Processus aléatoires *ENS Paris*, 2013/2014

Bastien Mallein
Bureau V2

TD 14 – Rappels

26 mai 2014

Dans toute la suite, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_n, \mathbb{P})$ représente un espace de probabilité filtré.

Exercice 1 (Calcul explicite d'espérance conditionnelle)**.** Dans cet exercice, on note $\Omega = [0,1]$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}([0,1])$, $\mathbb{P}$ la mesure de Lebesgue. On note $\mathcal{G} = \sigma([0,u], u \leq \frac{1}{2})$. Soit $h : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Déterminer

$$\mathbb{E}[h|\mathcal{G}] : \Omega \to \mathbb{R}.$$

Démonstration. On observe que une variable aléatoire $\mathcal{G}$-mesurable est une fonction mesurable g constante sur $(1/2, 1]$. On a donc

$$\mathbb{E}(gh) = \int_0^1 g(x)h(x)dx = \int_0^{1/2} g(x)h(x) + g(1/2)\int_{1/2}^1 h(x)dx.$$

On a donc

$$\mathbb{E}(h|\mathcal{G})(x) = \begin{cases} h(x) & \text{si} x \leq 1/2 \\ \int_{1/2}^1 h(u)du & \text{sinon.} \end{cases}$$

□

Exercice 2 (Espérance conditionnelle et loi produit)**.** Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs respectivement dans E et F. Soit $\mathcal{G}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$. On suppose que X est indépendante de $\mathcal{G}$ et que Y est $\mathcal{G}$-mesurable. Montrer que pour toute fonction mesurable $g : E \times F \to \mathbb{R}^+$, on a

$$\mathbb{E}[g(X,Y)|\mathcal{G}] = \int_E g(x,Y)P_X(dx)$$

où P_X désigne la loi de X. Le terme de droite est la composée de la variable aléatoire Y par l'application $\phi : y \to \int g(x,y)P_X(dx)$ (ϕ est mesurable grâce au théorème de Fubini).

Démonstration. Soit $B \in \mathcal{G}$, comme X est indépendante de $(Y, \mathbf{1}_{\{B\}})$, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[g(X,Y)\mathbf{1}_{\{B\}}] &= \int_{E\times F\times\{0,1\}} g(x,y)bP_X(dx)\mathbb{P}_{Y,B}(dy,db) \\ &= \mathbb{E}\left[\int_E g(x,Y)P_X(dx)\mathbf{1}_{\{B\}}\right]. \end{aligned}$$

□

Exercice 3 (Loi définie de façon conditionnelle)**.** Soit Y une v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}+$ de densité par rapport à la mesure de Lebesgue $\lambda^2 y e^{-\lambda y}$. Soit X une variable aléatoire dont la loi conditionnelle sachant Y est la loi uniforme sur $[0, Y]$. Montrer que X et $Y - X$ sont deux variables aléatoires indépendantes et déterminer leurs lois respectives.

Démonstration. On calcule

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[g(X, Y-X)\right] &= \int_{\mathbb{R}_+} dy \lambda^2 y e^{-\lambda y} \frac{1}{y} \int_0^y dx g(x, y-x) \\
&= \int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+} g(x, y-x) \lambda^2 e^{-\lambda y} \mathbf{1}_{\{x \le y\}} \\
&= \int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+} g(x, z) \lambda^2 e^{-\lambda(x+z)}.
\end{aligned}$$

Donc X et $Y - X$ sont indépendantes et identiquement distribuées de loi exponentielle de paramètre λ. □

Exercice 4 (Calculs explicites)**.** Soit X une variable aléatoire réelle, et $\mathcal{G} = \sigma(X \mathbf{1}_{\{X \in [-1,1]\}})$. Déterminer $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ lorsque X est une variable aléatoire de loi exponentielle, puis lorsque c'est une variable aléatoire de loi Gaussienne centrée.

