Processus aléatoires *ENS Paris*, 2015/2016

Bastien Mallein
Bureau V2

TD 12 – Chaînes de Markov : Introduction

Lundi 7 décembre

Dans toute la suite, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_n, \mathbb{P})$ représente un espace de probabilité filtré.

Exercice 1 (Chaîne de Markov à deux états)**.** On considère une matrice de transition 2x2, qui s'écrit $Q = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}$, pour $p, q \in [0,1]$. On suppose que p ou q ne vaut pas 1 ou 0.

1. Montrer que $Q^n = \frac{1}{p+q}\left[\begin{pmatrix} q & p \\ q & p \end{pmatrix} - (1-p-q)^n \begin{pmatrix} -p & p \\ q & -q \end{pmatrix}\right]$.
2. Soit μ la mesure définie par $\mu(1) = \frac{q}{p+q}$, $\mu(2) = \frac{p}{p+q}$, montrer que
$$\mu Q = \mu, \quad \lim_{n\to+\infty} Q^n_{1,1} = \lim_{n\to+\infty} Q^n_{2,1} = \mu(1), \quad \lim_{n\to+\infty} Q^n_{1,2} = \lim_{n\to+\infty} Q^n_{2,2} = \mu(2).$$
3. Soit (X_n) une chaine de Markov de matrice de transition Q et d'état initial 1, calculer le nombre moyen $N_n(1,1)$ et $N_n(1,2)$ de passages en 1 ou en 2 pendant les n premiers pas. Étudier $\lim_{n\to+\infty} \frac{N_n(1,i)}{n}$.
4. Montrer que (X_n) converge en loi vers une limite que l'on déterminera.
5. Que se passe-t-il si $p = q = 1$?

Démonstration. On élimine le cas $p = q = 0$, qui se traite facilement à part.

1. Ce résultat se montre facilement par récurrence, par exemple.
2. Comme $|1-p-q| < 1$, on a $\lim_{n\to+\infty} Q^n = \frac{1}{p+q}\begin{pmatrix} q & p \\ q & p \end{pmatrix}$, les calculs sont laissés au lecteur.
3. On observe que $\mathbb{P}(X_n = i) = Q^n(1,i)$, par conséquent $\mathbb{E}(N_n(1,i)) = \sum_{j=1}^n \mathbb{P}(X_j = i) = \sum_{j=1}^n Q^j(1,i)$. En utilisant le lemme de Cesàro, on a $\lim_{n\to+\infty} \frac{N_n(1,i)}{n} = \mu(i)$.
4. $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n = i) = \mu(i)$ par question 2.
5. Si $p = q = 1$, la marche saute à chaque étape sans jamais s'arrêter. Il n'y a pas de convergence en loi.

$\square$

Exercice 2 (Chaîne de Markov et indépendance)**.** Soient S un ensemble dénombrable, $(G, \mathcal{G})$ un ensemble mesurable, $(Z_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. i.i.d. à valeurs dans $(G, \mathcal{G})$ et $\phi : S \times G \to S$ une application mesurable. On définit une suite de v.a. $(X_n)_{n\geq 0}$ à valeurs dans S par $X_0 = x \in S$ et $X_{n+1} = \phi(X_n, Z_{n+1})$ pour tout $n \geq 0$. Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov et déterminer sa fonction de transition.

Démonstration. Soient $n \geq 0$ et $(x_0, \dots, x_n) \in S^n$. On a par indépendance :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n) =& \mathbb{P}(X_0 = x_0, \phi(x_0, Z_1) = x_1, \phi(x_1, Z_2) = x_2, \dots, \phi(x_{n-1}, Z_n) = x_n)\\ =& \mathbb{P}(X_0 = x_0)\mathbb{P}(\phi(x, Z_1) = x_1)\mathbb{P}(\phi(x_1, Z_2) = x_2) \dots \mathbb{P}(\phi(x_{n-1}, Z_n) = x_n)\\ =& \mathbb{P}(X_0 = x_0)\mathbb{P}(\phi(x, Z_1) = x_1)\mathbb{P}(\phi(x_1, Z_1) = x_2) \dots \mathbb{P}(\phi(x_{n-1}, Z_1) = x_n).\end{aligned}$$

