Processus aléatoires *ENS Paris*, 2015/2016

Bastien Mallein
Bureau V2

TD 9 – Calculs d'espérance conditionnelle

Lundi 16 novembre

Dans toute la suite, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ représente un espace de probabilité.

Exercice 1 (Conditionnement gaussien)**.** Soit (X, Y) un vecteur gaussien de matrice de covariance

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

1. Vérifier que cette matrice est une matrice de covariance.
2. Déterminer $\mathbb{E}(X|Y)$.
3. Déterminer la loi de X conditionnellement à Y.

Démonstration. 1. C'est une matrice symétrique positive.

2. L'espérance conditionnelle est la projection, donc $\mathbb{E}(X|Y) = Y/3$.
3. La loi conditionnelle est une gaussienne, centrée en $Y/3$, et de variance $5/3$.

□

Exercice 2 (Un calcul explicite d'espérance conditionnelle)**.** On note $\Omega = [0, 1]$ et $\mathcal{F}$ la tribu borelienne complétée.

1. On pose $\mathcal{G} = \sigma([u, 1], u \in [1/2, 1])$. Soit f une fonction continue bornée sur $[0, 1]$, déterminer $\mathbb{E}(f|\mathcal{G})$.
2. On pose $\mathcal{H} = \sigma([0, u] \cup [1-u, 1], u \in [0, 1/2])$. Soit f une fonction continue bornée sur $[0, 1]$, déterminer $\mathbb{E}(f|\mathcal{H})$.

Démonstration. On vérifie aisément que

$$\mathbb{E}(f|\mathcal{G})(x) = f(x)\mathbf{1}_{\{x<1/2\}} + 2\mathbf{1}_{\{x>1/2\}} \int_{1/2}^{1} f(y)dy.$$

ainsi que

$$\mathbb{E}(f|\mathcal{H})(x) = \frac{f(x) + f(1-x)}{2}.$$

Exercice -4 (Propagation de la rumeur)**.** Soit $p \in (0, 1)$, on considère le modèle de propagation de la rumeur suivant. L'information initiale est 1, et chaque individu qui entend la rumeur (à la génération k) la transmet à deux nouvelles personnes (à la génération $k+1$) avec probabilité p, ou transmet l'information contraire avec probabilité $1 - p$. Quel est la probabilité qu'il existe un individu à la génération k possédant l'information initiale jamais dégradée ? Calculer l'espérance et la variance de Z_k le nombre d'individus à la génération k qui ont reçu l'information 1. Montrer que $2^{-n} Z_n$ converge p.s.

$\square$

Exercice 3 (Classes monotones)**.** Soit $\mathcal{G}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$, et Π stable par intersections finies tel que $\sigma(\Pi) = \mathcal{G}$. On note X une variable aléatoire, et $Y \in \sigma(\mathcal{G}))$ telle que

$$\forall \pi \in \Pi, \mathbb{E}(X\mathbf{1}_\pi) = \mathbb{E}(Y\mathbf{1}_\pi),$$

montrer que $Y = \mathbb{E}(X|\mathcal{G})$.

Démonstration. Preuve directe, par le titre. La classe des ensembles telles que l'égalité est vérifié est une classe monotone, qui contient Π. $\square$

Exercice 4. Soit $X = (X_1, X_2, X_3)$ un vecteur gaussien de matrice de covariance

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

1. La variable X a-t-elle une densité ?
2. Calculer $\mathbb{E}(X_1|X_2)$ et $\mathbb{E}(X_1|X_2, X_3)$.
3. Calculer $\mathbb{E}\left[e^{i\xi X_1}|X_2\right]$ et $\mathbb{E}(e^{i\xi X_1}|X_2, X_3)$.

Démonstration.

1. Comme $\det(C) = 0$, la variable X n'a pas de densité sur $\mathbb{R}^3$, mais uniquement sur un sous-espace vectoriel de dimension 2.
2. Comme l'espérance conditionnelle de variables aléatoires dans L^2 correspond à la projection, on a immédiatement $\mathbb{E}(X_1|X_2) = \lambda X_2$ de telle sorte que

$$2 = \mathbb{E}(X_1X_2) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X_1|X_2)X_2) = 5\lambda,$$

donc $\lambda = 2/5$. De plus, d'après la question précédente, $\mathbb{E}(X_1|X_2, X_3) = X_1$, car (X_1, X_2, X_3) forme un espace vectoriel de dimension 2.

3. On utilise que $X_1 - \mathbb{E}(X_1|X_2)$ est une v.a. gaussienne, centrée indépendante de X_2, par conséquent

$$\mathbb{E}(e^{i\xi X_1}|X_2) = e^{2i\xi X_2/5}e^{-\mathbb{E}((X_1-2X_2/5)^2)\xi^2/2}.$$

De plus, $\mathbb{E}(e^{i\xi X_1}|X_2, X_3) = e^{i\xi X_1}$.

$\square$

Exercice 5 (Le problème des tanks allemands)**.** Soit $(A_i, i \in \mathbb{N})$ une partition de Ω formée d'ensembles mesurables vérifiant $\mathbb{P}(A_i) > 0$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. Montrer que pour tout évènement $B \in \mathcal{F}$ tel que $\mathbb{P}(B) > 0$, on a

$$\mathbb{P}(A_i|B) = \frac{\mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B|A_i)}{\sum_{j\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_j)\mathbb{P}(B|A_j)}.$$

Soit N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, et conditionnellement à N, M est le maximum de k lois uniformes sur $\{1, \dots N\}$. Déterminer la loi conditionnelle de N sachant M.

