Bastien Mallein
Bureau V2

TD 6 – Limites en loi et fonctions caractéristiques

Lundi 25 octobre

Exercice 1 (Des fonctions caractéristiques)**.**

1. Soit $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ des réels positifs, et $a_1, \cdots a_n$ des réels. Montrer que $\exp(\lambda_1(e^{ia_1 t}-1))$ et $\exp\left(\sum_{j=1}^n \lambda_j(e^{ia_j t}-1)\right)$ sont des fonctions caractéristiques.
2. Montrer que $f(t) = \exp\left[\int_0^1 \frac{e^{itx}-1}{x}dx\right]$ est une fonction caractéristique.
3. En déduire qu'il existe une variable aléatoire Y avec la propriété suivante $Y \sim (1+Y_1)X$, où Y_1 suit la même loi que Y, et est indépendante de X, qui est de loi uniforme sur $[0,1]$.

Solution. Soit $N_1, \cdots N_n$ des variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{P}(\lambda_1), \cdots \mathcal{P}(\lambda_n)$. On a

$$\mathbb{E}\left[e^{it(a_1 N_1)}\right] = \exp(\lambda_1(e^{ia_1 t}-1)) \quad \text{et} \quad \mathbb{E}\left[e^{it\sum a_j N_j}\right] = \exp\left(\sum_{j=1}^n \lambda_j(e^{ia_j t}-1)\right).$$

On observe maintenant que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \frac{e^{i\frac{tj}{n}}-1}{\frac{j}{n}} = \int_0^1 \frac{e^{itx}-1}{x}dx.$$

dès lors, par théorème de Lévy fort, il existe une variable aléatoire Y telle que

$$\mathbb{E}(e^{itY}) = \exp\left[\int_0^1 \frac{e^{itx}-1}{x}dx\right],$$

et cette variable aléatoire est la limite en loi de

$$\sum_{j=1}^n \frac{j}{n}N_j,$$

où (N_k) est une suites de variables aléatoires indépendantes, où $N_k \sim \mathcal{P}(\frac{1}{k})$.

Pour finir, on calcule la fonction caractéristique y de la variable Y, si elle existe. On a alors

$$y(t) = \int_0^1 e^{itu}y(tu)du = \frac{1}{t}\int_0^t e^{iu}y(u)du,$$

donc en dérivant,

$$y'(t) = \frac{e^{it}-1}{t}y(t).$$

Dès lors

$$y(t) = \exp\left[\int_0^t \frac{e^{iz}-1}{z}dz\right] = \exp\left[\int_0^1 \frac{e^{itx}-1}{x}dx\right],$$

la question précédente permet de conclure. □

Exercice 2 (Transformation de fonction caractéristique)**.** Si f est une fonction caractéristique, montrer que $g(t) = \frac{1}{t}\int_0^t f(u)du$ en est également une.

Solution. Si f est la fonction caractéristique de Y, alors g est la fonction caractéristique de UY, où U suit une loi uniforme sur $[0,1]$ indépendante de Y. □

Exercice 3 (Loi Gamma)**.** Soit $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, on appelle loi $\Gamma(a,b)$ la loi de densité $\frac{\mathbf{1}_{\{x>0\}}}{\Gamma(a)} b^a x^{a-1} e^{-bx}$.

1. Soit X une variable aléatoire de loi $\Gamma(a,b)$. Calculer la transformée de Laplace de X, définie par $R_X(z) = \mathbb{E}(e^{-zX})$, et en déduire ses moyennes et variances.
2. Soit Y une variable aléatoire de loi $\Gamma(c,b)$ indépendante de X. Donner la loi de $X+Y$.
3. Soit (N_k) une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi gaussienne standard. Déterminer la loi de N_1^2. En déduire la loi de $N_1^2 + N_2^2 + \cdots + N_k^2$.
4. Soit (E_k) une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi exponentielle standard. Déterminer la loi de $E_1 + \cdots + E_k$.

Solution. On a
$$R_X(z) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} \int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-(b+z)x} dx = \frac{1}{\left(1+\frac{z}{b}\right)^a}.$$
De plus
$$R_{X+Y}(z) = \frac{1}{\left(1+\frac{z}{b}\right)^a} \frac{1}{\left(1+\frac{z}{b}\right)^c} = \frac{1}{\left(1+\frac{z}{b}\right)^{a+c}},$$
donc par unicité de la transformée de Laplace –ou extension à $\mathbb{C}$, et unicité de la transformée de Fourier– $X+Y$ est de loi $\Gamma(a+c,b)$.

