Processus aléatoires *ENS Paris*, 2015/2016

Bastien Mallein
Bureau V2

TD 7 – Miscellanées

Lundi 1er Novembre

Exercice 1 (Une minoration classique)**.** Soit X une variable aléatoire intégrale à valeurs dans $\mathbb{Z}_+$. Montrer que

$$\mathbb{P}(X > 0) \geq \frac{\mathbb{E}(X)^2}{\mathbb{E}(X^2)}.$$

Discuter les cas d'égalité.

Démonstration. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X\mathbf{1}_{\{X\geq 1\}}) \leq \mathbb{P}(X \geq 1)^{1/2}\mathbb{E}(X^2)^{1/2}.$$

Les cas d'égalité sont donnés par $X = \lambda\mathbf{1}_{\{X\geq 1\}}$ pour un $\lambda \in \mathbb{R}$. On a donc $\mathbb{P}(X > 0) = \frac{\mathbb{E}(X)^2}{\mathbb{E}(X^2)}$ dès que X prend seulement deux valeurs, 0 et une autre. □

Exercice 2 (Convergence de vecteur aléatoire)**.** Soit (X_n) des variables aléatoires i.i.d. de loi gaussienne centrée réduite. Pour $h \in \mathbb{N}$, on note $Y_n(h) = \sum_{j=1}^n \sin(hX_j)$. Déterminer la limite en loi de $\frac{1}{\sqrt{n}}(Y_n(1), \dots Y_n(k))$.

Démonstration. Application directe du TCL multidimensionnel. □

Exercice 3 (Dérangement)**.** Soit T une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que $\mathbb{P}(T = n)$ décroit. Montrer que pour toute injection $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, on a

$$\mathbb{E}(\sigma(T)) \geq \mathbb{E}(T).$$

Démonstration. Rappelons que $\mathbb{E}(T) = \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(T \geq n)$, et observons que $\mathbb{P}(T \leq k) \geq \mathbb{P}(\sigma(T) \leq k)$. □

Exercice 4 (Dés truqués)**.** On rappelle que la fonction génératrice d'une variable aléatoire est $G_X(s) = \mathbb{E}\left[s^X\right]$.

1. Déterminer la fonction génératrice de la loi uniforme sur $\{2, \dots, 12\}$.
2. Montrer qu'on ne peut pas simuler la loi uniforme sur $\{2, \dots, 12\}$ avec deux dés pipés indépendants.

Démonstration. On a

$$G_X(s) = \frac{1}{11}\left(s^2 + \dots + s^12\right) = \frac{s^2}{11}\frac{1 - s^11}{1 - s}.$$

D'autre part, si X_1 et X_2 sont des dés pipés tels que $\frac{1}{11} = \mathbb{P}(X_1 + X_2 = 12) = \mathbb{P}(X_1 = 6)\mathbb{P}(X_2 = 6)$, alors

$$G_{X_1}(s) = s\phi_1(s) \quad G_{X_2}(s) = s\phi_2(s)$$

avec ϕ_1 et ϕ_2 deux polynômes de degré 5 (donc avec au moins une racine réelle), ce qui montre que

$$G_X(s) = G_{X_1}(s)G_{X_2}(s).$$

□

Exercice 5 (Loi du χ^2 à $r-1$ degrés de liberté)**.** Soit (X_n) des variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans $\{0,\dots,r\}$ telles que $\mathbb{P}(X_1=i)=p_i$. Identifier la limite en loi de

$$Y_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{r}\left(\frac{1}{\sqrt{p_j}}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{1}_{\{X_i=j\}}-p_j\right)^2$$

Démonstration. On note $V_n = (\frac{1}{\sqrt{p_1}}\mathbf{1}_{\{X_n=1\}},\dots\frac{1}{\sqrt{p_r}}\mathbf{1}_{\{X_n=r\}})$, et on applique le TCL multidimensionnel à $\sum V_j$. En particulier $\left\|\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n}V_j\right\|_2^2$ converge en loi vers une loi $\Gamma_{\frac{n-1}{2},\frac{1}{2}}$ appelée loi du χ^2 à $n-1$ degrés de libertés, pour des raisons qui deviendront évidentes lors de votre 7e cours de statistiques. □

Exercice 6 (Entropie)**.** Soit Ω un ensemble fini. L'entropie d'une probabilité $\mathbb{P}$ sur Ω est définie comme

$$H(\mathbb{P}) = \sum_{\omega\in\Omega} -\mathbb{P}(\omega)\log\mathbb{P}(\omega).$$

