Processus aléatoires *ENS Paris*, 2015/2016

Bastien Mallein
Bureau V2

TD 2 – Calculs de lois

1er octobre 2016

Exercice 1 (Point au hasard sur le cercle)**.** Soit (X,Y) une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ distribuée uniformément sur le cercle unité. Déterminer les lois de X, Y et $X+Y$.

Solution. Notons que $(X,Y) = (\cos(2\pi U), \sin(2\pi U))$, où U est une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$ pour déterminer immédiatement ces lois par changement de variable. On a

$$\mathbb{E}(f(X)) = \int_0^1 f(\cos(2\pi u))du = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^1 \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx.$$

De la même façon

$$Y = \sin(2\pi U) = \cos(2\pi(1/4 - U)) \overset{(d)}{=} \cos(2\pi U) = X,$$

et

$$X + Y = \sqrt{2}\cos(2\pi U - \pi/4) \overset{(d)}{=} \sqrt{2}X$$

sont des variables aléatoires de loi de l'Arcsinus centrées. □

Exercice 2 (Point au hasard dans la boule)**.** Soit (X_1, X_2) une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, distribuée uniformément sur le disque unité. Déterminer la loi de X.

Soit $d \geq 2$, et $(X_1, \cdots X_d)$ une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, distribuée uniformément dans la boule unité. Quelle est la loi de X_1 ?

Solution. Pour toute fonction f continue bornée

$$\mathbb{E}(f(X_1)) = \frac{1}{\pi}\int_{x_1^2+x_2^2\leq 1} f(x_1)dx_1dx_2 = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^1 f(x_1)2\sqrt{1-x_1^2}dx_1,$$

d'où on tire la densité de X_1, appelée loi du demi-cercle.

De la même façon, on a dans $\mathbb{R}^d$

$$\mathbb{E}(f(X_1)) = \frac{1}{V_d}\int_{-1}^1 f(x_1)V_{d-1}(\sqrt{1-x_1^2})dx_1,$$

où $V_d(x)$ est le volume de la boule de $\mathbb{R}^d$ de rayon x, et $V_d = V_d(1)$. Or $V_d(\alpha) = \alpha^d V_d$, par dilatation. Par conséquent,

$$\mathbb{E}(f(X_1)) = C_d \int_{-1}^1 f(x_1)\left(1 - x_1^2\right)^{\frac{d-1}{2}} dx_1,$$

avec $C_d = \frac{\Gamma(d/2+1)}{\pi^{1/2}\Gamma((d+1)/2)}$ une constante que l'on détermine grâce aux intégrales de Wallis. □

Exercice 3 (Sur un théorème de Lévy)**.** Soit $(S_n, n \geq 0)$ une marche aléatoire simple symétrique. On pose $M_n = \max_{k \leq n} S_k$.

1. Montrer que pour tout $p \geq 0$, $q \leq p$ on a $\mathbb{P}(M_n \geq p, S_n \leq q) = \mathbb{P}(S_n \geq 2p - q)$.
2. En déduire que $(n^{-1/2} S_n, n^{-1/2} M_n)$ converge en loi vers (S, M) qui admet pour densité

$$\mathbb{P}(S \in ds, M \in dm) = \frac{2(2m - s)}{\sqrt{2\pi}} e^{-(2m-s)^2/2} \mathbf{1}_{\{m \geq 0\}} \mathbf{1}_{\{s \leq m\}}.$$

3. Déterminer les lois de S, M et $M - S$.
4. Déterminer la loi de $(2M - S, M)$.

Solution. Soit N une gaussienne centrée réduite.

1. On montre ce résultat par principe de réflexion.
2. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}$ avec $y \geq 0$, $x \leq y$ on a

$$\mathbb{P}\left(M_n \geq \left\lfloor yn^{1/2} \right\rfloor, S_n \leq \left\lfloor xn^{1/2} \right\rfloor\right) = \mathbb{P}\left(S_n \geq 2\left\lfloor yn^{1/2} \right\rfloor - \left\lfloor xn^{1/2} \right\rfloor\right) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \mathbb{P}\left(N \geq 2y - x\right).$$

   En dérivant l'expression, on a $\mathbb{P}(S \in ds, M \in dm) = \frac{2(2m-s)}{\sqrt{2\pi}} e^{-(2m-s)^2/2} \mathbf{1}_{\{m \geq 0\}} \mathbf{1}_{\{s \leq m\}}$.