On observe que $N_1^2 \sim \Gamma_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$, donc $N_1^2 + \cdots + N_n^2 \sim \Gamma_{\frac{n}{2},\frac{1}{2}}$, et $E_1 + \cdots + E_n \sim \Gamma_{n,1}$. □

Exercice 4 (Quelques observations)**.**

1. Soit $f(t) = \mathbb{E}(e^{itX})$ où X est une v.a. réelle non-constante, montrer que $|f(t)|^2 = \mathbb{E}(e^{it(X-X')})$, où X' est une copie indépendante de X.
2. En déduire qu'il existe $\delta > 0$ et $\epsilon > 0$ tels que $|f(t)| \leq 1 - \epsilon t^2$ pour tout $|t| \leq \delta$.
3. Soit f la fonction caractéristique telle que $|f(t)| = 1$ pour tout $|t| \leq \delta$, montrer que $|f(t)| = 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
4. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, montrer que si $X + Y \overset{(d)}{=} Y$, alors $X = 0$ p.s.
5. Montrer que si $\alpha > 2$, alors $f(t) = e^{-|t|^\alpha}$ n'est pas la fonction caractéristique d'une loi de probabilité.

Solution.

1. Pour X une variable aléatoire réelle,
$$|f(t)|^2 = f(t)f(-t) = \mathbb{E}\left[e^{it(X-X')}\right].$$
où X' est une copie indépendante de X.
2. De plus, par symétrie,
$$\mathbb{E}\left[e^{it(X-X')}\right] = \mathbb{E}\left[\cos\left(t(X-X')\right)\right].$$
On note $Y = X - X'$, pour tout $A > 0$ et $t \leq \frac{\pi}{4A}$, on a
$$\begin{aligned} |f(t)|^2 &\leq \mathbb{E}\left[\cos\left(tY\right)\mathbf{1}_{\{|Y|\leq A\}}\right] + \mathbb{P}(|Y| \geq A) \\ &\leq 1 - \frac{t^2}{2}\mathbb{E}\left[Y^2 \mathbf{1}_{\{|Y|\leq A\}}\right]. \end{aligned}$$
On en conclut le résultat escompté.

3. D'après le résultat précédent, si $|f| = 1$ sur un intervalle contenant 0, alors X est une constante a, donc $|f(t)| = |e^{iat}| = 1$.
4. On note f_X et f_Y les transformées de Fourier de X et Y. Si l'inégalité précédente est vérifiée, on a $f_X f_Y = f_Y$, donc sur un intervalle sur lequel $|f_Y| > 0$ (par continuité), on a $f_X = 1$, et on conclut.
5. Encore une application directe la question 1.

$\square$

Exercice 4 (Aiguille de Buffon revisitée)**.** Soit X, Y deux variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0,1]$. Calculer la probabilité que l'entier le plus proche de $\frac{Y}{X}$ soit pair. Donner ce nombre sous la forme $a + b\pi$ avec a et b deux rationnels.

Exercice 5 (Approximation poissonienne)**.** Soit (p_n) une suite de réels dans $(0,1)$ telle que $np_n \to \lambda > 0$, montrer que $\mathcal{B}(n, p_n) \Rightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ quand $n \to +\infty$.

Solution. Les solutions sont légions, on peut par exemple calcul de la tranformée de Fourier, ou bien, pour $k \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{P}\left(\mathcal{B}(n, p_n) = k\right) = \binom{n}{k} p_n^k (1 - p_n)^{n-k} = \frac{n! p_n^k}{(n-k)!} \frac{(1-p_n)^{n-k}}{k!} \sim_{n \to +\infty} \lambda^k \frac{e^{-\lambda}}{k!}.$$

$\square$

Exercice 6 (Sur la convergence en loi)**.** Soit (x_n) une suite de réels. Montrer que s'il existe une mesure μ vérifiant $\delta_{x_n} \Rightarrow \mu$, alors il existe x tel que $\delta_x = \mu$, et $\lim x_n = x$.

