Processus aléatoires *ENS Paris*, 2013/2014

Bastien Mallein
Bureau V2

TD 13 – Le mouvement Brownien

19 mai 2014

Dans toute la suite, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_n, \mathbb{P})$ représente un espace de probabilité filtré, et $(B_t, t \geq 0)$ un mouvement Brownien standard issu de 0 continu.

Exercice 1 (Non dérivabilité du mouvement brownien)**.** Montrer que

$$\liminf_{t \to 0} \frac{B_t}{\sqrt{t}} = -\infty \quad \text{et} \quad \limsup_{t \to 0} \frac{B_t}{\sqrt{t}} = +\infty.$$

En déduire que pour tout $s > 0$, presque sûrement le mouvement brownien n'est pas dérivable à droite en s.

Démonstration. Soit $A > 0$, on observe que $\mathbb{P}(B_t \leq -A\sqrt{t}) = \mathbb{P}(B_1 \geq A)$. Or la tribu $\mathcal{F}_{0+}$ est triviale, donc

$$\mathbb{P}\left(\liminf_{t \to +\infty} \frac{B_t}{\sqrt{t}} \leq -A\right) = 1.$$

On en déduit que $\limsup_{h \to 0^+} \frac{B_{t+h} - B_t}{h} = +\infty$ et $\liminf_{h \to 0^+} \frac{B_{t+h} - B_t}{h} = -\infty$ donc la limite n'existe pas. □

Exercice 2 (Convergence en loi)**.** On pose $S_1 = \sup_{t \in [0,1]} B_t$. Montrer que la convergence suivante a lieu en loi :

$$\lim_{t \to +\infty} \left(\int_0^t e^{B_s} ds \right)^{1/\sqrt{t}} = e^{S_1}.$$

Démonstration. Par propriété de changement d'échelle du mouvement Brownien, on a

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{B_s} ds &\overset{(d)}{=} \int_0^t e^{\sqrt{t} B_{s/t}} ds \\ &\overset{(d)}{=} t \int_0^1 e^{\sqrt{t} B_s} ds. \end{aligned}$$

Or $\lim_{t \to +\infty} t^{1/\sqrt{t}} = 1$, il suffit donc de montrer la convergence en loi suivante

$$\left(\int_0^1 e^{\sqrt{t} B_s} ds \right)^{1/\sqrt{t}} \Longrightarrow e^{S_1}.$$

Cette convergence a en fait lieu p.s, en effet, d'une part

$$\left(\int_0^1 e^{\sqrt{t} B_s} ds \right)^{1/\sqrt{t}} \leq \left(\int_0^1 e^{\sqrt{t} S_1} ds \right)^{1/\sqrt{t}} = e^{S_1}.$$

D'autre part, il existe A un ensemble mesurable de probabilité 1 tel que pour tout $\omega \in A$, $t \mapsto B_t(\omega)$ est continu. Soit $\omega \in A$. On note $T(\omega) \in [0,1]$ tel que $B_{T(\omega)}(\omega) = S_1(\omega)$ (existe car $B(\omega)$ continu et $[0,1]$compact). Soit $\epsilon > 0$. Il existe $\delta(\omega) > 0$ tel que $|B_t(\omega) - B_{T(\omega)}(\omega)| \leq \epsilon$ pour $|t - T(\omega)| \leq \delta(\omega)$ (uniforme continuité sur les compacts). Ainsi,

$$\left(\int_0^1 e^{\sqrt{t}B_s(\omega)} ds\right)^{1/\sqrt{t}} \geq (\delta(\omega))^{1/\sqrt{t}} e^{S_1(\omega)-\epsilon}.$$

Donc,

$$\liminf_{t\to\infty} \left(\int_0^1 e^{\sqrt{t}B_s(\omega)} ds\right)^{1/\sqrt{t}} \geq e^{S_1(\omega)-\epsilon}.$$

On a montré que, pour tout $\epsilon > 0$, p.s.,

$$\liminf_{t\to\infty} \left(\int_0^1 e^{\sqrt{t}B_s} ds\right)^{1/\sqrt{t}} \geq e^{S_1-\epsilon}.$$

En considérant une suite $(\epsilon_k)_{k\geq 0}$ (pour inverser le p.s. et le $\forall \epsilon_k$), on en déduit que p.s.,

$$\liminf_{t\to\infty} \left(\int_0^1 e^{\sqrt{t}B_s} ds\right)^{1/\sqrt{t}} \geq e^{S_1}$$

ce qui implique la limite p.s. désirée. □

Exercice 3 (Construction de Lévy du mouvement Brownien)**.** Le but de cet exercice est de construire la loi du mouvement Brownien comme un processus continu. Soit $(B_t, t \geq 0)$ un mouvement Brownien réel issu de 0.

