Processus aléatoires *ENS Paris*, 2015/2016

Bastien Mallein
Bureau V2

TD 5 – Trois séries

19 octobre 2015

Exercice 1 (Série de Cauchy)**.** Soit (X_n) une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi de Cauchy, et (a_n) une suite de réels qui tend vers 0. Montrer que

$$\sum_{n\geq 1} a_n X_n^3 \text{ converge} \quad \text{p.s.} \iff \sum_{n\geq 1} |a_n|^{1/3} < +\infty.$$

Solution. Application directe du théorème des trois séries. □

Exercice 2 (Somme de variables aléatoires positives)**.** Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes positives p.s. Montrer que les trois propositions suivantes sont équivalentes :
- $\sum_n X_n < +\infty$ a.s.
- $\sum_n \mathbb{E}(X_n \wedge 1) < +\infty$,
- $\sum_n \mathbb{E}\left(\frac{X_n}{X_n+1}\right)$.

Solution. Si $\sum_n X_n < +\infty$, alors $\sum_n X_n$ converge. Dès lors, il existe $c > 0$ tel que

$$\sum_n \mathbb{P}(X_n \geq c) + \sum_n \mathbb{E}(X_n \mathbf{1}_{\{X_n \leq c\}}) < +\infty.$$

Par conséquent, $\sum_n \mathbb{E}(X_n \wedge 1) < +\infty$, par domination.

Les deux dernières propositions étant trivialement équivalentes, on suppose maintenant

$$\sum_n \mathbb{E}(X_n \wedge 1) < +\infty,$$

dans ce cas, on a directement $\sum_n \mathbb{P}(X_n \geq c) + \sum_n \mathbb{E}(X_n \mathbf{1}_{\{X_n \leq c\}}) < +\infty$. De plus

$$\mathbb{E}(X_n^2 \mathbf{1}_{\{X_n \leq 1\}}) \leq \mathbb{E}(X_n \mathbf{1}_{\{X_n \leq 1\}}),$$

ce qui permet d'avoir la convergence de la troisième série, et de conclure. □

Exercice 3 (Vers la convergence stable)**.** Soit $p \in (1, 2)$, et X une variable aléatoire telle que $\mathbb{E}(X) = 0$ et $\mathbb{E}(X^p) < +\infty$. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires i.i.d. de même loi que X, et $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{X_n}{n^{1/p}}$ est convergente p.s. En déduire que $\frac{S_n}{n^{1/p}}$ tend p.s. vers 0. Comparer à la loi forte des grands nombres.

Solution. On note que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X_n/n^{1/p} \geq 1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X_1^p \geq n) \leq \mathbb{E}(X_1^p) < +\infty \text{ et}$$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{1/p}} |\mathbb{E}(X_n \mathbf{1}_{\{|X_n| \leq n^{1/p}\}})| &\leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{1/p}} \mathbb{E}(|X_n| \mathbf{1}_{\{|X_n| \geq n^{1/p}\}} \\ &\leq \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{E}(|X_1|^p) \frac{1}{n^{p+1/p-1}} < +\infty.\end{aligned}$$

Pour finir, on pose $p_k = \mathbb{P}(|X_1|^p \geq k)$, on a

$$\mathbb{E}(|X_1|^2 \mathbf{1}_{\{|X_1|^p \leq n\}}) = \mathbb{E}\left[(|X_1|^p)^{2/p} \mathbf{1}_{\{|X_1|^p \leq n\}}\right] \leq \sum_{k=0}^{n} k^{2/p-1} p_k,$$

on a donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2/p}} \mathbb{E}(|X_n^2| \mathbf{1}_{\{|X_n| \leq n^{1/p}\}}) \leq \sum_{k=0}^{+\infty} k^{2/p-1} p_k \sum_{n=k}^{+\infty} n^{-2/p} \leq C \sum_{k=0}^{+\infty} p_k < +\infty.$$

On conclut par théorème des trois séries.

