Bastien Mallein
Bureau V2

TD 8 – Notion d'espérance conditionnelle

Lundi 9 Novembre

Dans toute la suite, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ représente un espace de probabilité.

Exercice 1 (Positivité de l'espérance conditionnelle)**.** Soient $\mathcal{G}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$ et X une variable aléatoire positive sur Ω. Montrer que $\{\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] > 0\}$ est le plus petit ensemble $\mathcal{G}$-mesurable (aux ensembles négligeables près) qui contient $\{X > 0\}$.

Démonstration. $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ est une variable aléatoire $\mathcal{G}$-mesurable, donc $\{\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] > 0\} \in \mathcal{G}$. De plus, on a

$$\mathbb{E}(X\mathbf{1}_{\{\mathbb{E}(X|\mathcal{G})=0\}}) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{G})\mathbf{1}_{\{\mathbb{E}(X|\mathcal{G})=0\}}) = 0,$$

donc $\{X > 0\} \subset \{\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) > 0\}$ aux ensembles négligeables près. D'autre part, pour tout $A \in \mathcal{G}$ tel que $\{X > 0\} \subset A$, on a $\mathbb{E}(X\mathbf{1}_{\{A^c\}}) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{G})\mathbf{1}_{\{A^c\}}) = 0$, donc $\{\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) > 0\} \subset A$ aux ensembles négligeables près. $\square$

Exercice 2 (Un calcul de loi conditionnelle)**.** On se donne deux réels a et b strictement positifs, et (X, Y) une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N} \times \mathbb{R}_+$ dont la loi est caractérisée par

$$\mathbb{P}(X = n, Y \leq t) = b \int_0^t \frac{(ay)^n}{n!} \exp(-(a+b)y)dy.$$

Déterminer, pour toute fonction h mesurable bornée, $\mathbb{E}[h(Y)|X]$, et en déduire $\mathbb{E}[\frac{Y}{(X+1)}]$. Calculer ensuite $\mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{X=n\}}|Y]$ et enfin $\mathbb{E}[X|Y]$.

Démonstration. On calcule pour commencer

$$\mathbb{P}(X = n) = \int_0^{+\infty} b\frac{(ay)^n}{n!}e^{-(a+b)y}dy = \frac{b}{a+b}\left(\frac{a}{a+b}\right)^n.$$

On a donc $\mathbb{E}(h(Y)|X) = (a+b)^{X+1} \int_{\mathbb{R}^+} \frac{y^X}{X!}e^{-(a+b)y}dy$, dès lors

$$\mathbb{E}\left[\frac{Y}{X+1}\right] = \mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}^+} \frac{((a+b)y)^{X+1}}{(X+1)!}e^{-(a+b)y}dy\right] = \frac{1}{a+b}.$$

De plus, on a $\mathbb{P}(Y \leq t) = b\int_0^t e^{-by}dy$, par conséquent, $\mathbb{P}(X = n|Y) = \frac{(aY)^n}{n!}e^{-aY}$, donc $\mathbb{E}(X|Y) = aY$. $\square$

Exercice 3 (Indépendance des espérances conditionnelles)**.**

1. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre $p, q \in (0, 1)$. On pose $Z = \mathbf{1}_{\{X+Y>0\}}$ et $\mathcal{G} = \sigma(Z)$. Calculer $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ et $\mathbb{E}[Y|\mathcal{G}]$. Ces deux variables aléatoires sont-elles indépendantes ?

2. Soient U, T des variables aléatoires réelles telles que pour toute sous-tribu $\mathcal{G}$ de $\mathcal{F}$, pour toutes fonctions $(f, g) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mesurables bornées, $\mathbb{E}[f(U)|\mathcal{G}]$ et $\mathbb{E}[g(T)|\mathcal{G}]$ sont indépendantes. Montrer que U ou T est constante.

