Bastien Mallein
Bureau V2

TD 3 – Marches aléatoires et séries génératrices

Jeudi 1er Octobre

Exercice 1 (Mithridatisation)**.** Soit $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ et $\mathcal{C} = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{1, 3\}, \{2, 4\}\}$. On pose

$$\mu(1) = \nu(2) = \nu(3) = \mu(4) = 1/6, \nu(1) = \mu(2) = \mu(3) = \nu(4) = 1/3.$$

Montrer que bien que $\mu = \nu$ sur $\mathcal{C}$, et bien que $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{P}(\Omega)$, on a $\mu \neq \nu$. Quel est le problème ?

Démonstration. Lemme des classes monotones. □

Exercice 2 (Marche aléatoire simple)**.** Soit $(X_n, n \geq 0)$ une suite de variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans $\{-1, 1\}$ telle que $\mathbb{P}(X_n = 1) = 1 - \mathbb{P}(X_n = -1) = p \in (0, 1)$. On note, pour $M, n \in \mathbb{N}$, et $k \in [|0, M|]$

$$S_n^k = k + \sum_{j=1}^{n} X_j \quad \text{et} \quad T_k = \inf\{j \in \mathbb{N} : S_j^k \in \{0, M\}\},$$

une marche aléatoire issue de k et son premier temps d'atteinte de 0 ou de M.

1. Par décomposition par rapport au premier pas de la marche, calculer $u_k(p) = \mathbb{P}(S_{T_k}^k = 0)$.
2. En déduire la probabilité qu'une marche aléatoire ne revienne jamais en zéro en fonction de p. Dans quels cas la marche aléatoire est-elle récurrente ?
3. Calculer $\mathbb{E}(T_k)$ de la même façon.

Démonstration. Soit $p \in (0, 1)$ et $M \in \mathbb{N}$.

1. On observe, à toutes fins utiles, que $u_0(p) = 0$ et $u_M(p) = 1$. On suppose maintenant que $k \in [|1, M - 1|]$. Le premier pas est vers le haut avec probabilité p, par conséquent,

$$u_k(p) = pu_{k+1}(p) + (1 - p)u_{k-1}(p).$$

La suite $(u_k(p))_{0 \leq k \leq M}$ est donc une suite récurrente d'ordre 2 simple que l'on résout de la façon suivante. Soit $a = \frac{p}{1-p}$, on a

$$u_k(p) = \begin{cases} \frac{a^M - a^{M-k}}{a^M - 1} & \text{si} \quad p \neq 1/2 \\ \frac{k}{M} & \text{si} \quad p = 1/2. \end{cases}$$

Exercice 3 (Problème de dé)**.** Combien de fois en moyenne faut-il lever un dé à n faces pour observer toutes les faces du dé ?

2. On considère une marche aléatoire issue du point k. On a

$$\lim_{M \to +\infty} \mathbb{P}(S_T = M) = \begin{cases} 1 - a^k & \text{si} \quad p > 1/2 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On observe pour finir que la marche aléatoire ne peut rester dans un ensemble de taille bornée avec probabilité positive, par conséquent

$$\{\forall n \in \mathbb{N}, S_n \neq 0\} =\downarrow \lim_{M \to +\infty} \{S_T = M\}$$

ce qui permet de conclure.

3. On pose $v_k(p) = \mathbb{E}(T^k)$. De la même façon qu'à la première question, on a

$$v_k(p) = 1 + pv_{k+1}(p) + (1-p)v_{k-1}(p),$$

avec $v_0(p) = v_M(p) = 0$. On peut donc résoudre ces équations de la même façon que précédemment, on a

$$v_k(p) = \begin{cases} \frac{1}{2}k(M-k) & \text{si} \quad p = 1/2 \\ \frac{k}{2p-1} - \frac{M}{2p-1}\frac{a^M - a^{M-k}}{a^M - 1} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Les fonctions $u_\cdot(p)$ et $v_\cdot(p)$ sont-elles continues ? □

Exercice 3 (Série aux différences)**.** Soit (X_n) une suite de variables aléatoires réelles. Montrer que s'il existe une suite (a_n) de réels positifs telle que $\sum a_n < +\infty$ et $\sum \mathbb{P}(|X_{n+1} - X_n| > a_n) < +\infty$, alors la suite (X_n) converge presque sûrement.