3. On a $M \overset{(d)}{=} |N|$, $S \overset{(d)}{=} N$ et $M - S \overset{(d)}{=} |N|$.
4. La loi de $2M - S$ a une densité proportionnelle à $x^2 e^{-x^2/2}$, et conditionnellement à $2M - S = a$, M est uniforme sur $[0, a]$.

□

Exercice 1983 (Easter egg)**.** Soit $(U_1, \cdots U_n)$ des variables aléatoires i.i.d. de loi uniforme sur $[0, 1]$.

1. Montrer que $n \min_{i \leq n} U_i$ converge en loi vers une variable aléatoire de loi à déterminer.
2. Montrer que $n^2 \min_{1 \leq i,j \leq n} |U_i - U_j|$ converge également en loi, et déterminer cette limite.

Exercice 4 (Théorème d'Archimède)**.** Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^3$, distribuée uniformément sur la sphère unité, et $n = (1, 0, 0)$.

1. Montrer que $n.X$ suit une loi uniforme sur $[-1, 1]$.
2. En déduire qu'il est possible de couvrir un puits circulaire de largeur L par k planches rectangulaires de longueur L et de largeur respective $\ell_1, \ldots \ell_k$ sans couper les planches si et seulement si $L \leq \ell_1 + \cdots + \ell_k$.

Solution. 1. On calcule

$$\mathbb{E}(f(n.X)) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-1}^{1} f(x_1) d\sigma(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f(\cos\theta) \sin\theta d\theta d\phi = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} f(x) dx.$$

   donc $n.X$ suit une loi uniforme sur $[0, 1]$.

2. Cette conclusion est laissée au lecteur.

□

Exercice 5 (La formule des compléments)**.** On note Γ la fonction définie pour $x > 0$ par

$$\Gamma(x) = \int t^{x-1} e^{-t} dt.$$

1. Calculer l'image de la mesure
$$x^{a-1}y^{b-1}e^{-(x+y)}\mathbf{1}_{\{x>0\}}\mathbf{1}_{\{y>0\}}$$
par l'application
$$(x,y)\mapsto \left(x+y, \tfrac{y}{x+y}\right)$$
2. En déduire la formule des compléments
$$\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} = \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}dt.$$

Solution. 1. On observe pour commencer que
$$\int f(x+y, \tfrac{y}{x+y})x^{a-1}y^{b-1}e^{-x+y}\mathbf{1}_{\{x>0,y>0\}}dxdy = \int f(u,v)\mathbf{1}_{\{u>0,v\in(0,1)\}}(u(1-v))^{a-1}(uv)^{b-1}e^{-u}ududv$$
$$= \int_0^{+\infty} u^{a+b-1}e^{-u}\int_0^1 v^{b-1}(1-v)^{a-1}f(u,v)dvdu.$$

2. On en déduit, par conservation de la masse totale par transport, la formule des compléments :
$$\Gamma(a)\Gamma(b) = \Gamma(a+b)\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}dt.$$

□

Exercice 6 (Quelques rappels sur Borel-Cantelli)**.** Soit (X_n) une suite i.i.d. de variables aléatoires gaussiennes centrées réduites, on pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

1. Montrer que $\mathbb{P}(X_1 \geq a) \sim_{a\to+\infty} \frac{1}{a\sqrt{2\pi}}e^{-a^2/2}$.

   Indication : On pourra utiliser que $\mathbb{E}\left(\frac{\mathbf{1}_{\{X_1\geq a\}}}{X^2}\right) = o(\mathbb{P}(X_1 \geq a))$ pour a grand.
2. Déterminer la loi de $S_n/\sqrt{n}$. En déduire que si (a_n) est une suite de réels positifs telle que $a_n/\sqrt{n} \to +\infty$, alors $S_n/a_n \to 0$ en probabilité. Peut-on conclure pour la convergence p.s. ? Montrer que pour $a_n = \sqrt{n}\log n$ la convergence a lieu presque sûrement.
3. Montrer que
$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{X_n}{\sqrt{2\log n}} = \limsup_{n\to+\infty} \frac{|X_n|}{\sqrt{2\log n}} = 1 \quad \text{p.s.}$$