Démonstration. Les ensembles $\{Z = 0\}$ et $\{Z = 1\}$ forment une partition de Ω, de plus

$$\mathbb{E}(X|Z = 0) = \mathbb{E}(Y|Z = 0) = 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(X|Z = 1) = \frac{p}{p + q - pq}, \quad \mathbb{E}(Y|Z = 1) = \frac{q}{p + q - pq},$$

d'où $q\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) = p\mathbb{E}(Y|\mathcal{G})$, qui sont proportionnelles donc non-indépendantes.

On choisit pour $f = \mathbf{1}_A$ et $g = \mathbf{1}_B$, avec $A \in \mathcal{A}$ et $B \in \mathcal{B}$. Le résultat précédent implique que pour tout $A, B \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$, soit $\mathbb{P}(U \in A) \in \{0, 1\}$, soit $\mathbb{P}(T \in B) \in \{0, 1\}$, ce qui implique bien que l'une de ces variables aléatoires est constante. □

Exercice 4 (Symétrie)**.** On se donne deux variables aléatoires réelles positives X et Y, et on suppose que $\mathbb{E}[X|Y] = Y$ et $\mathbb{E}[Y|X] = X$.

1. Montrer que si X et Y sont dans L^2, alors $X = Y$ p.s.
2. Montrer que pour toute variable aléatoire positive Z et tout $a \geq 0$,

$$\mathbb{E}[Z|Z \wedge a] \wedge a = Z \wedge a.$$

3. Montrer que le couple $(X \wedge a, Y \wedge a)$ vérifie les mêmes hypothèses que le couple (X, Y), et en déduire que $X = Y$ p.s.

Démonstration.
1. On calcule

$$\mathbb{E}((X - Y))^2 = \mathbb{E}(X^2) + \mathbb{E}(Y^2) - 2E(XY),$$

or $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X\mathbb{E}(Y|X)) = \mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}(Y^2)$, donc $X = Y$ p.s.

2. Soit $a > 0$, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Z|Z \wedge a) &= \mathbb{E}(Z\mathbf{1}_{\{Z<a\}}|Z \wedge a) + \mathbb{E}(Z\mathbf{1}_{\{Z\geq a\}}|Z \wedge a)\\ &= \mathbb{E}(Z \wedge a\mathbf{1}_{\{Z\wedge a<a\}}|Z \wedge a) + \mathbb{E}(Z\mathbf{1}_{\{Z\wedge a=a\}}|Z \wedge a)\\ &= Z \wedge a\mathbf{1}_{\{Z\wedge a<a\}} + \mathbb{E}(Z\mathbf{1}_{\{Z\geq a\}}|Z \wedge a)\mathbf{1}_{\{Z\wedge a=a\}}\end{aligned}$$

dès lors $\mathbb{E}(Z|Z \wedge a) \wedge a = Z \wedge a$.

3. On utilise alors l'inégalité de Jensen

$$\mathbb{E}(X \wedge a|Y \wedge a) \leq \mathbb{E}(X|Y \wedge a) \wedge a$$

or $\mathbb{E}(X|Y \wedge a) \wedge a = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|Y)|Y \wedge a) \wedge a = \mathbb{E}(Y|Y \wedge a) \wedge a = Y \wedge a$. Par conséquent, on a

$$\mathbb{E}(X \wedge a|Y \wedge a) \leq Y \wedge a \quad \text{and} \quad \mathbb{E}(Y \wedge a|X \wedge a) \leq X \wedge a.$$

En particulier, $\mathbb{E}(X \wedge a) \leq \mathbb{E}(Y \wedge a)$, par conséquent,

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(X \wedge a|Y \wedge a) - Y \wedge a) = 0,$$

d'où on conclut $\mathbb{E}(X \wedge a|Y \wedge a) = Y \wedge a$, car une variable aléatoire négative d'espérance nulle est nulle. On conclut en utilisant que $X \wedge a$ et $Y \wedge a$ sont dans L^2.