Démonstration. On applique le Lemme de Borel-Cantelli, presque sûrement il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $|X_n - X_{n-1}| \leq a_n$. Par conséquent, la série $\sum(X_n - X_{n-1})$ est absolument convergente, donc convergente. Par conséquent (X_n) converge. □

Exercice 4 (Marche aléatoire sans saut négatif)**.** Soit $(X_n, n \in \mathbb{N})$ une suite de variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{Z}$ telle que $\mathbb{P}(X_1 \leq -2) = 0$. On note

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n, \tau = \inf\{k \geq 0 : S_k = -1\} \quad \text{et} \quad Q(z) = \mathbb{E}(z^{X_1+1}).$$

1. Montrer que la fonction génératrice $F(z) = \mathbb{E}(z^\tau)$ vérifie l'équation fonctionnelle $F(z) = zQ(F(z))$.
2. Déterminer la fonction génératrice de τ lorsque $X_1 + 1$ suit une loi géométrique de paramètre ρ.
3. Montrer que $\mathbb{P}(S_n = -1) = n\mathbb{P}(\tau = n)$. En déduire que si $F(z) = \sum a_n z^n$, alors na_n est le $n-1^{\text{e}}$ coefficient de la série entière $z \mapsto Q(z)^n$.

Démonstration. *1.* On note, pour $k \geq 0$

$$p_k = \mathbb{P}(X = k-1),$$

on a en particulier

$$Q(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k z^k.$$

En décomposant par rapport au premier pas, on a

$$\begin{aligned} F(z) &= \mathbb{E}\left[z^\tau\right] \\ &= z\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{E}\left[z^{\tau_k}\right], \end{aligned}$$

en notant

$$\tau_k = \inf\{n \geq 0 : S_n + k - 1 = -1\}.$$

On observe que $\tau_k = \tau^1 + \cdots + \tau^k$, où (τ^i) est une suite de variables aléatoires i.i.d. de même loi que τ. En effet, comme la marche ne peut descendre que de 1 à chaque étape, le temps d'atteinde de -1 partant de k est égal à la somme du temps d'atteinte de $k-1$ partant de k, et celui du temps d'atteinte de -1 partant de $k-1$. Dès lors

$$F(z) = z\sum_{k=0}^{+\infty} p_k F(z)^k = zQ(F(z)).$$

2. Si X_1+1 suit une loi géométrique, on a

$$Q(z) = \frac{1-\rho}{1-\rho z},$$

par conséquent, F est solution dans $[0,1]$ de l'équation

$$-\rho F(z)^2 + F(z) - z(1-\rho) = 0,$$

donc $F(z) = \frac{1-\sqrt{1-4z\rho(1-\rho)}}{2\rho}$ – pour z assez petit bien entendu. Un développement en séries entières permet alors de calculer $\mathbb{P}(\tau = k)$.

3. Cette question est un rappel du TD 1, ajoutée à une application directe de la première question (notez que $F(0)=0$). □

Exercice 5 (Limite de X_n/n)**.** Soit (X_n) une suite de variables aléatoires i.i.d. Montrer que

$$\frac{X_n}{n} \to 0 \quad \text{p.s.} \iff \mathbb{E}(|X_1|) < +\infty.$$

Montrer également que si $\mathbb{E}(|X_1|) = +\infty$, en posant $S_n = X_1 + \cdots + X_n$,

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{|S_n|}{n} = +\infty.$$

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$, on observe que

$$+\infty > \mathbb{E}(|X_1|) \geq \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{+\infty} \epsilon \mathbf{1}_{\{|X_1|\geq k\epsilon\}}\right] = \epsilon \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(|X_k| \geq k\epsilon).$$

En appliquant le lemme de Borel-Cantelli, on a $\limsup_{n\to+\infty} \frac{|X_n|}{n} \leq \epsilon$, ce qui conclut.

De la même façon, on a

$$+\infty = \mathbb{E}(|X_1|) \leq \mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{+\infty} A \mathbf{1}_{\{|X_1|\geq kA\}}\right] = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(|X_k| \geq kA).$$

Dès lors, on obtient $\limsup_{n\to+\infty} \frac{|X_n|}{n} \geq A$. De plus $\liminf_{n\to+\infty} \frac{X_n}{n} = 0$, donc la suite ne converge pas p.s.

Enfin, si $(|X_n|/n)$ est plus grand que A infiniment souvent, alors $|S_n/n|$ est plus grand que $A/2$ infiniment souvent (soit avant le saut X_n, soit après). □

Exercice 6 (Une loi des grands nombres ?)**.** On rappelle qu'une loi de Cauchy a pour densité $\frac{1}{\pi(1+x^2)}$ par rapport à la mesure de Lebesgue.