Solution. 1. On réalise une intégration par parties, on a
$$\int_a^{+\infty} e^{-x^2/2}dx = \int_a^{+\infty} xe^{-x^2/2}\frac{dx}{x} = \frac{1}{a}e^{-a^2/2} + \int_a^{+\infty}\frac{1}{x^2}e^{-x^2/2}dx,$$
or $0 \leq \int_a^{+\infty}\frac{1}{x^2}e^{-x^2/2} \leq \frac{1}{a^2}\int_a^{+\infty} e^{-x^2/2}dx$; on obtient l'équivalent.

2. On observe trivialement que $\frac{S_n}{\sqrt{n}}$ est une variable aléatoire gaussienne centrée réduite, en étudiant par exemple la fonction caractéristique. On en déduit les résultats suivants, car
$$\mathbb{P}(|S_n/a_n| > \epsilon) = \mathbb{P}(|X_1| > \epsilon a_n/n^{1/2}) \to 0.$$
La convergence p.s. est fausse en générale, par exemple en utilisant $a_n = \sqrt{n\log\log n}$, mais la preuve en sera faite bien plus tard. En revanche pour $a_n = n\log n$, on a la convergence p.s. grâce à la question 1.

3. Une application de Borel-Cantelli nous donne facilement
$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to+\infty} \frac{X_n}{\sqrt{2\log n}} \in (-\infty, 1-\delta] \cup [1+\delta, +\infty)\right) = 0,$$
car
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X_n \geq \sqrt{2\log n}(1+\delta)) < +\infty \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X_n \geq \sqrt{2\log n}(1-\delta)) = +\infty.$$

□

Exercice 7 (Vers le théorème de Cramér)**.**

Solution. En calculant $\mathbb{E}(f(Y))$ pour toute fonction continue Y, on montre sans difficultés que

1. X suit une loi binomiale de paramètres n et $\frac{pe^\xi}{1-p+pe^\xi}$;
2. X suit une loi géométrique de paramètre ρe^ξ dès que $\xi < -\log \rho$;
3. X suit une loi de Poisson de paramètre λe^ξ ;
4. X suit une loi gaussienne de paramètres $\mu + \xi\sigma^2, \sigma^2$;
5. X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda - \xi$ dès que $\xi < \lambda$.

□

Exercice 8 (Biais par la taille)**.**

Solution. 1. Si X suit une loi de Poisson, $\widehat{X} \overset{(d)}{=} X+1$; $\mathbb{P}(\widehat{X} = k) = k(1-p)^2p^k$ si X suit une loi géométrique.
2. $\widehat{|X|}$ a pour densité $xe^{-x^2/2}dx\mathbf{1}_{\{x\geq 0\}}$.
3. $\sqrt{2\mathrm{e}}$ a également pour densité $xe^{-x^2/2}dx\mathbf{1}_{\{x\geq 0\}}$.

□

Exercice 9 (Une minoration)**.** Soit X, Y deux variables aléatoires réelles indépendantes dans L^1.

1. Montrer que
$$\mathbb{E}|X-Y| \geq \frac{1}{2}\mathbb{E}|X-X'| + \frac{1}{2}\mathbb{E}|Y-Y'|,$$
où (X', Y') est une copie indépendante de X, Y.
Indication.
$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{\{x\leq t<y\}} + \mathbf{1}_{\{y\leq t<x\}} dt = |x-y|$$
2. Discuter les cas d'égalités.
3. Généraliser ce résultat à un espace euclidien quelconque.

Solution. 1. On pose, pour $t \in \mathbb{R}$, $f(t) = \mathbb{P}(X \leq t)$ et $g(t) = \mathbb{P}(Y \leq t)$. On observe que
$$\mathbb{E}|X-Y| - \frac{1}{2}\left[\mathbb{E}|X-X'| + \mathbb{E}|Y-Y'|\right] = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} |f(t)-g(t)|^2 dt,$$
d'où l'inégalité.
2. L'égalité n'a lieu que pour des variables aléatoires égales en loi, d'après la formule précédente
3. La généralisation est laissée au lecteur courageux.

□