On obtient le corollaire par Lemme de Kronecker : si $\sum u_n < +\infty$ et (b_n) est une suite croissante positive qui tend vers $+\infty$, alors

$$\frac{1}{b_n} \sum_{k=1}^{n} b_k u_k = \underbrace{\frac{1}{b_n} \left[\sum_{k=1}^{n} (b_k - b_{k-1}) \sum_{j=1}^{k} u_j \right]}_{\to \sum_{k=1}^{+\infty} u_k \text{ par Césaro}} - \sum_{j=1}^{n+1} u_j.$$

□

Exercice 4 (Série harmonique aléatoire)**.** Soit (X_n) une suite de variables aléatoires telle que $\mathbb{E}(X) = 0$ et $\mathbb{E}(|X| \log(1 + |X|)) < +\infty$. Montrer que $\sum_{n \geq 1} \frac{X_n}{n}$ converge p.s.

Solution. Dans toute la suite, on notera

$$p_k = \mathbb{P}(|X_1| \geq k).$$

Observons pour commencer que

$$\mathbb{E}(|X_1| \log(1 + |X_1|)) < +\infty \iff \sum_{k=1}^{+\infty} \log k p_k < +\infty,$$

la preuve, très classique, est laissée au lecteur.

On a alors

$$\sum \mathbb{P}(\tfrac{X_n}{n} \geq 1) = \sum p_n < +\infty.$$

De plus, $\mathbb{E}(X_k \mathbf{1}_{\{|X_k| \leq c\}}) = -\mathbb{E}(X_k \mathbf{1}_{\{|X_k| \geq c\}}$, car la variable aléatoire est centrée, donc

$$\sum |\mathbb{E}\left(\tfrac{X_n}{n} \mathbf{1}_{\{|X_n| \leq n\}}\right)| \leq \sum_n \frac{1}{n} \mathbb{E}(|X_n| \mathbf{1}_{\{|X_n| \geq n\}}) \leq \sum_n \sum_{k \geq n} p_k \leq \sum_k \sum_{n \leq k} \frac{1}{n} < +\infty$$

par hypothèse. La troisième série, plus simple, est laissée au lecteur. □

Exercice 5. Soit a_n une suite de réels positifs, et X_n une suite de variables aléatoires indépendantes de loi

$$\mathbb{P}(X_n = a_n) = \mathbb{P}(X_n = -a_n) = \frac{1}{2}.$$

1. Montrer que si $\sum X_n$ converge en loi, alors $\sum a_n^2$ converge.
2. On suppose maintenant que a_n est bornée, et que $\sum a_n^2$ diverge. On pose $\phi(n)^2 = \sum_{k=1}^n a_k^2$, montrer que $\sum_{k=1}^n X_k/\phi(n)$ converge en loi. Déterminer cette loi limite.

Solution. 1. Soit $\xi \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on note

$$\psi_n(\xi) = \mathbb{E}\left[\exp\left(i\xi\sum_{j=1}^n X_j\right)\right] = \prod_{j=1}^n \cos(\xi a_j).$$

Si $\sum X_n$ converge en loi, alors $\psi_n(\xi)$ converge pour tout $\xi \in \mathbb{R}$. Par conséquent, $a_n \to 0$, et de plus

$$\sum -\log\cos(a_j) < +\infty,$$

donc $\sum a_j^2 < +\infty$.

Exercice -220 (Théorème d'Erdös-Renyi)**.** Soit (S_n) une marche aléatoire simple symétrique sur $\mathbb{Z}$ et $a \in (0,1)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $M_n = \max\{k \in \mathbb{N} : \exists j \leq n-k : S_{i+j} - S_j \geq ai, i \leq k\}$. Montrer que $\frac{M_n}{\log n}$ converge p.s.

2. On calcule maintenant,

$$\log\psi_n(\xi/\phi(n)) = \sum_{j=1}^n \log\cos(\xi a_j/\phi(n)) \approx \frac{-1}{2}\sum_{j=1}^n \xi^2 a_j^2/\phi(n)^2.$$

Par conséquent, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \psi_n(\xi/\phi(n)) = e^{-\xi^2/2}$$

on a donc convergence vers une variable aléatoire gaussienne centrée réduite.