1. Soit U une variable aléatoire réelle de loi uniforme sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Calculer la loi de $\tan U$.
2. Que vaut $\mathbb{E}(\tan U)$?
3. Soit (X, X') une paire de variables aléatoires indépendantes de loi de Cauchy. Déterminer la densité de la loi de $X + X'$.
4. Soit Y une variable aléatoire réelle dont la loi est $\frac{1}{2}e^{-|y|}dy$. Calculer la fonction caractéristique de la loi de Y définie par
$$\Psi_Y \xi \mapsto \mathbb{E}\left[e^{i\xi Y}\right].$$
5. Soit X, X' deux variables aléatoires réelles indépendantes de loi de Cauchy et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Calculer la densité de la loi de $\lambda X + \mu X'$, et celle de XX'.

6. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires réelles i.i.d. de loi de Cauchy. Calculer la limite (en loi), quand $n \to +\infty$, de
$$\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}.$$

Démonstration. Reporté au TD 4. □

Exercice 7 (Loi des records)**.** Soit (X_n) une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et positives de même fonction de répartition F supposée continue. On pose $N = \inf\{n \in \mathbb{N} : X_n > X_0\}$ et $Y = X_N$.

1. Calculer la loi de N et son espérance.
2. Calculer la loi jointe de (Y, N), en déduire la fonction de répartition de Y et celle de $F(Y)$.

Démonstration. 1. On observe que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N > n) = \mathbb{P}(X_1 \leq X_0, \cdots X_n \leq X_0) = \mathbb{E}\left[\int_0^{+\infty} \mathbb{P}(X_1 \leq x, \cdots X_n \leq x) dF(x)\right] \\ = \int_0^{+\infty} F(x)^n dF(x) = \frac{\left[F(x)^{n+1}\right]_0^{+\infty}}{n+1},\end{aligned}$$

par conséquent $\mathbb{P}(N = n) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$.

La loi de N ne dépend pas de la distribution des X_j. De plus, $\mathbb{E}(N) = +\infty$.

2. De la même façon que précédemment, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N = n, Y < y) = \mathbb{P}(X_1 \leq X_0, \cdots X_{n-1} \leq X_0, X_0 \leq X_n < y) \\ = \int_0^y F(x)^{n-1}(F(y) - F(x)) dF(x) = \frac{F(y)^{n+1}}{n(n+1)}.\end{aligned}$$

Par conséquent,
$$\mathbb{P}(Y < y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{F(y)^{n+1}}{n(n+1)} = F(y) - (1 - F(y)) \ln(1 - F(y)),$$
et $\mathbb{P}(F(Y) < u) = u - (1 - u) \ln(1 - u)$. □

Exercice 8 (Points sur le cercle)**.**

Démonstration. 1. On observe que cette probabilité est égale à $\mathbb{P}(U_1 < U_2)/2$, où U_1, U_2 sont deux variables aléatoires uniformes, soit $1/4$.

2. De la même façon, cette probabilité est égale à $2\mathbb{P}(U_3 < U_2 < U_4) = 1/3$.

3. On calcule la somme sur toutes les paires de segments de la probabilité d'intersection : $n(n-1)/6$. □

Exercice 9 (Le paradoxe de Bertrand)**.**

Démonstration. 1. Dans le premier cas, fixant la première extrémité à 1, il faut que la seconde extrémité tombe dans l'intervalle $(e^{i2\pi/3}, e^{i4\pi/3})$ ce qui arrive avec probabilité $1/3$.

2. Il faut que la corde soit à distance inférieure à $1/2$ du centre, avec probabilité $1/2$.

3. Il faut que le point soit dans un cercle de rayon $1/2$, ce qui arrive avec probabilité $1/4$. □

Exercice 10 (Un problème de classement)**.** Est-il possible de construire 4 dés tétraédriques A, B, C et D, dont les faces sont numérotés par des nombres distincts de 1 à 16 de façon à ce que A batte B, B batte C, C batte D et D batte A avec probabilité au moins $5/8$?

Démonstration. Exemple : $A = \{2, 3, 14, 15\}$, $B = \{1, 11, 12, 13\}$, $C = \{7, 8, 9, 10\}$ et $D = \{4, 5, 6, 16\}$. □