Démonstration. On a, pour X de loi exponentielle

$$\mathbb{E}(X | X \mathbf{1}_{\{X \in [0,1]\}}) = X \mathbf{1}_{\{X \le 1\}} + 2.$$

Pour X de loi gaussienne

$$\mathbb{E}(X | X \mathbf{1}_{\{X \in [-1,1]\}}) = X \mathbf{1}_{\{X \in [-1,1]\}}.$$

□

Exercice 5 (Rangement sur une étagère)**.** Chaque matin un étudiant prend un des trois livres (numérotés de 1 à 3) posés sur son étagère. La probabilité qu'il choisisse le livre i est α_i, pour $i \in \{1, 2, 3\}$, où $0 < \alpha_i < 1$, et les choix qu'il fait jours après jours sont indépendants. Le soir, il replace le livre qu'il a pris à gauche des autres, sans déranger les autres. Quel est le comportement asymptotique de p_n, la probabilité que le n-ième matin au réveil l'étudiant trouve ses livres rangés dans l'ordre $(1, 2, 3)$ (de gauche à droite) ? Quel est le comportement asymptotique du nombre de fois où l'étudiant prend le livre le plus à gauche sur son étagère ?

Démonstration. Pour tout $n \ge 0$, on note X_n l'ordre des livres au $n^{\text{ième}}$ matin, avant que l'étudiant ne fasse son choix. La variable X_n est à valeurs dans l'espace des permutations

$$S = \{(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1)\}.$$

On note ξ_n le numéro du livre choisi par l'étudiant le $n^{\text{ième}}$ matin, les $(\xi_n)_{n \ge 0}$ sont des variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans $\{1, 2, 3\}$, on note γ la loi de ξ_1. Pour tout n, X_n est $\sigma(\xi_0, \cdots \xi_{n-1})$, donc ξ_n est indépendant de X_n.

On observe que $(X_n, n \ge 0)$ est une chaîne de Markov à valeurs dans S de fonction de transition Q déterminée par

$$\begin{cases}
Q((a, b, c), (a, b, c)) = \alpha_a \\
Q((a, b, c), (b, a, c)) = \alpha_b \\
Q((a, b, c), (c, a, b)) = \alpha_c \\
Q((a, b, c), (d, e, f)) = 0 & \text{dans les autres cas.}
\end{cases}$$

Cette chaîne est irréductible, récurrente positive et apériodique. Elle possède donc une unique mesure de probabilité invariante, que l'on note π. Par conséquent, pour tout $x \in S$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n = x) = \pi(x) \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n = x, \xi_n = i) = \mathbb{P}(\xi_1 = i) \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n = x) = \pi(x)\gamma(i).$$

par indépendance. On détermine maintenant π.

Soit $(a, b, c) \in S$, comme $\pi Q = \pi$, on a

$$\pi(a, b, c) = \alpha_a \left[\pi(a, b, c) + \pi(b, a, c) + \pi(b, c, a)\right].$$

En particulier, on a

$$\pi(a, b, c) + \pi(a, c, b) = \alpha_a \sum_{x\in S} \pi(x) = \alpha_a.$$

On en déduit donc

$$\pi(a, b, c) = \alpha_a \left[\pi(a, b, c) + \underbrace{\pi(b, a, c) + \pi(b, c, a)}_{\alpha_b}\right],$$

par conséquent

$$\pi(a, b, c) = \frac{\alpha_a \alpha_b}{1 - \alpha_a}.$$

Par conséquent, on a

$$\lim_{n\to+\infty} p_n = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{1 - \alpha_1}.$$

De plus

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \sum_{x\in S} \mathbb{P}(X_n = x, \xi_n = x_1) &= \sum_{x\in S} \pi(x)\gamma(x_i) \\
&= \frac{\alpha_1}{1 - \alpha_1}\left[\alpha_2\alpha_1 + \alpha_3\alpha_1\right] + \frac{\alpha_2}{1 - \alpha_2}\left[\alpha_1\alpha_2 + \alpha_3\alpha_2\right] + \frac{\alpha_3}{1 - \alpha_3}\left[\alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3\right] \\
&= \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2,
\end{aligned}$$

qui est aussi la probabilité de prendre deux jours de suite le même livre. □

Exercice 6 (Marche aléatoire en milieu aléatoire)**.** Soient $(\omega_x^+)_{x\in\mathbb{Z}}$ une famille de v.a. i.i.d. sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $]0, 1[$. On fait les notations suivantes :

$$\omega_x^- = 1 - \omega_x^+, \quad \omega_x = (\omega_x^-, \omega_x^+),$$

$$\omega = (\dots, \omega_{-1}, \omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots), \quad \text{et} \quad \rho_x = \frac{\omega_x^-}{\omega_x^+}.$$