□

Exercice 5 (Espérance conditionnelle de variables aléatoires exponentielles)**.** Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes de même loi exponentielle de paramètre λ. On note $T = X_1 + \ldots + X_n$. Calculer $\mathbb{E}[h(X_1)|T]$ pour toute fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ borélienne bornée. Que remarque-t-on lorsque $n = 2$?

En déduire que, pour tout $t > 0$,

$$\mathbb{E}[h(X_1, X_1 + X_2, \ldots X_1 + \cdots + X_{n-1})|T = t] = \mathbb{E}\left[h(tU^{(1)}, \ldots tU^{(n-1)}\right],$$

avec $U^{(1)}, \ldots U^{(n-1)}$ le réordonnement de $U_1, \ldots U_{n-1}$ des variables aléatoires i.i.d. de loi uniforme sur $[0, 1]$.

Démonstration. Soit $k \in \mathbb{N}$, on note $s_k = x_1 + \cdots + x_k$, on a alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(h(X_1)f(T)) &= \lambda^n \iiint_{\mathbb{R}_+^n} e^{-\lambda(x_1+\cdots+x_n)} h(x_1) f(x_1 + \cdots + x_n) dx \\
&= \lambda^n \iiint_{0 \le s_1 \le \cdots \le s_n} e^{-\lambda s_n} h(s_1) f(s_n) ds = \frac{\lambda^n}{(n-2)!} \int_{0 \le s \le t} h(s) f(t)(t-s)^{n-2} e^{-\lambda t} ds dt,
\end{aligned}$$

donc $\mathbb{E}(h(X_1)|T) = \int_0^T \frac{\lambda^n}{(n-2)!} h(s)(T-s)^{n-2} ds$. En particulier, si $n = 2$ la loi de X_1 conditionnellement à T est uniforme sur $[0, T]$.

On observe également que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[h(tU^{(1)}, tU^{(n-1)})\right] &= \frac{1}{t^{n-1}} \iiint_{[0,t]^{n-1}} h(s^{(1)}, \ldots s^{(n-1)}) ds \\
&= \frac{(n-1)!}{t^{n-1}} \iiint_{0 \le s_1 \le \cdots \le s_{n-1}} h(s_1, \ldots s_{n-1}) ds.
\end{aligned}$$

D'autre part

$$\mathbb{E}[h(X_1, X_1 + X_2, \ldots X_1 + \cdots + X_{n-1}) f(T)] = \lambda^n \iiint_{0 \le s_1 \cdots \le s_n} h(s_1, \ldots s_{n-1}) f(s_n) e^{-\lambda s_n}$$

et $\mathbb{E}(f(T)) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \int_0^{+\infty} f(t) t^{n-1} e^{-\lambda t} dt$. □

Exercice 6 (Convergence conditionnelle)**.** On se donne (X_i) et $(\mathcal{F}_i)$ une suite de variables aléatoires positives et une suite de sous-tribus de $\mathcal{F}$. On suppose que $\mathbb{E}[X_i|\mathcal{F}_i]$ converge en probabilité vers 0.

1. Montrer que $(X_i)_{i \ge 1}$ converge en probabilité vers 0.
2. Montrer que la réciproque est fausse.

Démonstration. Raisonnons par l'absurde, et supposons qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que $\mathbb{P}(X_i > \epsilon) > \epsilon$ infiniment souvent. On pose $A_i = \{\mathbb{E}(X_i|\mathcal{F}_i) > \epsilon^2/10\}$, par hypothèse on a $\lim_{i \to +\infty} \mathbb{P}(A_i) = 0$. Dès lors, $\mathbb{P}(X_i > \epsilon, A_i^c) \ge \epsilon/2$ pour une infinité de i. Dès lors

$$\mathbb{E}[X_i \mathbf{1}_{A_i^c}] = \mathbb{E}(\mathbb{E}[X_i|\mathcal{F}_i] \mathbf{1}_{A_i^c}) \le \epsilon^2/10$$

$$\mathbb{E}(X_i \mathbf{1}_{A_i^c}] \ge \mathbb{E}(X_i \mathbf{1}_{\{X_i > \epsilon, A_i^c\}}) \ge \frac{\epsilon^2}{2},$$

ce qui est une contradiction. □

Exercice 7 (Indépendance conditionnelle)**.** On dit que deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes conditionnellement à $\mathcal{G}$ si pour toutes fonctions f et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ mesurables positives,

$$\mathbb{E}[f(X)g(Y)|\mathcal{G}] = \mathbb{E}[f(X)|\mathcal{G}]\mathbb{E}[g(Y)|\mathcal{G}].$$

