Probabilités
Corrigé n° 1

Première partie
1. Commençons par le dessin.

On observe que T_{2n} est pair. Par exemple, on remarque que T_{2n} est la somme de différences de temps d'atteinte de zéro par la marche aléatoire, et/ou de $2n$ privé d'un temps d'atteinte de zéro par la marche aléatoire, qui ne sont que des quantités paires.

2. On note $\tilde{T}_{2n} = \mathrm{card}\{k : 0 \leq k < 2n : \min(S_k, S_{k+1}) < 0\}$, on a $T_{2n} + \tilde{T}_{2n} = 2n$. De plus, $\tilde{T}_{2n}$ est le temps passé par la marche aléatoire $-S$ au-dessus de zéro, dès lors, pour tout $k \leq n$

$$\mathbb{P}(T_{2n} = 2k) = \mathbb{P}(\tilde{T}_{2n} = 2(n-k)) = \mathbb{P}(T_{2n} = 2(n-k)).$$

3. En ajoutant un pas négatif au début de la marche aléatoire, on a

$$\mathbb{P}(T_{2n} = 0) = \mathbb{P}(S_1 \leq 0, \dots S_{2n} \leq 0) = 2\mathbb{P}(S_1 < 0, \dots S_{2n+1} < 0) = \mathbb{P}(S_{2n} = 0)$$

grâce au lemme fondamental. Par conséquent

$$\mathbb{P}(T_{2n} = 0) = 2^{-2n}\binom{2n}{n}.$$

4. On observe que s'il n'existe aucun retour en zéro entre les instants 0 et $2n$, alors $T_{2n} = 0$ ou $T_{2n} = 2n$. Par conséquent, si $T_{2n} = 2k \in (0, 2n)$, il existe un entier r qui est le premier temps de retour en 0 de la marche aléatoire. Dès lors, en décomposant par rapport à la valeur de r, et à la positivité ou la négativité de la marche aléatoire sur $[0, r]$, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T_{2n} = 2k) &= \sum_{r=0}^{n} \mathbb{P}(S_1 \neq 0, \dots S_{2r-1} \neq 0, S_{2r} = 0, T_{2n} = 2k) \\ &= \sum_{r=1}^{n} \mathbb{P}(S_1 > 0, \dots S_{2r-1} > 0, S_{2r} = 0, T_{2n} - T_{2r} = 2(k-r)) \\ &\qquad + \sum_{r=1}^{n} \mathbb{P}(S_1 < 0, \dots S_{r-1} < 0, S_{2r} = 0, T_{2n} - T_{2r} = 2k).\end{aligned}$$

On utilise alors le fait qu'un chemin issu de 0, passant par 0 en $2r$ pour la première fois, et de longeur $2n$ est la concaténation d'un chemin issu de 0 revenant en $2r$ pour la première fois, et d'un chemin issu de 0 de longueur $2(n-k)$. Dès lors

$$\begin{aligned}2^{2n}\mathbb{P}(T_{2n} = 2k) &= \sum_{r=1}^{n} 2^{2r}\mathbb{P}(S_1 > 0, \dots S_{2r-1} > 0, S_{2r} = 0) 2^{2(n-r)}\mathbb{P}(T_{2(n-r)} = 2(k-r)) \\ &\qquad + \sum_{r=1}^{n} 2^{2r}\mathbb{P}(S_1 < 0, \dots S_{2r-1} < 0, S_{2r} = 0) 2^{2(n-r)}\mathbb{P}(T_{2(n-r)} = 2k).\end{aligned}$$

On rappelle le théorème du scrutin

$$\mathbb{P}(S_1 \neq 0, \ldots S_{r-1} \neq 0, S_r = 0) = \frac{1}{2r-1}\mathbb{P}(S_r = 0),$$

et on utilise que $\mathbb{P}(T_{2k} > 2k) = 0$ et $\mathbb{P}(T_{2k} < 0) = 0$ pour tout k. Dès lors

$$\begin{aligned} 2^{2n}\mathbb{P}(T_{2n} = 2k) = \sum_{r=1}^{k} \frac{2^{2n-1}}{2r-1}\mathbb{P}(S_{2r} = 0)\mathbb{P}(T_{2n-2r} = 2(k-r)) \\ + \sum_{r=1}^{n-k} \frac{2^{2n-1}}{2r-1}\mathbb{P}(S_{2r} = 0)\mathbb{P}(T_{2n-2r} = 2k). \end{aligned}$$