1. Montrer que, pour tout $t \in [0,1]$, $(B_t - tB_1)$ est indépendant de B_1.
2. En déduire que pour tout $s \leq u \leq t$, $B_u - \frac{u-s}{t-s} B_s - \frac{t-u}{t-s} B_t$ est indépendant de $\sigma(B_v, v \leq s)$ et de $\sigma(B_v, v \geq t)$. Déterminer la loi de $B_u - \frac{u-s}{t-s} B_s - \frac{t-u}{t-s} B_t$.
3. Soit $(N_{i,j}, i \in \mathbb{N}, j \in \mathbb{N})$ des variables aléatoires i.i.d. de loi $\mathcal{N}(0,1)$. On définit

$$W_t^{(1)} = \sum_{j=1}^{\lfloor t \rfloor} N_{1,j} + (t - \lfloor t \rfloor) N_{\lfloor t \rfloor + 1}.$$

   Montrer que $(W_t^{(1)}, t \geq 0)$ est un processus continu.
4. On pose par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [j2^{-n}, (j+1)2^{-n})$

$$W_t^{(n+1)} = W_t^{(n)} + N_{n+1,j} \left[(t - j2^{-n}) \mathbf{1}_{\{t \leq (2j+1)2^{-(n+1)}\}} + (t - (j+1)2^{-n}) \mathbf{1}_{\{t > (2j+1)2^{-n}\}} \right].$$

   Montrer que $(W_t^{(n)}, t \geq 0)$ est un processus continu.
5. Soit $N \in \mathbb{N}$, déterminer la loi de $\max_{t \leq N} \left| W_t^{(n+1)} - W_t^{(n)} \right|$. En déduire que

$$\mathbb{P}(\sup_{[0,N]} |W^{(n+1)} - W^{(n)}| \geq 2^{-n/2}) \leq N 2^n e^{-2^{n/2}}.$$

6. En conclure que p.s. $(W_t^{(n)})$ converge uniformément sur tout compact versu une fonction aléatoire (W_t).
7. Montrer que $(W_t, t \geq 0)$ est un mouvement Brownien, et en déduire qu'il existe un mouvement Brownien continu.

Démonstration. 1. Observons pour commencer que $(B_t, B_1 - B_t)$ est une paire de variables aléatoires gaussiennes indépendantes, dès lors

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[e^{i\lambda(B_t - tB_1)+i\mu B_1}\right] &= \mathbb{E}\left[e^{i(\mu-\lambda t)(B_1-B_t)+i(\lambda(1-t)+\mu)B_t}\right]\\ &= \exp\left[-\frac{1}{2}\left((1-t)(\mu-\lambda t)^2 + t(\mu+\lambda(1-t))^2\right)\right]\\ &= \exp\left[-\frac{\mu^2}{2} - \frac{\lambda^2 t(1-t)}{2}\right],\end{aligned}$$

donc $(B_t - tB_1, B_1)$ est une paire de variables aléatoires gaussiennes indépendantes.

2. On observe immédiatement que

$$B_u - \frac{u-s}{t-s}B_s - \frac{t-u}{t-s}B_t = (B_u - B_s) - \frac{t-u}{t-s}(B_t - B_s)$$

est indépendant de $\sigma(B_v, u \leq s)$. De plus, de la même façon que précédemment, $(B_u - B_s) - \frac{t-u}{t-s}(B_t - B_s)$ est indépendant de B_t, et de $\sigma(B_v - B_t, v \geq t)$, d'où la conclusion. On finit en observant que cette variable aléatoire est une gaussienne de variance $\frac{u-s}{t-s} \times \frac{t-u}{t-s}$.