Prenons un ω fixé qui servira d'environnement aléatoire. Maintenant définissons $((X_n)_{n\geq 0}, P_\omega)$ la chaîne de Markov issue de 0 qui vérifie :

$$P_\omega[X_{n+1} = x + 1 | X_n = x] = \omega_x^+ \quad \text{et} \quad P_\omega[X_{n+1} = x - 1 | X_n = x] = \omega_x^-.$$

Nous allons montrer le théorème suivant :

– Si $\mathbb{E}[\log(\rho_0)] < 0$, alors $P_\omega[\lim X_n = +\infty] = 1$, $\mathbb{P}$-p.s.

- Si $\mathbb{E}[\log(\rho_0)] > 0$, alors $P_\omega[\lim X_n = -\infty] = 1$, $\mathbb{P}$-p.s.
- Si $\mathbb{E}[\log(\rho_0)] = 0$, alors $P_\omega[\limsup X_n = +\infty, \liminf X_n = -\infty] = 1$, $\mathbb{P}$-p.s.

1. Soit $a \leq b$ des entiers, définissons
$$\Pi_{a,b} = \prod_{a<x\leq b} \rho_x$$
$$f(z) = \begin{cases} \sum_{0\leq x<z} \Pi_{0,x} & \text{si } z \geq 0 \\ -\sum_{z\leq x<0} \Pi_{x,0}^{-1} & \text{si } z < 0 \end{cases}$$
Montrer que $f(X_n)$ est une martingale sous P_ω pour la filtration canonique.
2. Soient $M_- < 0 < M_+$, on pose $T_{M_\pm} = \inf\{n \geq 1 : X_n = M_\pm\}$, calculer $P_\omega[T_{M_+} < T_{M_-}]$.
3. Lorsque $\mathbb{E}[\log(\rho_0)] < 0$, montrer que $P_\omega[\lim X_n = +\infty] = 1$ $\mathbb{P}$-p.s.
4. Lorsque $\mathbb{E}[\log(\rho_0)] = 0$ et $\mathbb{E}[\log^2(\rho_0)] < \infty$. Montrer que, $\mathbb{P}$-p.s.
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$
En déduire que $P_\omega[\limsup X_n = +\infty, \liminf X_n = -\infty] = 1$.
5. ($\star$) Même question lorsqu'on ne suppose pas $\mathbb{E}[\log^2(\rho_0)] < \infty$.

Démonstration. 1. On calcule
$$\mathbb{E}_\omega[f(X_{n+1})|\mathcal{F}_n] = f(X_n) + \omega^+_{X_n}\Pi_{0,X_n+1} - \omega^-_{X_n}\Pi_{0,X_n-1} = f(X_n)$$
ce qui permet de conclure.

2. On applique le théorème d'arrêt, on a :
$$\begin{aligned} f(X_0) &= \mathbb{E}_\omega[f(X_{T_+\wedge T_-})] \\ 0 &= f(M_+)\mathbb{P}(T_+ < T_-) + f(M_-)(1 - \mathbb{P}(T_+ < T_-)), \end{aligned}$$
d'où on déduit
$$\mathbb{P}(T_+ < T_-) = \frac{-f(M_-)}{f(M_+) - f(M_-)}.$$

3. Par loi des grands nombres, on a $\lim_{n\to+\infty} \frac{\log \Pi_{0,n}}{n} < 0$ p.s., donc
$$\lim_{M\to+\infty} f(M) < +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{M\to-\infty} f(M) = +\infty.$$
Par conséquent, on a, pour $M > 0$
$$\mathbb{P}_\omega(T_M < +\infty) = \lim_{M'\to-\infty} \mathbb{P}_\omega(T_M < T_{M'}) = 0 \quad \text{a.s.}$$
et $\mathbb{P}_\omega(T_M < +\infty) = 1$ a.s. pour $M < 0$. On en déduit $\lim_{n\to+\infty} X_n = -\infty$.