1. Que signifie ceci si $\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega\}$? Si $\mathcal{G} = \mathcal{F}$?
2. Montrer que la définition précédente équivaut à : pour toute variable aléatoire $\mathcal{G}$-mesurable positive Z, pour toutes fonctions f et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ mesurables positives,

$$\mathbb{E}[f(X)g(Y)Z] = \mathbb{E}[f(X)Z\mathbb{E}[g(Y)|\mathcal{G}]],$$

et aussi à : pour toute fonction g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ mesurable positive,

$$\mathbb{E}[g(Y)|\mathcal{G} \vee \sigma(X)] = \mathbb{E}[g(Y)|\mathcal{G}].$$

Démonstration. Voir TD 10. □

Démonstration. On calcule, pour $m < n$

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[(\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_{n+1}) - \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_n))\left(\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_{m+1}) - \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_m)\right)\right] \\
&\quad = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_{n+1})\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_{m+1}) - \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_{n+1})\mathbb{E}(Y|\mathcal{F}_m) + \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_n)\mathbb{E}(Y|\mathcal{F}_{m+1}) - \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_n)\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_m)\right] \\
&\quad = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_{m+1})^2 - \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_m)^2 + \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_{m+1})^2 - \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_m)^2\right] \\
&\quad = 0
\end{aligned}$$

ce qui montre que la famille est orthogonale. De plus, pour $m = n$, on a

$$\mathbb{E}\left[(\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_{n+1}) - \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_n))^2\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_n)^2 - \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_{n+1})^2\right],$$

donc $\sum \mathbb{E}\left[(\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_{n+1}) - \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_n))^2\right] < +\infty$, d'où la convergence de la série dans L^2, par critère de Cauchy dans L^2.

On déduit de la question précédente que $\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_n)$ converge, on note Y la variable aléatoire limite. Par décroissance des tribus, on a Y est $\mathcal{F}_n$-mesurable pour tout n. C'est donc une variable aléatoire $\mathcal{F}_\infty$-mesurable. Or, par Jensen,

$$Y = \mathbb{E}(Y|\mathcal{F}_\infty) = \lim_{p \to +\infty} \mathbb{E}\left[\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_p)|\mathcal{F}_\infty\right] = \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_\infty)$$

où la limite est prise dans L^2. □

Démonstration. Soit Y une variable aléatoire mesurable, et Z une variable aléatoire $\mathcal{G}$-mesurable, on a

$$\widehat{\mathbb{E}}\left[Z\widehat{\mathbb{E}}[Y|\mathcal{G}]\right] = \widehat{\mathbb{E}}\left[YZ\right] = \mathbb{E}(XYZ) = \mathbb{E}\left[Z\mathbb{E}[XY|\mathcal{G}]\right].$$

Et d'autre part

$$\widehat{\mathbb{E}}\left[Z\widehat{\mathbb{E}}[Y|\mathcal{G}]\right] = \mathbb{E}\left[XZ\widehat{\mathbb{E}}[Y|\mathcal{G}]\right] = \mathbb{E}\left[Z\widehat{\mathbb{E}}[Y|\mathcal{G}]\mathbb{E}(X|\mathcal{G})\right],$$

on a donc égalité.

En particulier, si X est une variable aléatoire $\mathcal{G}$-mesurable, on a $\widehat{E}[Y|\mathcal{G}] = \mathbb{E}(Y|\mathcal{G})$. □