□

Exercice 6. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes telles que X_n suit une loi exponentielle de paramètre λ_n. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur (λ_n) pour
— la convergence de $\sum X_n$;
— la convergence de $\sum(X_n - \frac{1}{\lambda_n})$.

Solution. 1. On observe que

$$\mathbb{E}(X_n \wedge 1) = e^{-\lambda_n} + \frac{e^{-\lambda_n} - 1 + \lambda_n e^{-\lambda_n}}{\lambda_n},$$

grâce à l'Exercice 2, on a donc $\sum X_n < +\infty \iff \sum \frac{1}{\lambda_n} < +\infty$.

2. De la même façon, en appliquant le théorème des trois séries, on a

$$\sum X_n - \frac{1}{\lambda_n} \text{ converge } \iff \sum \frac{1}{\lambda_n^2} < +\infty.$$

□

Exercice 7 (La loi de Gumble)**.** Soit (X_n) une suite de variables aléatoires réelles indépendantes de même loi exponentielle de paramètre 1. On note $M_n = \max_{i \leq n} X_i$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(M_n \geq x + \ln n) = 1 - e^{-e^{-x}}.$$
Autrement dit, $M_n - \log n$ converge en loi vers une variable aléatoire G de loi dite de Gumble.
2. En déduire que $M_n / \log n$ converge vers 1 en probabilités, lorsque $n \to +\infty$.
3. Montrer que la convergence de la question précédente a en fait lieu presque sûrement.

Solution. 1. On observe que $\mathbb{P}(M_n \leq x + \ln n) = \mathbb{P}(X_1 \leq x + \ln n)^n = (1 - e^{-x}/n)^n = e^{-e^{-x}}$.

2. On obtient directement $\mathbb{P}(M_n / \log n \leq (1-\epsilon)) \leq e^{-n^{\epsilon}} \to 0$, et $\mathbb{P}(M_n / \log n \geq (1+\epsilon)) \leq 1 - e^{-n^{-\epsilon}} \to 0$.
3. Grâce aux estimations précédentes, par Borel-Cantelli
$$\liminf_{n \to +\infty} \frac{M_n}{\log n} \geq 1,$$
$$\limsup_{n \to +\infty} \frac{M_{\lfloor \gamma^n \rfloor}}{n \log \gamma} \leq 1.$$
Par croissance de $n \mapsto M_n$, en laissant $\gamma \to 1$, on peut conclure.

□

Exercice 8 (Maximum de variables aléatoires)**.** Soit $(X_n, n \geq 1)$ une suite de variables aléatoires i.i.d. et $M_n = \max_{j \leq n} X_j$.

1. Montrer que si X_n est de loi uniforme sur $[0, 1]$, alors $n(M_n - 1)$ converge en loi et déterminer cette limite.
2. Montrer que si X_n suit une loi de Cauchy, alors $\frac{M_n}{n}$ converge en loi.
3. On suppose que X_n suit une loi gaussienne centrée réduite. Donner un équivalent en probabilité de M_n.

Solution. 1. On a
$$\mathbb{P}(n(M_n - 1) \geq -u) = \mathbb{P}(X_1 \leq 1 - u/n)^n = e^{-u},$$
donc $nM_n - 1$ converge en loi vers une variable aléatoire de loi exponentielle négative.

2. On a aussi
$$\mathbb{P}(M_n/n \leq a) = \mathbb{P}(X_1 \leq an)^n = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan(an) \right)^n = \left(1 - \arctan\left(\frac{1}{an} \right) \right)^n$$
donc $\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(M_n/n \leq a) = e^{-\frac{1}{a}}$, et M_n/n converge vers l'inverse d'une loi exponentielle de paramètre 1.
3. On rappelle que $\mathbb{P}(X_n \geq a) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi} a} e^{-a^2/2}$, par conséquent, par les mêmes calculs que précédemment, on a
$$\frac{M_n}{2\sqrt{\log n}} \to 1 \text{ en probabilité.}$$
Peut-on renforcer ce résultat en un comportement presque sûr, ou identifier une limite en loi pour M_n, correctement normalisée ?

□