On pose, pour $(y, z) \in S^2$, $Q(y, z) = \mathbb{P}(\phi(y, Z_1) = z)$. On peut alors écrire

$$\mathbb{P}(X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n) = \mathbb{P}(X_0 = x_0)Q(x_0, x_1)Q(x_1, x_2) \dots Q(x_{n-1}, x_n).$$

Cela signifie que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov de fonction de transition Q. □

Exercice 3 (h-transformée d'une matrice stochastique)**.** Soit S un ensemble dénombrable, $Q = (Q(i, j))_{i,j\in S}$ une matrice stochastique et $(X_n)_{n\geq 0}$ la chaîne canonique sur S de matrice de transition Q. Soit $h : S \to \mathbb{R}_+$ une application bornée telle que pour tout $i \in S$, $(h(X_n))_{n\geq 0}$ est une martingale sous $\mathbb{P}_i$ pour la filtration canonique. Soit P la matrice définie sur $S_+ = \{x \in S, h(x) > 0\}$ par la formule $P(i, j) = \frac{h(j)}{h(i)}Q(i, j)$.

1. Montrer que P est une matrice stochastique. *On dit que P est la h-transformée de Q.*
2. Déterminée la dérivée de Radon-Nikodým de la loi de Y_n la valeur au temps n de la chaîne de Markov associée à P par rapport à X_n.
3. On considère la marche aléatoire simple S_n sur $\mathbb{Z}$. On note $T_i = \inf\{n \geq 0, S_n = i\}$. Pour $N > 0$ et $k \in [|0, N|]$, on définit $\mathbb{P}_k^{(N)} = \mathbb{P}_k[\,\cdot\,|T_N < T_0]$.
   (a) Rappelons que $\mathbb{P}_k[T_N < T_0] = \frac{k}{N}$. Montrer que sous $P_k^{(N)}$, $(S_{n\wedge T_N})_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov et donner sa matrice de transition.
   (b) Trouver une fonction $h : [|0, N|] \to \mathbb{R}_+$ telle que la matrice de transition de la question précédente soit la h-transformée de la matrice de transition de la marche aléatoire simple.

Démonstration. 1. On observe immédiatement que les termes de la matrice P sont positifs. Il suffit de vérifier que la somme par lignes fait 1. Ceci se déduit de la condition "$h(X_n)$ est une martingale sous $\mathbb{P}_i$" :

$$h(i) = \mathbb{E}_i[h(X_0)] = \mathbb{E}_i[h(X_1)] \Longrightarrow h(i) = \sum_j Q(i, j)h(j).$$

2. Calculons

$$P_k^{(N)}[X_{n+1} = x_{n+1}|X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n] = \frac{\mathbb{P}_k[X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n, X_{n+1} = x_{n+1} \text{ et } T_N < T_0]}{\mathbb{P}_k[X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n \text{ et } T_N < T_0]}.$$

Par propriété de Markov simple, on a $\mathbb{P}_k[X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n \text{ et } T_N < T_0] = \frac{1}{2^n} \cdot \frac{x_n}{N}$, ainsi que $\mathbb{P}_k[X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n, X_{n+1} = x_{n+1} \text{ et } T_N < T_0] = \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \frac{x_{n+1}}{N}$. Par conséquent, $P_k^{(N)}[X_{n+1} = x_{n+1}\,|X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n] = \frac{x_{n+1}}{x_n}$, la marche arrêtée sous la proba $P_k^{(N)}$ est une chaîne de Markov de matrice de transition

$$Q(x, y) = \frac{y}{x}\mathbf{1}_{\{|x-y|=1\}} \quad \text{et} \quad Q(N, N) = 1.$$

Cette fonction est $h(x) = x$, conséquence d'exercices déjà faits.

□

Exercice 4. Soit $(S_n)_{n\geq 0}$ la marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$. Pour $k \in \mathbb{Z}$ avec $k \neq 0$, montrer que l'espérance du nombre de visites de k avant le premier retour en 0 est 1.