5. On raisonne par récurrence sur n. L'hypothèse de récurrence au rang n est

$$(\mathrm{H}_n) \qquad \text{Pour tout } k \leq n, \text{ on a } \mathbb{P}(T_{2n} = 2k) = 2^{-2n}\tbinom{2k}{k}\tbinom{2(n-k)}{n-k}.$$

Cette hypothèse est trivialement vraie au rang 1

$$\mathbb{P}(T_2 = 0) = \mathbb{P}(T_2 = 2) = \mathbb{P}(S_1 = 1) = \frac{1}{2}.$$

On suppose maintenant $(\mathrm{H}_{n'})$ pour tout $n' \leq n-1$. Soit $k \leq n$. Si $k = 0$ (ou par symétrie, si $k = n$), grâce à la question *3*,

$$\mathbb{P}(T_{2n} = 0) = \mathbb{P}(T_{2n} = 2n) = 2^{-2n}\binom{2n}{n}.$$

Soit $k \in (0, n)$, grâce à la question *4* et l'hypothèse de récurrence, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T_{2n} = 2k) &= \sum_{r=1}^{k} \frac{1}{2(2r-1)}\mathbb{P}(S_{2r} = 0)2^{-2(n-r)}\binom{2(k-r)}{k-r}\binom{2(n-k)}{n-k} \\ &\quad + \sum_{r=1}^{n-k} \frac{1}{2(2r-1)}\mathbb{P}(S_{2r} = 0)2^{-2(n-r)}\binom{2k}{k}\binom{2(n-k-r)}{n-k-r} \\ &= \frac{1}{2}\binom{2(n-k)}{n-k}\underbrace{\sum_{r=1}^{k}\mathbb{P}(S_1 \neq 0, \ldots S_{r-1} \neq 0, S_r = 0)\mathbb{P}(S_{k-r} = 0)}_{\mathbb{P}(S_k = 0)} \\ &\quad + \frac{1}{2}\binom{2k}{k}\underbrace{\sum_{r=1}^{n-k}\mathbb{P}(S_1 \neq 0, \ldots S_{r-1} \neq 0, S_r = 0)\mathbb{P}(S_{n-k-r} = 0)}_{\mathbb{P}(S_{n-k} = 0)} \end{aligned}$$

par décomposition par rapport au premier temps de passage en 0. On a donc bien

$$\mathbb{P}(T_{2n} = 2k) = \frac{1}{2^{2n}}\binom{2k}{k}\binom{2(n-k)}{n-k}.$$

6. Les applications numériques donnent

$$2\mathbb{P}(T_{20} = 0) \approx 0,352$$

$$2\mathbb{P}(T_{20} \geq 16) \approx 0,685$$

$$\mathbb{P}(T_{20} = 10) \approx 0,0606.$$

On observe que lorsqu'un jeu est gagné, il est bien plus probable que le vainqueur mène pratiquement tout le temps que d'imaginer que chacun ai mené presque la moitié du temps.

7. Par symétrie de la marche aléatoire, on a toujours

$$\mathbb{P}(T_{2n} = 2k, S_{2n} = 0) = \mathbb{P}(T_{2n} = 2(n-k), S_{2n} = 0.$$

On a en particulier

$$\mathbb{P}(T_{2n} = 0, S_{2n=0}) = \mathbb{P}(S_1 \leq 0, \dots S_{2n-1 \leq 0}, S_{2n=0}) = \frac{1}{n+1}\mathbb{P}(S_{2n} = 0),$$

par lemme fondamental et principe de réflexion.

8. On peut, de la même façon que précédemment, décomposer la marche en fonction de son premier temps de retour en 0, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T_{2n} = 2k, S_{2n=0}) = &\sum_{r=1}^{k} \frac{1}{2(2r-1)}\mathbb{P}(S_{2r} = 0)\mathbb{P}(T_{2(n-r)} = 2(k-r)) \\ &+ \sum_{r=1}^{n-k} \frac{1}{2(2r-1)}\mathbb{P}(S_{2r} = 0)\mathbb{P}(T_{2(n-r)} = 2k).\end{aligned}$$

On conclut par récurrence, de la même façon que précédemment, que $\mathbb{P}(T_{2n} = 2k, S_{2n} = 0) = \frac{\mathbb{P}(S_{2n}=0}{n+1}$.

9. On observe que la loi de T_{2n}, conditionnellement à $S_{2n} = 0$ est uniforme sur $[|0, n|]$. Il y a un « rééquilibrage » qui s'opère, les extrêmes ne sont plus favorisés.