Solution. On considère la transformée de Fourier, on a $f_{\delta_{x_n}} \mapsto f_\mu$ point par point. En particulier, pour tout $t \geq 0$, $|f_\mu(t)| = 1$, ce qui conclut la preuve, par Exercice 4. $\square$

Exercice 7 (Loi Beta)**.** Soit $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, on appelle loi $\mathrm{B}(\alpha, \beta)$ la loi de densité

$$\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} \mathbf{1}_{\{x \in (0,1)\}}.$$

1. Vérifier que si $X \sim \Gamma(a, b)$ et $Y \sim \Gamma(a', b)$, alors $\left(\frac{X}{X+Y}, X+Y\right)$ est un couple de variables aléatoires indépendantes, dont on déterminera la loi.
2. Calculer l'espérance et la variance d'une loi $\mathrm{B}(\alpha, \beta)$.
3. Soit $B \sim \mathrm{B}(\alpha, \beta)$, déterminer la loi de $1 - B$.
4. On note T_{2n} le temps passé au-dessus de 0 par une marche aléatoire simple avant l'instant $2n$. Déterminer la limite en loi de $\frac{T_{2n}}{2n}$.
5. Soit $U_1, \cdots U_n$ des variables aléatoires i.i.d. de loi uniforme sur $[0,1]$. On note $U^{(1)} \leq \cdots \leq U^{(n)}$ les variables aléatoires classées. Déterminer la loi de $U^{(k)}$ pour $k \leq n$.

Solution. 1. On réalise le changement de variable $(x, y) \mapsto (x/(x+y), x+y)$, on a

$$\frac{b^{a+a'}}{\Gamma(a)\Gamma(a')} \int f(x/(x+y), x+y) x^{a-1} y^{a'-1} e^{-b(x+y)} dxdy$$
$$= \frac{b^{a+a'}}{\Gamma(a)\Gamma(a')} \int f(u, z) u^{a-1} (1-u)^{a'-1} z^{a+a'-1} e^{-bz} dzdu.$$

On en conclut que $\frac{X}{X+Y}$ et $X+Y$ sont indépendantes, la première est une loi $\mathrm{B}(a, a')$ la seconde une loi $\Gamma(a+a', b)$.

2. Les calculs se font directement, on a

$$\mathbb{E}(\mathrm{B}(\alpha,\beta)) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(\mathrm{B}(\alpha,\beta)^2) - \mathbb{E}(\mathrm{B}(\alpha,\beta))^2 = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}.$$

3. Avec la représentation de la question 1, $1 - \mathrm{B}(\alpha,\beta) = \frac{Y}{X+Y} \sim \mathrm{B}(\beta,\alpha)$, où X, Y sont des lois Γ indépendantes de paramètres (α, b) et (β, b).
4. La loi de l'Arcsinus est $\mathrm{B}(1/2, 1/2)$.
5. On observe que

$$\mathbb{P}(U^{(k)} \in du) = \mathbb{P}(\text{il existe } k-1 \text{ points en dessous de } u) = \binom{n-1}{k-1} u^{k-1}(1-u)^{n-k-1} du$$

donc $U^{(k)} \sim \mathrm{B}(k, n-k)$. On aurait également pu calculer la fonction de répartition en utilisant que $U^{(k)} \leq u$ si il existe au moins k points plus petits que u.

□

Exercice 8 (Paradoxe de l'autobus)**.** Soit $(N_t)_{t\geq 0}$ un processus de Poisson standard (d'intensité 1). On note $T_1, T_2, ..., T_n, ...$ les sauts du processus. Pour $t \geq 0$ on pose

$$Z_t = t - T_{N_t} \quad \text{et} \quad W_t = T_{N_t+1} - t.$$

1. Calculer la loi du couple (Z_t, W_t). En particulier montrer que
   (a) les variables Z_t et W_t sont indépendantes,
   (b) la variable W_t suit une loi $\mathcal{E}(1)$,
   (c) on a $Z_t = \min(t, \mathcal{E}(1))$ en loi.
2. Montrer que Z_t converge en loi vers une variable exponentielle de paramètre 1.
3. Déterminer la limite en loi de $W_t + Z_t$. En déduire la loi de Murphy des autobus.

Solution. 1. On calcule

$$\mathbb{P}(Z_t \geq a, W_t \geq b) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left(t - T_k \geq a, T_{k+1} - t \geq b, t \in [T_k, T_{k+1}]\right)$$
$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left(T_k \in [t-a, t], T_{k+1} \geq t+b\right) = e^{-a}\mathbf{1}_{\{a<t\}}e^{-b},$$

d'où la conclusion.

2. C'est une évidence étant donné la définition de la loi de Z_t.
3. On en conclut, par indépendance, que $W_t + Z_t$ converge en loi vers une variable aléatoire de loi $\Gamma(2, 1)$. Par conséquent, en service normal, le temps entre le bus qui vient de passer et celui qui va passer est plus grand que le temps d'attente normal entre deux bus. Soit le bus précédent était en avance, soit celui que vous attendez est en retard...

□