L'entropie relative de $\mathbb{P}$ par rapport à $\mathbb{Q}$ est définie par

$$D(\mathbb{P}||\mathbb{Q}) = \begin{cases} +\infty & \text{si} \quad \exists\omega\in\Omega : \mathbb{P}(\omega)>0=\mathbb{Q}(\omega) \\ \sum_{\omega\in\Omega}\mathbb{P}(\omega)\log\frac{\mathbb{P}(\omega)}{\mathbb{Q}(\omega)} & \text{sinon.}\end{cases}$$

1. Montrer grâce à l'inégalité de Jensen que $D\geq 0$, et que $D=0$ implique $\mathbb{P}=\mathbb{Q}$.
2. Soit U la mesure uniforme sur Ω, déterminer à l'aide de H la valeur de $D(\mathbb{P}||U)$.
3. En déduire la loi qui maximise l'entropie.

Démonstration. On pose $X(\omega)=\frac{\mathbb{P}(\omega)}{\mathbb{Q}(\omega)}$, dès lors

$$\int X(\omega)\log X(\omega)d\mathbb{Q}(\omega) \geq \int X(\omega)d\mathbb{Q}(\omega)\log\int X(\omega)d\mathbb{Q}(\omega) = 0.$$

On a $D(P||U)=H(P)-\log\#\Omega$, ce qui permet de conclure. □

Exercice 7. Soit $p\in(0,2)$ et X une variable aléatoire réelle telle que $\mathbb{E}(e^{itX})=e^{-|t|^p}$. Montrer que $\sum a_jX_j$ converge en loi si et seulement si $\sum|a_j|^p<+\infty$.

Démonstration. On a

$$\mathbb{E}\left[e^{it\sum_{j=1}^{n}a_jX_j}\right] = e^{-|t|^\alpha\sum_{j=1}^{n}|a_j|^p} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-t\sum_{j=1}^{+\infty}|a_j|^p}$$

et on conclut par Théorème de Lévy. □

Exercice 7 (Variables aléatoires échangeables)**.** Soit (X_n) une suite de variables aléatoires de Bernouilli échangeable, i.e. telle que pour tout $n\geq 1$ et $i_1<\dots<i_n$ et $j_1<\cdots j_n$, on a

$$(X_{i_1},\dots X_{i_n}) \overset{(d)}{=} (X_{j_1},\dots X_{j_n}).$$

Montrer qu'il existe une variable aléatoire Y à valeurs dans $[0,1]$ telle que, conditionnellement à Y, (X_n) est une suite de variables aléatoires de Bernoulli i.i.d. de paramètre Y.

Exercice 8 (Inégalité de Paley-Zygmund)**.** Soit X une variable aléatoire positive de carré intégrable.

1. Montrer que pour tout $a \in (0,1)$, on a
$$(1-a)\mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}\left[X\mathbf{1}_{\{X \geq a\mathbb{E}(X)\}}\right].$$
2. En conclure que pour tout $a \in (0,1)$,
$$\mathbb{P}(X \geq a\mathbb{E}(X)) \geq (1-a)^2 \frac{\mathbb{E}(X)^2}{\mathbb{E}(X^2)}.$$

Démonstration. On a
$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X\mathbf{1}_{\{X \geq a\mathbb{E}(X)\}}) + \mathbb{E}(X\mathbf{1}_{\{X \leq a\mathbb{E}(X)\}}) \leq \mathbb{E}(X\mathbf{1}_{\{X \geq a\mathbb{E}(X)\}}) + a\mathbb{E}(X).$$
Dès lors, par inégalité de Cauchy-Schwarz
$$a\mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}\left[X\mathbf{1}_{\{X \geq a\mathbb{E}(X)\}}\right] \leq \mathbb{P}(X \geq a\mathbb{E}(X))^{1/2}\mathbb{E}(X^2)^{1/2}$$
ce qui permet de conclure. □

Exercice 9 (Lemme de Hoeffding)**.** Soit X une variable aléatoire réelle telle que $\mathbb{E}(X) = 0$ et $\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = 1$. Montrer que pour tout $\lambda > 0$
$$\mathbb{E}\left[e^{\lambda X}\right] \leq \exp\left[\lambda^2 \frac{(b-a)^2}{8}\right].$$
Indication. On pourra montrer dans un premier temps que
$$\mathbb{E}\left[e^{\lambda X}\right] \leq \frac{be^{\lambda a}}{b-a} - \frac{ae^{\lambda b}}{b-a}.$$

