété de Markov simple, on a $\mathbb{P}_k[X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_n \text{ et } T_N < T_0] = \frac{1}{2^n} \cdot \frac{x_n}{N}$, ainsi que $\mathbb{P}_k[X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_n, X_{n+1} = x_{n+1} \text{ et } T_N < T_0] = \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \frac{x_{n+1}}{N}$. Par conséquent, $P_k^{(N)}[X_{n+1} = x_{n+1}\ |X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_n] = \frac{x_{n+1}}{x_n}$, la marche arrêtée sous la proba $P_k^{(N)}$ est une chaîne de Markov de matrice de transition
$$Q(x,y) = \frac{y}{x}\mathbf{1}_{\{|x-y|=1\}} \quad \text{et} \quad Q(N,N) = 1.$$
Cette fonction est $h(x) = x$, conséquence d'exercices déjà faits.

□

Exercice 4 (Propriété de Markov faible)**.** Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov sur un espace dénombrable S, de fonction de transition Q, issue de x sous $\mathbb{P}_x$. Soit F un sous-ensemble non vide de S. On pose
$$T_F = T_F(X_0, X_1, ...) = \inf\{n \geq 0 : X_n \in F\}.$$

1. Montrer que pour toute fonction h positive bornée définie sur F, la fonction g définie par
$$g : x \in S \mapsto \mathbb{E}_x\left(h(X_{T_F})\mathbf{1}_{\{T_F<\infty\}}\right)$$
est solution du problème suivant :
$$g(x) = \begin{cases} Qg(x) & \text{si } x \in F^c \\ h(x) & \text{si } x \in F. \end{cases}$$
On va montrer que g est la solution positive minimale de ce problème.

2. Soit f une autre solution positive de ce problème. Montrer que pour tout $n \geq 0$

$$f(x) = \mathbb{E}_x\left(f(X_{n\wedge T_F})\right).$$

3. En déduire que $f \geq g$.

Solution. 1. Pour $x \in F$, $\mathbb{P}_x$-p.s, on a $T_F = 0$, et donc$g(x) = \mathbb{E}_x(h(X_0)) = h(x)$. Pour $x \notin F$, $\mathbb{P}_x$-p.s., on a $T_F \geq 1$et donc

$$T_F(X_0, X_1, ...) = \inf\{n \geq 1 | X_n \in F\} = 1 + \inf\{n \geq 0 | X_{n+1} \in F\} = 1 + T_F(X_1, X_2, ...),$$

donc par propriété de Markov faible appliquée au temps 1,

$$\begin{aligned} g(x) =& \mathbb{E}_x[h(X_{T_F(X_0,X_1,...)})\mathbf{1}_{\{T_F(X_0,.X_1,...)<\infty\}}] \\ =& \mathbb{E}_x[h(X_{1+T_F(X_1,X_2,...)})\mathbf{1}_{\{T_F(X_1,X_2,...)<\infty\}}] \\ =& \mathbb{E}_x[\mathcal{E}_{X_1}(h(Y_{T_F(Y_0,Y_1,...)})\mathbf{1}_{\{T_F(Y_0,Y_1,...)<\infty\}})] \\ =& \mathbb{E}_x[g(X_1)] \\ =& Qg(x), \end{aligned}$$

où $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dans toute la suite une chaîne de Markov de même fonction de transition que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, issue p.s. de y sous la loi $\mathcal{L}_y$ (d'espérance notée $\mathcal{E}_y$). Ainsi, g est solution du problème.

2. On va montrer le résultat par récurrence sur n. C'est évident pour $n = 0$. Soit $n \geq 0$. On suppose le résultat démontré au rang n. On a

$$\mathbb{E}_x\left[f\left(X_{(n+1)\wedge T_F}\right)\right] = \mathbb{E}_x\left[f\left(X_{n+1}\right)\mathbf{1}_{\{\{T_F \geq n+1\}\}}\right] + \mathbb{E}_x\left[f\left(X_{T_F}\right)\mathbf{1}_{\{\{T_F \leq n\}\}}\right].$$

L'ensemble $\{T_F \geq n+1\}$ est $\mathcal{F}_n$-mesurable (avec $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \dots, X_n)$), donc par propriété de Markov faible appliquée au temps n (ou la définition même de la chaîne de Markov), on a

$$\mathbb{E}_x\left[f\left(X_{n+1}\right)\mathbf{1}_{\{T_F \geq n+1\}}\right] = \mathbb{E}_x\left[Qf\left(X_n\right)\mathbf{1}_{\{T_F \geq n+1\}}\right] = \mathbb{E}_x\left[f\left(X_n\right)\mathbf{1}_{\{T_F \geq n+1\}}\right],$$

la dernière égalité étant obtenue car f est solution du problème et $X_n \notin F$ si $T_F \geq n+1$. On a donc, par hypothèse de récurrence, $\mathbb{E}_x\left[f\left(X_{(n+1)\wedge T_F}\right)\right] = \mathbb{E}_x\left[f\left(X_{n\wedge T_F}\right)\right] = f(x)$.