Démonstration. Preuve du cours.

On utilise la formule ci-dessus, on note $p_j = \mathbb{P}(N = j)$. Pour tout $i < j$, on a

$$\mathbb{P}(N = j|M = i) = \frac{p_j \times k\frac{i^{k-1}}{j^k}}{\sum_{l\geq i} p_l \times k\frac{i^{k-1}}{l^k}} = \frac{p_j/j^k}{\sum_{l\geq j} p_l/l^k}.$$

□

Exercice 6 (Des problèmes de théorie)**.** Soit X une variable aléatoire à valeurs réelles, et $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ deux sous-tribus de $\mathcal{F}$ telles que $\mathcal{G} \vee \mathcal{H} = \mathcal{F}$. Peut-on déterminer X de façon unique à partir de $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ et $\mathbb{E}(X|\mathcal{H})$?

Est-il possible de trouver un processus (M_n) tel que $\mathbb{E}(|M_n|) < +\infty$, et $\mathbb{E}[M_{n+1}|M_n] = M_n$ qui n'est pas une martingale ?

Démonstration. Si X est une gaussienne centrée réduite, et $\mathcal{G} = \sigma(\mathrm{sgn}(X))$, $\mathcal{H} = \sigma(|X|)$, alors $X = \mathrm{sgn}(X)|X|$ est $\mathcal{G} \vee \mathcal{H}$-mesurable, mais

$$\mathbb{E}(X|\mathrm{sgn}(X)) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\mathrm{sgn}(X) \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(X|\mathcal{H}) = 0.$$

donc on ne connait que le signe de X, c'est insuffisant pour reconstruire X. Ainsi, $\mathrm{sgn}(X)\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}$ est une autre solution du problème : trouver Y tel que

$$\mathbb{E}(Y|\mathcal{G}) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\mathrm{sgn}(X) \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(Y|\mathcal{H}) = 0.$$

Un tel processus peut par exemple être défini comme suit : soit S une marche aléatoire, et T son deuxième instant de retour en 0. On pose alors

$$M_n = S_{n \bmod T}.$$

□

Exercice 7. On place des pièces dans deux urnes de la façon suivante. À l'instant initial, il y a 1 pièce dans chaque urne. A chaque étape, la pièce est ajoutée dans la première urne avec probabilité $x/(x+y)$ où x est le nombre de pièces dans la première urne, et y le nombre de pièces dans la deuxième. On note M_n le nombre de pièces dans la première urne après n étapes.

1. Déterminer $\mathbb{E}(M_{n+1}|M_n)$.
2. Déterminer la loi de M_n.
3. Montrer que $M_n/(n+2)$ converge presque sûrement.
4. (**) Déterminer la loi de M_n conditionnellement à $\lim_{n\to+\infty} M_n/(n+2)$.

Démonstration. Cf. DM 3. □

Exercice 8. On considère $X_0 = 0$, et $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles i.i.d. de loi normale centrée réduite. On introduit

$$Y_i = \frac{X_i - X_{i-1}}{i}, i \geq 1.$$

On note $\mathcal{F}_n = \sigma(X_i, i \leq n)$, et on pose

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i.$$

1. Montrer que $\mathbb{E}(S_{n+1}|\mathcal{F}_n) = S_n - \frac{X_n}{n+1}$.
2. En déduire que $\bar{S}_n = S_n - \frac{X_n}{n+1}$ est une $\mathcal{F}_n$-martingale.
3. Trouver une suite de réels positifs (u_j) telle que pour tout $n \geq 1$, on a
$$\bar{S}_n = \sum_{i=1}^{n} u_i X_i$$
en déduire une nouvelle démonstration de 2.
4. Calculer $\mathbb{E}(|X_1|)$, et montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$
$$\mathbb{E}\left[|\bar{S}_n|\right] \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j(j+1)}.$$
5. En déduire que lorsque $n \to +\infty$, $\bar{S}_n$ converge presque sûrement vers une variable aléatoire $\bar{S}_\infty$. Montrer alors que S_n converge également vers $\bar{S}_\infty$ presque sûrement.
6. En utilisant la question 4, montrer que $\bar{S}_\infty$ est une variable aléatoire gaussienne centrée dont on déterminera la variance.

Démonstration.

1. On a $\mathbb{E}(S_{n+1}|\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(S_n + \frac{X_{n+1}-X_n}{n+1}|\mathcal{F}_n)$. Comme S_n est $\mathcal{F}_n$-mesurable, on peut conclure.
2. De la même façon, $\mathbb{E}(\bar{S}_{n+1}|\mathcal{F}_n) = \bar{S}_n$, ce qui permet de conclure.
3. On a immédiatement $S_n = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{X_j}{j(j+1)} + \frac{X_n}{n}$, on obtient $u_j = 1/(j(j+1))$ et un calcul immédiat de $\mathbb{E}(\bar{S}_{n+1}|\mathcal{F}_n)$.
4. Il est facile d'obtenir $\mathbb{E}(|X_1|) = \sqrt{2/\pi}$, le reste s'obtient par inégalité triangulaire.
5. Comme $(\bar{S}_n)$ est bornée dans L^1, on a convergence de la martingale p.s. et dans L^1. La convergence p.s. de S_n vient du fait que $X_n/n \to 0$ p.s.
6. On calcule la transformée de Fourier.

$\square$