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires i.i.d. de même loi que X, montrer que pour tout $\epsilon > 0$,
$$\mathbb{P}(X_n \geq n\epsilon) \leq e^{-n\frac{4\epsilon^2}{(b-a)^2}}.$$

Démonstration. On a
$$\mathbb{E}\left[e^{\lambda X}\right] \leq \mathbb{E}\left[\frac{b-X}{b-a}e^{\lambda a} + \frac{X-a}{b-a}e^{\lambda b}\right] \leq \frac{be^{\lambda a}}{b-a} - \frac{ae^{\lambda b}}{b-a} = f(\lambda).$$
De plus,
$$(\ln f)'(0) = 0, \quad \ln(f)''(\lambda) = \frac{-bae^{\lambda(b-a)}}{(b-ae^{\lambda(b-a)})} = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2}(b-a)^2 \leq \frac{(b-a)^2}{4}.$$
Dès lors, par formule de Taylor,
$$\ln f(\lambda) = \ln f(0) + \lambda(\ln f)'(0) + \frac{\lambda^2}{2}(\ln f)''(0) \leq \frac{\lambda^2}{8}(b-a)^2,$$
ce qui permet de conclure.

On a également, pour tout $\lambda > 0$
$$\mathbb{P}(X_n \geq n\epsilon) \leq \mathbb{E}\left[e^{\lambda X_1}\right]^n e^{-n\lambda\epsilon} \leq e^{-n\frac{4\epsilon^2}{(b-a)^2}}.$$
□

Exercice 10 (Convergence de lois de Gauss)**.** Soit (X_n) une suite de variables aléatoires de loi $\mathcal{N}(\mu_n, \sigma_n^2)$ qui convergent en loi vers X.

1. Montrer que (σ_n^2) converge.
2. Montrer que (μ_n) converge.
3. En déduire la loi de X.

Démonstration.

1. Par Théorème de Lévy, la fonction caractéristique de X_n converge vers celle de X sur un voisinage de 0. En particulier, on a $|\mathbb{E}(e^{i\xi X_n})| = e^{-\sigma_n^2 \xi^2/2}$ qui converge, d'où la convergence de (σ_n).
2. Observons que $\lim_{A\to+\infty} \limsup_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n \geq A) = 0$. Comme (σ_n) est bornée, ceci n'est possible que si (μ_n) est une suite bornée. Par conséquent, pour tout $\xi > 0$ assez petit, $\Re(e^{i\xi\mu_n}) > 0$. On en déduit encore par Théorème de Lévy que (μ_n) converge.
3. Par conséquent, $\phi_X(\xi) = e^{i\xi \lim \mu_n - \xi^2 \lim \sigma_n/2}$, et X est une Gaussienne.

□

Exercice 11 (Somme de variables aléatoires indépendantes)**.** Soit (a_n) une suite de réels positifs, soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes telles que $\mathbb{P}(X_n = a_n) = \mathbb{P}(X_n = -a_n) = 1/2$. On note $S_n = \sum_{j=1}^n X_j$.

1. Montrer que S_n converge en loi si et seulement si $\sum a_n^2$ converge.
2. Montrer que dans ce cas, on a même convergence presque sûre.
3. On suppose maintenant que $\sum a_n^2$ diverge et que la suite (a_n) est bornée. Posons $\phi(n)^2 = \sum_{k=1}^n a_k^2$, montrer que $S_n/\phi(n)$ converge en loi vers une loi limite que l'on déterminera.

Démonstration.

1. Théorème de Lévy.
2. Théorème des trois séries.
3. Théorème de Lévy : on a

$$\mathbb{E}\left[e^{i\xi S_n/\phi(n)}\right] = \prod_{k=1}^n \left[\cos\left(\xi a_k/\phi(n)\right)\right] \approx \exp\left(-\xi^2/2 \sum_{k=1}^n a_k^2/\phi(n)^2\right),$$

donc la limite est une gaussienne centrée réduite.

□

Exercice 12 (Vers la loi du logarithme itéré)**.** Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes centrées de variance 1. On note $S_n = \sum_{j=1}^n X_j$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'événement $S_{2^n} - S_{2^{n-1}} \geq 2^{n/2}x$ arrive infiniment souvent. En déduire

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n^{1/2}} = +\infty$$