3. D'après la question 2., pour tout $n \geq 0$, on a

$$f(x) = \mathbb{E}_x\left[f\left(X_{n\wedge T_F}\right)\right] \geq \mathbb{E}_x\left[f\left(X_{T_F}\right)\mathbf{1}_{\{T_F \leq n\}}\right] \geq \mathbb{E}_x\left[h\left(X_{T_F}\right)\mathbf{1}_{\{T_F \leq n\}}\right].$$

Comme $\lim_{n\to+\infty} h\left(X_{T_F}\right)\mathbf{1}_{\{\{T_F \leq n\}\}} = h\left(X_{T_F}\right)\mathbf{1}_{\{T_F < \infty\}}$ et la suite $(h(X_{T_F})\mathbf{1}_{\{T_F \leq n\}})$ est positive et croissante, par théorème de convergence monotone, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}_x\left[h\left(X_{T_F}\right)\mathbf{1}_{\{T_F \leq n\}}\right] = \mathbb{E}_x\left[h\left(X_{T_F}\right)\mathbf{1}_{\{T_F < \infty\}}\right] = g(x).$$

Ainsi, pour tout $x \in S$, $f(x) \geq g(x)$.

□

Exercice 5 (Un dernier exercice de martingales)**.** Un singe tape des lettres au hasard (indépendamment, uniformément) sur une machine à écrire au rythme d'une par seconde. On se demande au bout de combien de temps (en espérance) le singe aura tapé le mot "ABRACADABRA". On joue alors au jeu suivant : juste *avant* chaque seconde $n = 1, 2, 3, \dots$ un joueur arrive derrière le singe et parie 1 euro avec lui sur l'événement

$$\{\text{la } n\text{-ième lettre tapée par l'animal est un "A"}\}.$$

Si il perd, il part (et le singe met 1 euro dans son sac). Si il gagne, il reçoit 26 euros du singe qu'il remise immédiatement sur l'événement

$$\{\text{la } (n+1)\text{-ième lettre tapée par l'animal est un "B"}\}.$$

Si il perd, il part. Si il gagne, il reçoit 26^2=676 euros qu'il remise immédiatement sur le "R", puis sur le "A", etc. Ainsi de suite jusqu'à ce que "ABRACADABRA" sorte de la machine, on notera T ce temps d'arrêt. Notez qu'il peut y avoir jusqu'à trois joueurs en train de miser derrière le singe...

1. Montrer que l'argent reçu par le singe jusqu'au temps n est une martingale.
2. En déduire
$$\mathbb{E}[T] = 26^{11} + 26^4 + 26.$$
3. Refaire le même exercice en remplaçant "ABRACADABRA" par "ABCDEFGHIJK". Commentez.

Solution. 1. Il faut montrer que chaque étape est de moyenne nulle. Or le gain moyen du singe contre n'importe quel joueur est nulle à chaque étape. Par conséquent, en notant M_n l'argent gagné par le singe après n étapes, on a $\mathbb{E}[M_{n+1}|\mathcal{F}_n] = M_n$.

2. Au temps T, lorsque ABRACADABRA apparaît, on arrête tous les jeux. Donc si $n \geq T$, $M_n = M_T = T - (26^{11} + 26^4 + 26)$ (le singe a reçu T euros et a du payer trois personnes à la fin : celui qui est arrivé au temps $T-11$ et a deviné ABRACADABRA, celui qui est arrivé au temps $T-4$ et a deviné ABRA, et celui qui est arrivé au temps $T-1$ et a deviné A). Donc $M_n \longrightarrow M_T$ p.s. Il faut maintenant montrer que la convergence a lieu dans $\mathbf{L}^1$. Il suffit de remarquer que $|M_n| \leq max(T\ ,\ (26^{11} + 26^4 + 26))$. De plus, T peut être majoré par un temps exponentiel, qui est intégrable. Par convergence dominée :
$$\mathbb{E}[T] = 26^{11} + 26^4 + 26.$$

3. Si on remplace "ABRACADABRA" par "ABCDEFGHIJK", on trouve $\mathbb{E}[T] = 26^{11}$. La preuve est laissée au lecteur consciencieux.

$\square$

Exercice 6 (Dilemme du prisonnier itéré)**.** On considère deux joueurs jouant au dilemme du prisonnier, de façon markovienne. À chaque étape, chacun d'entre eux choisit secrètement une action : coopérer (C) ou trahir (T). Leurs gains sont alors les suivants :

– Si ils coopèrent tous les deux (CC), ils gagnent 1 chacun
– Si l'un des deux joueurs coopère (TC) ou (CT), mais pas l'autre, il perd 2 et son adversaire gagne 2
– Si les deux joueurs trahissent (TT), ils perdent 1 chacun.

On suppose connues les probabilités $p_{CC}, p_{TC}, p_{CT}, p_{TT} \in (0,1)$ pour le joueur 1 de coopérer connaissant le résultat de la partie précédente. Déterminer $q_{CC}, q_{TC}, q_{CT}, q_{T,T}$ les probabilités qui maximisent le gain du joueur 2, puis celles qui maximisent le gain relatif du joueur 2 par rapport au joueur 1.