Seconde partie.

1. Cette probabilité se calcule grâce au principe de réflexion, on a

$$\mathbb{P}(S_1 > -b, \cdots S_{n-1} > -b, S_n = a) = \mathbb{P}(S_n = a) - \mathbb{P}(S_n = -2b - a) = 2^{-2n}\binom{n}{\frac{n+a}{2}} - 2^{-2n}\binom{n}{b + \frac{n+a}{2}}.$$

2. De la même façon que précédemment, on a

$$\mathbb{P}(S_1 < b, \cdots S_{n-1} < b, S_n = a) = 2^{-2n}\binom{n}{\frac{n+a}{2}} - 2^{-2n}\binom{n}{b + \frac{n-a}{2}}.$$

3. On utilise encore le principe de réflexion :

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(\exists k \leq n : S_1 < a, \cdots S_{k-1} < a, S_k = a, S_{k+1} > -b, \cdots S_{n-1} > -b, S_n = c) \\ &\quad = \mathbb{P}(\exists k \leq n : S_k = a \text{ pour la première fois}, S_n = c) \\ &\qquad\quad - \mathbb{P}(\exists k_1 \leq k_2 \leq n : S_{k_1} = a, S_{k_2} = -b \text{ pour la première fois}, S_n = c) \\ &\quad = \mathbb{P}(S_n = 2a - c) - \mathbb{P}(\exists k \leq n : S_1 < a, \cdots S_{k-1} < a, S_k = a, S_n = -2b - c) \\ &\quad = \mathbb{P}(S_n = 2a - c) - \mathbb{P}(S_n = 2(a + b) + c) \\ &\quad = 2^{-n}\binom{2n}{a + \frac{n-c}{2}} - 2^{-n}\binom{2n}{a + b + \frac{n+c}{2}}.\end{aligned}$$

4. On raisonne par récurrence sur k. Si $k = 1$, la question précédente garantit que, pour tout triplet d'entiers avec $-b < a$ et $c \in [-b, a]$

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(T_1 < +\infty, U_1 = +\infty, S_n = c) \\ &\quad = \mathbb{P}(\exists k < n : S_1 < a, \cdots S_{k-1} < a, S_k = a, S_{k+1} > -b, \cdots S_{n-1} > -b, S_n = c) \\ &\quad = N(n, 2a - c) - N(n, 2(a + b) + c).\end{aligned}$$

Soit $k \in \mathbb{N}$, on suppose

$$\mathbb{P}(T_{k-1} < +\infty, U_{k-1} = +\infty, S_n = c) = N(n, 2(k-2)(a+b) + 2a - c) - N(n, 2(k-1)(a+b) + c).$$

On étudie maintenant l'événement $\{T_k < +\infty, U_k = +\infty\}$. On utilise le principe de réflexion aux premier temps d'atteinte de a de la marche aléatoire, puis au premier temps d'atteinte de $2a+b$. Un tel chemin est alors, avec des notations évidentes, un élément de l'ensemble $\{T_{k-1}^{2(a+b)+a} < +\infty, U_{k-1}^{2a+b} = +\infty, S_n = 2(a+b) + c\}$, ce qui permet d'obtenir,

$$\mathbb{P}(T_k < +\infty, U_k = +\infty, S_n = c) = N(n, (2(k-1)(a+b) + 2a - c) - N(n, 2k(a+b) + c)$$

5. On observe que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(L > -\infty, S_L = a, S_n = c) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(T_k < +\infty, U_k = +\infty, S_n = c) \\ &= \sum_k N(n, 2(k-1)(a+b) + 2a - c) - N(n, 2k(a+b) + c).\end{aligned}$$

Par symétrie des quantités, en échangeant les rôles de a et b, et c en $-c$, on obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(L > -\infty, S_L = b, S_n = c) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(T_k < +\infty, U_k = +\infty, S_n = c) \\ &= \sum_k N(n, 2(k-1)(a+b) + 2b + c) - N(n, 2k(a+b) - c).\end{aligned}$$

6. On a alors

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(L = -\infty, S_n = c) = \mathbb{P}(S_n = c) - \sum_{k=1}^{+\infty} N(n, 2(k-1)(a+b) + 2a - c) + N(n, 2(k-1)(a+b) + 2b + c) \\ - \sum_{k=1}^{+\infty} N(n, 2k(a+b) + c) + N(n, 2k(a+b) - c).\end{aligned}$$