3. La continuité est laissée au lecteur.
4. La continuité est évidente.
5. On observe que $\sup_{t\in[0,N]} \left|W_t^{(n+1)} - W_t^{(n)}\right| \overset{(d)}{=} \max_{j\leq N2^n} \frac{N_{n+1,j}}{2^{n+1}}$. On en déduit

$$\mathbb{P}(\sup_{[0,N]} |W^{(n+1)} - W^{(n)}| \geq 2^{-n/2}) \leq N2^n \mathbb{P}(|N_{1,1}| \geq 2^{n/2+1}) \leq e^{-2^{n/2}}.$$

6. En appliquant Borel-Cantelli, p.s. pour tout $n \geq 1$ assez grand, $\sup_{[0,N]} |W^{(n+1)} - W^{(n)}| \leq 2^{-n/2}$. Cette suite de processus est donc de Cauchy pour la convergence uniforme sur les compacts. On en déduit l'existence d'une limite p.s. W.
7. Soit $t_1 < t_2 < \cdots < t_k$, et $(a_1^{(n)}, \ldots, a_k^{(n)}) \in \mathbb{N}^k$ tels que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_j^{(n)}}{2^n} = t_j.$$

Par continuité, on a p.s.

$$(W_{t_1}, \ldots W_{t_k}) = \lim_{n\to+\infty} \left(W_{\frac{a_1^{(n)}}{2^n}, \ldots, W_{\frac{a_k^{(n)}}{2^n}}}\right) = \lim_{n\to+\infty} \left(W^{(n)}_{\frac{a_1^{(n)}}{2^n}, \ldots, W^{(n)}_{\frac{a_k^{(n)}}{2^n}}}\right).$$

Par convergence dominée, on en déduit que la loi de $(W_{t_1}, \ldots W_{t_k})$ est la bonne.

□

Exercice 4 (Maxima locaux du mouvement brownien)**.** Soient $p, q, r, s \in \mathbb{Q}_+$ tels que $p < q < r < s$. Montrer que

$$\mathbb{P}\left(\sup_{p\leq t\leq q} B_t = \sup_{r\leq t\leq s} B_t\right) = 0.$$

En déduire que p.s. les maxima locaux de la fonction $t \longmapsto B_t$ sont distincts.

Démonstration. Par propriété de Markov faible, on a

$$\mathbb{P}\left(\sup_{p\leq t\leq q} B_t = \sup_{r\leq t\leq s} B_t\right) = \mathbb{E}\left[\phi(S_{p,q}, B_r)\right]$$

où

$$\phi(s, x) = \mathbb{P}(\sup_{u\leq s-r} B_u = x) = 0,$$

ce qui permet de conclure.

Comme $\mathbb{Q}_+$ est dénombrable, on a presque sûrement, pour tout $p, q, r, s \in \mathbb{Q}_+$, les maxima du mouvement Brownien sur $p, q]$ et sur $[r, s]$ sont distincts, ce qui permet de conclure. □

Exercice 5 (Temps d'atteinte)**.** Pour $a \geq 0$, on pose $T_a = \inf\{s \geq 0 : B_t = a\}$.

1. Montrer que pour tout $a \geq 0$, $T_a = a^2 T_1$ en loi.
2. Soit $0 \leq a \leq b < \infty$, montrer que $T_b - T_a$ a la mêeme loi que T_{b-a} et est indépendant de T_a.

Démonstration.
1. Comme $(\frac{1}{a} B_{a^2 t}, t \in \mathbb{R}_+) \overset{(d)}{=} (B_t, t \in \mathbb{R}_+)$, on a $T_a \overset{(d)}{=} a^2 T_1$.
2. Par propriété de Markov forte, $(B_{T_a+t} - B_{T_a}, t \in \mathbb{R}_+)$ est un mouvement Brownien indépendant de $\mathcal{F}_{T_a}$, donc de T_a. Donc $T_b - T_a = T_{b-a}((B_{T_a+t} - B_{T_a})_{t\geq 0})$, ce qui permet de conclure.

□

Exercice 6 (Principe de réflexion)**.** Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien unidimensionnel. Pour tout $t > 0$, notons $S_t = \sup\{B_s : 0 \leq s \leq t\}$. Le but de l'exercice est de calculer la loi jointe de (B_t, S_t). Pour $a \geq 0$, on pose $T_a = \inf\{s \geq 0 : B_t = a\}$.

1. Montrer que T_a est un temps d'arrêt presque sûrement fini.
2. Montrer que $(B_t^{T_a})_{t\geq 0} = (B_{t+T_a} - B_{T_a})_{t\geq 0}$ est un MB indépendant de T_a.
3. Soit $a \geq 0 \geq b$. Prouver que $\mathbb{P}(S_t \geq a, B_t \leq b) = \mathbb{P}(B_t \geq 2a - b)$.
4. En déduire que la loi de (S_t, B_t) est
$$\frac{2(2a-b)}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp\left(-\frac{(2a-b)^2}{2t}\right) \mathbf{1}_{\{\{a>0, b<a\}\}} \mathrm{d}a\mathrm{d}b.$$
5. Applications : Montrer que $\mathbb{P}(S_t \geq a) = \mathbb{P}(|B_t| \geq a)$ et $\mathbb{P}(T_a \leq t) = \mathbb{P}(a^2/B_1^2 \leq t)$.