4. La suite $(\log \Pi_{0,n}, n \geq 0)$ est une marche aléatoire centrée de variance finie, donc $\limsup \log \Pi_{0,n} = -\liminf \log \Pi_{0,n} = +\infty$ a.s. On en déduit que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. On en déduit, pour tout $M \in \mathbb{Z}$
$$\mathbb{P}_\omega(T_M < +\infty) = 1 \quad \text{a.s.}$$
D'où on déduit
$$\mathbb{P}_\omega(\limsup_{n\to+\infty} X_n = -\liminf_{n\to+\infty} X_n = +\infty).$$
$\square$

Exercice 7 (Deux transformations de martingales)**.** On se place sur l'espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, muni de la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Soit $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ une fonction convexe, et soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un processus adapté (i.e. X_n est $\mathcal{F}_n$-mesurable pour tout n), tel que $\mathbb{E}[\phi(X_n)] < \infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si (X_n) est une martingale, alors $(\phi(X_n))$ est une sous-martingale. Montrer que si (X_n) est une sous-martingale et si ϕ est croissante, alors $(\phi(X_n))$ est une sous-martingale.
2. On dit qu'un processus $(H_n)_{n\geq 1}$ est prévisible si, pour tout $n \geq 1$, H_n est $\mathcal{F}_{n-1}$-mesurable (*Attention, parfois prévisible recouvre en plus la notion de bornitude, pas ici*). Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un processus adapté et $(H_n)_{n\geq 1}$ une famille prévisible et bornée. On pose $(H \bullet X)_0 = 0$ et pour tout $n \geq 1$,

$$(H \bullet X)_n = H_1(X_1 - X_0) + H_2(X_2 - X_1) + ... + H_n(X_n - X_{n-1}).$$

Montrer que si (X_n) est une martingale, alors $((H \bullet X)_n)$ est aussi une martingale. Montrer que si (X_n) est une surmartingale (respectivement sous-martingale), et si $H_n \geq 0$ pour tout $n \geq 1$, $((H \bullet X)_n)$ est une surmartingale (respectivement sous-martingale).

Démonstration. 1. La mesurabilité par rapport à $\mathcal{F}_n$ et l'intégrabilité de $\phi(X_n)$ sont triviales dans les deux cas pour tout n. Or par l'inégalité de Jensen pour les espérances conditionnelles, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\mathbb{E}[\phi(X_{n+1})|\mathcal{F}_n] \;\geq\; \phi(\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n])$$

Dans le premier cas on conclut car $\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = X_n$ p.s., et dans l'autre cas car $\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] \geq X_n$ et ϕ est croissante.

2. On vérifie facilement dans les deux cas que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(H \bullet X)_n$ est intégrable (car les (X_i) sont intégrables et les (H_i) sont bornés) et mesurable par rapport a $\mathcal{F}_n$ (car les (X_i) sont adaptés et les (H_i) sont prévisibles). Il suffit donc de regarder, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le signe de

$$\mathbb{E}[(H \bullet X)_{n+1} - (H \bullet X)_n|\mathcal{F}_n],$$

si cette variable est nulle p.s. alors $((H \bullet X)_n)$ est une martingale, si elle est positive c'est une sous-martingale, et si elle est négative c'est une surmartingale. Or $(H\bullet X)_{n+1} - (H\bullet X)_n = H_{n+1}(X_{n+1} - X_n)$ et puisque H_{n+1} est $\mathcal{F}_n$-mesurable on a

$$\mathbb{E}[H_{n+1}(X_{n+1} - X_n)|\mathcal{F}_n] \;=\; H_{n+1}\mathbb{E}[X_{n+1} - X_n|\mathcal{F}_n].$$

Le résultat tombe alors immédiatement suivant les hypothèses sous lesquelles on se place (que ce soit $\mathbb{E}[X_{n+1} - X_n|\mathcal{F}_n] = 0$, $\mathbb{E}[X_{n+1} - X_n|\mathcal{F}_n] \leq 0$ et $H_{n+1} \geq 0$ ou $\mathbb{E}[X_{n+1} - X_n|\mathcal{F}_n] \geq 0$ et $H_{n+1} \geq 0$).

□

Exercice 8. On se donne n points répartis uniformément dans le carré $[0, 1]^2$. Chaque point est lié à son voisin le plus proche. Calculer la taille moyenne d'un groupe de points reliés les uns aux autres.