Exercice 5 (Propriété de Markov faible)**.** Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov sur un espace dénombrable S, de fonction de transition Q, issue de x sous $\mathbb{P}_x$. Soit F un sous-ensemble non vide de S. On pose

$$T_F = T_F(X_0, X_1, ...) = \inf\{n \geq 0 : X_n \in F\}.$$

1. Montrer que pour toute fonction h positive bornée définie sur F, la fonction g définie par

$$g : x \in S \mapsto \mathbb{E}_x \left(h(X_{T_F})\mathbf{1}_{\{T_F<\infty\}}\right)$$

est solution du problème suivant :

$$g(x) = \begin{cases} Qg(x) & \text{si } x \in F^c \\ h(x) & \text{si } x \in F. \end{cases}$$

On va montrer que g est la solution positive minimale de ce problème.

2. Soit f une autre solution positive de ce problème. Montrer que pour tout $n \geq 0$, $f(x) = \mathbb{E}_x\left(f(X_{n\wedge T_F})\right)$.
3. En déduire que $f \geq g$.

Démonstration. 1. Pour $x \in F$, $\mathbb{P}_x$-p.s, on a $T_F = 0$, et donc$g(x) = \mathbb{E}_x(h(X_0)) = h(x)$. Pour $x \notin F$, $\mathbb{P}_x$-p.s., on a $T_F \geq 1$et donc

$$T_F(X_0, X_1, ...) = \inf\{n \geq 1 | X_n \in F\} = 1 + \inf\{n \geq 0 | X_{n+1} \in F\} = 1 + T_F(X_1, X_2, ...),$$

donc par propriété de Markov faible appliquée au temps 1,

$$\begin{aligned} g(x) =& \mathbb{E}_x[h(X_{T_F(X_0,X_1,...)})\mathbf{1}_{\{T_F(X_0,.X_1,...)<\infty\}}] \\ =& \mathbb{E}_x[h(X_{1+T_F(X_1,X_2,...)})\mathbf{1}_{\{T_F(X_1,X_2,...)<\infty\}}] \\ =& \mathbb{E}_x[\mathcal{E}_{X_1}(h(Y_{T_F(Y_0,Y_1,...)})\mathbf{1}_{\{T_F(Y_0,Y_1,...)<\infty\}})] \\ =& \mathbb{E}_x[g(X_1)] \\ =& Qg(x), \end{aligned}$$

où $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dans toute la suite une chaîne de Markov de même fonction de transition que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, issue p.s. de y sous la loi $\mathcal{L}_y$ (d'espérance notée $\mathcal{E}_y$). Ainsi, g est solution du problème.

2. On va montrer le résultat par récurrence sur n. C'est évident pour $n = 0$. Soit $n \geq 0$. On suppose le résultat démontré au rang n. On a

$$\mathbb{E}_x\left[f\left(X_{(n+1)\wedge T_F}\right)\right] = \mathbb{E}_x\left[f\left(X_{n+1}\right)\mathbf{1}_{\{\{T_F\geq n+1\}\}}\right] + \mathbb{E}_x\left[f\left(X_{T_F}\right)\mathbf{1}_{\{\{T_F\leq n\}\}}\right].$$

L'ensemble $\{T_F \geq n+1\}$ est $\mathcal{F}_n$-mesurable (avec $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \ldots, X_n)$), donc par propriété de Markov faible appliquée au temps n (ou la définition même de la chaîne de Markov), on a

$$\mathbb{E}_x\left[f\left(X_{n+1}\right)\mathbf{1}_{\{T_F\geq n+1\}}\right] = \mathbb{E}_x\left[Qf\left(X_n\right)\mathbf{1}_{\{T_F\geq n+1\}}\right] = \mathbb{E}_x\left[f\left(X_n\right)\mathbf{1}_{\{T_F\geq n+1\}}\right],$$

la dernière égalité étant obtenue car f est solution du problème et $X_n \notin F$ si $T_F \geq n+1$. On a donc, par hypothèse de récurrence, $\mathbb{E}_x\left[f\left(X_{(n+1)\wedge T_F}\right)\right] = \mathbb{E}_x\left[f\left(X_{n\wedge T_F}\right)\right] = f(x)$.