Démonstration.
1. On observe que S_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable, et $\{S_t \geq a\} = \{T_a \leq t\}$, donc T_a est un temps d'arrêt.
2. C.f. exercice précédent.

3. On a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S_t \geq a, B_t \leq b) &= \mathbb{P}(T_a \leq t, B_t - B_{T_a} \leq b-a) \\ &= \mathbb{P}(T_a \leq t, -(B_t - B_{T_a}) \leq b-a) \\ &= \mathbb{P}(T_a \leq t, B_t \geq 2b-a) \\ &= \mathbb{P}(B_t \geq 2b-a)\end{aligned}$$

car le mouvement Brownien est symétrique, et $-B \overset{(d)}{=} B$.

4. On a

$$\mathbb{P}(S_t \geq a, B_t \leq b) = \int_{2b-a}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}} dx \text{ donc}$$

$$\mathbb{P}(S_t \in da, B_t \in db) = \frac{2(2a-b)}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp\left(-\frac{(2a-b)^2}{2t}\right) \mathbf{1}_{\{\{a>0,b<a\}\}} dadb.$$

5. On a

$$\mathbb{P}(S_t \in da) = \frac{2}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{a^2}{2t}} da \mathbf{1}_{\{a>0\}} = \mathbb{P}(|B_t| \in da).$$

De la même façon

$$\mathbb{P}(T_a \leq t) = \mathbb{P}(S_t \geq a) = \mathbb{P}(B_t^2 \geq a^2) = \mathbb{P}\left(\frac{a^2}{B_1^2} \leq t\right).$$

□

Exercice 7 (Loi de l'arcsinus)**.** On définit $d_1 = \inf\{t \geq 1 | B_t = 0\}$ et $g_1 = \sup\{t \leq 1 | B_t = 0\}$.

1. Montrer que d_1 est un temps d'arrêt mais pas g_1.
2. On veut calculer la densité de la loi de d_1.
   (a) Montrer que pour tout $t \geq 1$, on a

   $$\mathbb{P}[d_1 \leq t] = \mathbb{E}[g(B_1)]$$

   où pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a posé

   $$g(x) = \mathbb{P}\left[\sup_{s \in [0,t-1]} \widetilde{B}_s \geq |x|\right]$$

   avec $\widetilde{B}$ un mouvement brownien issu de 0 et indépendant de $\mathcal{F}_1$.

   (b) Montrer que

   $$d_1 = 1 + \left(\frac{N}{\widehat{N}}\right)^2 \quad \text{en loi,}$$

   où N et $\widehat{N}$ sont des gaussiennes centrées réduites indépendantes.

   (c) En déduire la densité de la loi de d_1.
3. Montrer que $g_1 = (d_1)^{-1}$ en loi. En déduire la densité de la loi de g_1 (la loi de g_1 s'appelle la loi de l'arcsinus).

Démonstration. 1. Le fait que d_1 est un temps d'arrêt est laissé au lecteur. Si g_1 était un temps d'arrêt, alors $(B_{g_1+u} - B_{g_1})$ serait un mouvement Brownien. Mais ce processus est de signe constant sur $[0, 1-g_1]$, ce qui contredit "g_1 est un temps d'arrêt.

2. (a) Par propriété de Markov au temps 1, on a

$$\mathbb{P}(d_1 \leq t) = \mathbb{E}\left[\mathbb{P}_{B_1}(T_0(B) < t-1)\right] = \mathbb{E}\left[g(B_1)\right].$$

   (b) Comme $T_N \sim \left(\frac{N}{\tilde{N}}\right)^2$, on a $d_1 \sim 1 + \left(\frac{N}{\tilde{N}}\right)^2$.

   (c) $\mathbb{P}(d_1 \in dt) = \mathbf{1}_{\{t \geq 1\}} \frac{1}{\sqrt{\pi(t-1)}}$.

3. Par propriété de scaling du Mouvement Brownien, $g_t \overset{(d)}{=} t g_1$, dès lors

$$\mathbb{P}(d_1 \geq t) = \mathbb{P}(g_t \leq 1) = \mathbb{P}(t g_1 \leq t) = \mathbb{P}(\tfrac{1}{g_1} \geq t).$$

   On en déduit que $\mathbb{P}(g_1 \in dt) = \frac{1}{\sqrt{\pi t(1-t)}}$.

$\square$