3. D'après la question 2., pour tout $n \geq 0$, on a

$$f(x) = \mathbb{E}_x \left[f\left(X_{n \wedge T_F}\right) \right] \geq \mathbb{E}_x \left[f\left(X_{T_F}\right) \mathbf{1}_{\{T_F \leq n\}} \right] \geq \mathbb{E}_x \left[h\left(X_{T_F}\right) \mathbf{1}_{\{T_F \leq n\}} \right].$$

Comme $\lim_{n\to+\infty} h\left(X_{T_F}\right) \mathbf{1}_{\{\{T_F \leq n\}\}} = h\left(X_{T_F}\right) \mathbf{1}_{\{T_F<\infty\}}$ et la suite $(h(X_{T_F})\mathbf{1}_{\{T_F \leq n\}})$ est positive et croissante, par théorème de convergence monotone, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}_x \left[h\left(X_{T_F}\right) \mathbf{1}_{\{T_F \leq n\}} \right] = \mathbb{E}_x \left[h\left(X_{T_F}\right) \mathbf{1}_{\{T_F<\infty\}} \right] = g(x).$$

Ainsi, pour tout $x \in S$, $f(x) \geq g(x)$.

□

Exercice 6 (Un dernier exercice de martingales)**.**

Démonstration. 1. Il faut montrer que chaque étape est de moyenne nulle. Or le gain moyen du singe contre n'importe quel joueur est nulle à chaque étape. Par conséquent, en notant M_n l'argent gagné par le singe après n étapes, on a $\mathbb{E}[M_{n+1}|\mathcal{F}_n] = M_n$.

2. Au temps T, lorsque ABRACADABRA apparaît, on arrête tous les jeux. Donc si $n \geq T$, $M_n = M_T = T - (26^{11} + 26^4 + 26)$ (le singe a reçu T euros et a du payer trois personnes à la fin : celui qui est arrivé au temps $T-11$ et a deviné ABRACADABRA, celui qui est arrivé au temps $T-4$ et a deviné ABRA, et celui qui est arrivé au temps $T-1$ et a deviné A). Donc $M_n \longrightarrow M_T$ p.s. Il faut maintenant montrer que la convergence a lieu dans $\mathbf{L}^1$. Il suffit de remarquer que $|M_n| \leq max(T\ ,\ (26^{11} + 26^4 + 26))$. De plus, T peut être majoré par un temps exponentiel, qui est intégrable. Par convergence dominée :

$$\mathbb{E}[T] = 26^{11} + 26^4 + 26.$$

3. Si on remplace "ABRACADABRA" par "ABCDEFGHIJK", on trouve $\mathbb{E}[T] = 26^{11}$. La preuve est laissée au lecteur consciencieux.

□

Exercice 7 (Dilemme du prisonnier itéré)**.** On considère deux joueurs jouant au dilemme du prisonnier, de façon markovienne. À chaque étape, chacun d'entre eux choisit secrètement une action : coopérer (C) ou trahir (T). Leurs gains sont alors les suivants :

— Si ils coopèrent tous les deux (CC), ils gagnent 1 chacun

— Si l'un des deux joueurs coopère (TC) ou (CT), mais pas l'autre, il perd 2 et son adversaire gagne 2

— Si les deux joueurs trahissent (TT), ils perdent 1 chacun.

On suppose connues les probabilités $p_{CC}, p_{TC}, p_{CT}, p_{TT} \in (0,1)$ pour le joueur 1 de coopérer connaissant le résultat de la partie précédente. Déterminer $q_{CC}, q_{TC}, q_{CT}, q_{T,T}$ les probabilités qui maximisent le gain du joueur 2, puis celles qui maximisent le gain relatif du joueur 2 par rapport au joueur 1.

Exercice 8. Montrer que la marche aléatoire simple sur l'arbre binaire complet est transiente.

Démonstration. On observe que le processus comptant la distance à 0 est une marche aléatoire sur $\mathbb{N}$, avec probabilité 2/3 de descendre pour 1/3 de monter. □